

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Espaces métriques</b>	<b>1</b>
1.1 Topologie associée à une distance . . . . .	1
1.2 Suites à valeurs dans un espace métrique . . . . .	5
1.3 Limites et continuité . . . . .	11
1.4 Propriétés globales des fonctions continues . . . . .	13
1.5 Exercices . . . . .	18
<b>2 Espaces normés</b>	<b>25</b>
2.1 Semi-normes et normes . . . . .	25
2.2 Applications linéaires continues . . . . .	30
2.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	34
2.4 Exercices . . . . .	37
<b>3 Espaces préhilbertiens</b>	<b>49</b>
3.1 Inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski . . . . .	50
3.2 Orthogonalité . . . . .	53
3.3 Orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	54
3.4 Meilleure approximation dans un espace préhilbertien . . . . .	56
3.5 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval . . . . .	60
3.6 Déterminants de Gram . . . . .	64
3.7 Les théorèmes de Müntz . . . . .	69
3.8 Exercices . . . . .	75
<b>4 Suites numériques</b>	<b>87</b>
4.1 Suites numériques convergentes . . . . .	87
4.2 Suites réelles monotones, adjacentes . . . . .	93
4.3 Développement décimal d'un réel . . . . .	98
4.4 Fractions continues . . . . .	106
4.5 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ . . . . .	114
4.6 Moyennes de Cesàro . . . . .	116
4.7 Limites supérieure et inférieure . . . . .	120
4.8 Exercices . . . . .	122

<b>5</b>	<b>Vitesse et accélération de la convergence des suites réelles</b>	<b>139</b>
5.1	Vitesse de convergence . . . . .	139
5.2	Accélération de la convergence . . . . .	143
5.3	Méthode d'accélération d'Aitken . . . . .	144
5.4	Méthode d'accélération de Richardson . . . . .	146
5.5	Exercices . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle</b>	<b>161</b>
6.1	Limite et continuité en un point . . . . .	161
6.2	Opérations sur les fonctions continues . . . . .	167
6.3	Fonctions périodiques continues . . . . .	169
6.4	Propriétés globales des fonctions continues . . . . .	169
6.5	Le théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	173
6.6	Fonctions réciproques . . . . .	175
6.7	Prépondérance, domination et équivalents . . . . .	178
6.8	Exercices . . . . .	184
<b>7</b>	<b>Dérivées des fonctions d'une variable réelle</b>	<b>197</b>
7.1	Dérivée d'ordre 1 et dérivées d'ordre supérieur . . . . .	197
7.2	Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	201
7.3	Sens de variation d'une fonction . . . . .	205
7.4	Dérivée logarithmique . . . . .	208
7.5	Extrema et dérivation . . . . .	209
7.6	Position d'une courbe par rapport aux sécantes et aux tangentes . . . . .	212
7.7	Dérivation et intégration . . . . .	214
7.8	Suites de fonctions dérivables . . . . .	215
7.9	Fonctions différentiables . . . . .	216
7.10	Exercices . . . . .	217
<b>8</b>	<b>Fonctions convexes</b>	<b>225</b>
8.1	Fonctions convexes . . . . .	225
8.2	Régularité des fonctions convexes . . . . .	231
8.3	Inégalités de convexité . . . . .	239
8.4	Exercices . . . . .	245
<b>9</b>	<b>Théorèmes de Rolle et des accroissements finis</b>	<b>251</b>
9.1	Le théorème de Rolle . . . . .	251
9.2	Applications du théorème de Rolle . . . . .	254
9.3	Théorème et inégalité des accroissements finis . . . . .	258
9.4	Applications des théorèmes et inégalités des accroissements finis . . . . .	261
9.5	Exercices . . . . .	279
<b>10</b>	<b>Les formules de Taylor</b>	<b>287</b>
10.1	La formule de Taylor-Lagrange . . . . .	287
10.2	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	288
10.3	Cas des fonctions de plusieurs variables . . . . .	289
10.4	Applications des formules de Taylor . . . . .	292
10.5	Exercices . . . . .	303

<b>11 Développements limités</b>	<b>307</b>
11.1 Le théorème de Taylor-Young . . . . .	309
11.2 Opérations sur les développements limités . . . . .	310
11.3 Utilisation des développements limités . . . . .	315
11.4 Exercices . . . . .	323
<b>12 Points fixes et approximations successives</b>	<b>329</b>
12.1 Le théorème du point fixe de Picard . . . . .	329
12.2 Cas des fonctions d'une variable réelle . . . . .	334
12.3 Suites homographiques . . . . .	337
12.4 Applications à la résolution d'équations numériques . . . . .	342
12.5 Exercices . . . . .	348
<b>13 Équations fonctionnelles</b>	<b>355</b>
13.1 Morphismes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans lui même . . . . .	355
13.2 Morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, +)$ . . . . .	357
13.3 Morphismes du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans lui même . . . . .	358
13.4 Morphismes de groupes de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ . . . . .	358
13.5 L'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}$ . . . . .	360
13.6 L'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ . . . . .	361
13.7 L'équation fonctionnelle $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}$ . . . . .	361
13.8 L'exponentielle complexe . . . . .	363
13.9 L'équation fonctionnelle $f(x + 1) = xf(x)$ . . . . .	364
13.10 L'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ sur $\mathbb{R}^3$ . . . . .	367
13.11 Suites complexes définies par une relation de récurrence linéaire . . . . .	371
13.12 Exercices . . . . .	375
<b>14 Équations différentielles linéaires</b>	<b>381</b>
14.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	381
14.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	385
14.3 Équations différentielles linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants . . . . .	389
14.4 Équations différentielles linéaires d'ordre $n$ . . . . .	392
14.5 Racines des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 . . . . .	394
14.6 Équations différentielles linéaires à coefficients développables en série entière . . . . .	399
14.7 Exercices . . . . .	402
<b>15 Polynômes orthogonaux</b>	<b>417</b>
15.1 Produit scalaire associé à une fonction poids et polynômes orthogonaux . . . . .	417
15.2 Polynômes orthogonaux classiques, formules de Rodrigues . . . . .	425
15.3 Les polynômes de Legendre . . . . .	432
15.4 Développement en série de polynômes orthogonaux . . . . .	440
15.5 Exercices . . . . .	446
<b>Bibliographie</b>	<b>453</b>
<b>Index</b>	<b>455</b>