

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	vii
Abréviations et Notations	xi
1 Énoncés	1
1.1 Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel	1
1.2 Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré)	3
1.3 Convexité et différentiabilité	5
1.4 Un théorème de Rolle approché. Différentiation d'applications radiales. Un système différentiel linéaire	7
1.5 Différentielle d'une fonctionnelle intégrale. Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs matricielles	9
1.6 Opérateurs de Nemycki	11
1.7 Différentiabilité (et caractère \mathcal{C}^1) <i>via</i> les différentielles partielles. Calcul différentiel (basique, Théorème des accroissements finis)	12
1.8 Dérivée de $t \mapsto \exp((1-t)A) \exp(tB)$. Formules de Taylor sur la fonction déterminant. Conditions d'extrémalité du deuxième ordre sur un espace de Hilbert	13
1.9 Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre en l'absence de différentiabilité	16
1.10 Méthode de descente le long du gradient	18
1.11 Conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes d'inégalité	20
1.12 Différentielle de Gâteaux. Multiplicateurs de Lagrange	23

1.13	Minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte d'inégalité convexe	25
1.14	Minimisation d'une fonction convexe sur un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n	27
1.15	Détermination et nature des points critiques d'une fonction. Différentiation de l'application exponentielle	29
1.16	Calcul différentiel d'ordre supérieur. Différentielle d'ordre 2 d'une application composée	31
1.17	Résolution d'équations par la méthode de Newton I	33
1.18	Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton II. Minimisation d'une fonction convexe par la méthode du gradient	35
1.19	Un théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs vectorielles. Un problème de maximisation. Sensibilité des racines simples d'un polynôme	37
1.20	Conditions d'optimalité exprimées à l'aide du cône tangent à l'ensemble des contraintes. Applications à un problème variationnel	39
1.21	Problème variationnel de minimisation d'une fonctionnelle du Calcul des variations	43
1.22	Calcul différentiel d'ordre 2 sur un espace de matrices. Surjectivité de la normale unitaire à une hypersurface compacte de \mathbb{R}^n . Ensemble des solutions possibles d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n	45
1.23	Descente continue le long du gradient. Projection sur une surface de \mathbb{R}^3	47
1.24	Une surface conique de \mathbb{R}^3 . Monotonie des solutions d'équations différentielles scalaires autonomes. Une équation différentielle vectorielle linéaire	49
1.25	Un problème aux limites par le Théorème des fonctions implicites. Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques	51
1.26	Du Théorème des fonctions implicites au Théorème de Cauchy-Lipschitz	53
1.27	Intégrales premières. Utilisation du Théorème des fonctions implicites. Une équation aux dérivées partielles	54

1.28	Différentiabilité de la fonction distance à un ensemble. Une équation différentielle scalaire non linéaire du deuxième ordre. Système différentiel linéaire où les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de t	56
1.29	Équations différentielles scalaires. Équation différentielle vectorielle linéaire à coefficients périodiques	59
1.30	Distance de l'origine à une courbe de \mathbb{R}^3 . Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle scalaire	60
1.31	Équation différentielle $y' = xy^2$. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle	63
1.32	Formule de Thermodynamique sur les dérivées partielles. Équation différentielle $x' = t \sin x$. Équation différentielle linéaire à coefficients périodiques	65
1.33	Équations différentielles non linéaires. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire sous la condition de Liapounov	68
1.34	Une équation différentielle scalaire autonome. Calcul de la hauteur d'une courbe. Différentiation de la fonction déterminant	70
1.35	Équations différentielles avec retard	72
1.36	Méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles	74
2	Solutions	77
2.1	Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel	77
2.2	Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré)	82
2.3	Convexité et différentiabilité	85
2.4	Un théorème de Rolle approché. Différentiation d'applications radiales. Un système différentiel linéaire	88
2.5	Différentielle d'une fonctionnelle intégrale. Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs matricielles	92
2.6	Opérateurs de Nemycki	98
2.7	Différentiabilité (et caractère \mathcal{C}^1) <i>via</i> les différentielles partielles. Calcul différentiel (basique, Théorème des accroissements finis)	99
2.8	Dérivée de $t \mapsto \exp((1-t)A) \exp(tB)$. Formules de Taylor sur la fonction déterminant. Conditions d'extrémalité du deuxième ordre sur un espace de Hilbert	104

2.9	Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre en l'absence de différentiabilité	110
2.10	Méthode de descente le long du gradient	112
2.11	Conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes d'inégalité	116
2.12	Différentielle de Gâteaux. Multiplicateurs de Lagrange	119
2.13	Minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte d'inégalité convexe	122
2.14	Minimisation d'une fonction convexe sur un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n	126
2.15	Détermination et nature des points critiques d'une fonction. Différentiation de l'application exponentielle	132
2.16	Calcul différentiel d'ordre supérieur. Différentielle d'ordre 2 d'une application composée	136
2.17	Résolution d'équations par la méthode de Newton I	140
2.18	Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton II. Minimisation d'une fonction convexe par la méthode du gradient	144
2.19	Un théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs vectorielles. Un problème de maximisation. Sensibilité des racines simples d'un polynôme	147
2.20	Conditions d'optimalité exprimées à l'aide du cône tangent à l'ensemble des contraintes. Applications à un problème variationnel	153
2.21	Problème variationnel de minimisation d'une fonctionnelle du Calcul des variations	158
2.22	Calcul différentiel d'ordre 2 sur un espace de matrices. Surjectivité de la normale unitaire à une hypersurface compacte de \mathbb{R}^n . Ensemble des solutions possibles d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n	163
2.23	Descente continue le long du gradient. Projection sur une surface de \mathbb{R}^3	166
2.24	Une surface conique de \mathbb{R}^3 . Monotonie des solutions d'équations différentielles scalaires autonomes. Une équation différentielle vectorielle linéaire	170
2.25	Un problème aux limites par le Théorème des fonctions implicites. Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques	174

2.26	Du Théorème des fonctions implicites au Théorème de Cauchy-Lipschitz	178
2.27	Intégrales premières. Utilisation du Théorème des fonctions implicites. Une équation aux dérivées partielles	180
2.28	Différentiabilité de la fonction distance à un ensemble. Une équation différentielle scalaire non linéaire du deuxième ordre. Système différentiel linéaire où les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de t	184
2.29	Équations différentielles scalaires. Équation différentielle vectorielle linéaire à coefficients périodiques	189
2.30	Distance de l'origine à une courbe de \mathbb{R}^3 . Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle scalaire	191
2.31	Équation différentielle $y' = xy^2$. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle	195
2.32	Formule de Thermodynamique sur les dérivées partielles. Équation différentielle $x' = t \sin x$. Équation différentielle linéaire à coefficients périodiques	200
2.33	Équations différentielles non linéaires. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire sous la condition de Liapounov	205
2.34	Une équation différentielle scalaire autonome. Calcul de la hauteur d'une courbe. Différentiation de la fonction déterminant	207
2.35	Équations différentielles avec retard	214
2.36	Méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles	218
	Bibliographie	223