

Table des matières

Avant-propos	vii
1 Espaces métriques	1
1.1 Topologie associée à une distance	1
1.2 Suites à valeurs dans un espace métrique	5
1.3 Limites et continuité	11
1.4 Propriétés globales des fonctions continues	13
1.5 Exercices	18
2 Espaces normés	25
2.1 Semi-normes et normes	25
2.2 Applications linéaires continues	30
2.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie	34
2.4 Exercices	37
3 Espaces préhilbertiens	49
3.1 Inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski	50
3.2 Orthogonalité	53
3.3 Orthogonalisation de Gram-Schmidt	54
3.4 Meilleure approximation dans un espace préhilbertien	56
3.5 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval	60
3.6 Déterminants de Gram	64
3.7 Les théorèmes de Müntz	69
3.8 Exercices	75
4 Suites numériques	87
4.1 Suites numériques convergentes	87
4.2 Suites réelles monotones, adjacentes	93
4.3 Développement décimal d'un réel	98
4.4 Fractions continues	106
4.5 Sous-groupes additifs de \mathbb{R}	114
4.6 Moyennes de Cesàro	116
4.7 Limites supérieure et inférieure	120
4.8 Exercices	122

5	Vitesse et accélération de la convergence des suites réelles	139
5.1	Vitesse de convergence	139
5.2	Accélération de la convergence	143
5.3	Méthode d'accélération d'Aitken	144
5.4	Méthode d'accélération de Richardson	146
5.5	Exercices	151
6	Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle	161
6.1	Limite et continuité en un point	161
6.2	Opérations sur les fonctions continues	167
6.3	Fonctions périodiques continues	169
6.4	Propriétés globales des fonctions continues	169
6.5	Le théorème des valeurs intermédiaires	173
6.6	Fonctions réciproques	175
6.7	Prépondérance, domination et équivalents	178
6.8	Exercices	184
7	Dérivées des fonctions d'une variable réelle	197
7.1	Dérivée d'ordre 1 et dérivées d'ordre supérieur	197
7.2	Opérations sur les fonctions dérivables	201
7.3	Sens de variation d'une fonction	205
7.4	Dérivée logarithmique	208
7.5	Extrema et dérivation	209
7.6	Position d'une courbe par rapport aux sécantes et aux tangentes	212
7.7	Dérivation et intégration	214
7.8	Suites de fonctions dérivables	215
7.9	Fonctions différentiables	216
7.10	Exercices	217
8	Fonctions convexes	225
8.1	Fonctions convexes	225
8.2	Régularité des fonctions convexes	231
8.3	Inégalités de convexité	239
8.4	Exercices	245
9	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	251
9.1	Le théorème de Rolle	251
9.2	Applications du théorème de Rolle	254
9.3	Théorème et inégalité des accroissements finis	258
9.4	Applications des théorèmes et inégalités des accroissements finis	261
9.5	Exercices	279
10	Les formules de Taylor	287
10.1	La formule de Taylor-Lagrange	287
10.2	Formule de Taylor avec reste intégral	288
10.3	Cas des fonctions de plusieurs variables	289
10.4	Applications des formules de Taylor	292
10.5	Exercices	303

11 Développements limités	307
11.1 Le théorème de Taylor-Young	309
11.2 Opérations sur les développements limités	310
11.3 Utilisation des développements limités	315
11.4 Exercices	323
12 Points fixes et approximations successives	329
12.1 Le théorème du point fixe de Picard	329
12.2 Cas des fonctions d'une variable réelle	334
12.3 Suites homographiques	337
12.4 Applications à la résolution d'équations numériques	342
12.5 Exercices	348
13 Équations fonctionnelles	355
13.1 Morphismes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans lui même	355
13.2 Morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, +)$	357
13.3 Morphismes du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans lui même	358
13.4 Morphismes de groupes de (\mathbb{R}^*, \cdot) dans $(\mathbb{R}, +)$	358
13.5 L'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$ sur \mathbb{R}	360
13.6 L'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$	361
13.7 L'équation fonctionnelle $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ sur \mathbb{R}	361
13.8 L'exponentielle complexe	363
13.9 L'équation fonctionnelle $f(x + 1) = xf(x)$	364
13.10 L'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ sur \mathbb{R}^3	367
13.11 Suites complexes définies par une relation de récurrence linéaire	371
13.12 Exercices	375
14 Équations différentielles linéaires	381
14.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre	381
14.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	385
14.3 Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants	389
14.4 Équations différentielles linéaires d'ordre n	392
14.5 Racines des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2	394
14.6 Équations différentielles linéaires à coefficients développables en série entière	399
14.7 Exercices	402
15 Polynômes orthogonaux	417
15.1 Produit scalaire associé à une fonction poids et polynômes orthogonaux	417
15.2 Polynômes orthogonaux classiques, formules de Rodrigues	425
15.3 Les polynômes de Legendre	432
15.4 Développement en série de polynômes orthogonaux	440
15.5 Exercices	446
Bibliographie	453
Index	455