

# Table des matières

Avant-propos	v
<b>1 Polynômes minimal et caractéristique. Sous espaces caractéristiques</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions et premières propriétés	2
1.2 Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe	7
1.3 Matrice compagnon d'un polynôme	10
1.4 Le théorème de Cayley-Hamilton	13
1.5 Méthodes de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice complexe	14
1.6 Sous espaces caractéristiques	17
1.7 Exercices	21
<b>2 Réduction des endomorphismes et des matrices</b>	<b>31</b>
2.1 Trigonalisation	31
2.2 Diagonalisation	33
2.3 Espaces vectoriels euclidiens	34
2.4 Réduction des matrices orthogonales	40
2.5 Réduction des matrices symétriques réelles	42
2.6 Tridiagonalisation des matrices symétriques réelles. Méthode de Householder	44
2.7 Espaces vectoriels hermitiens	46
2.8 Réduction des matrices normales	49
2.9 Forme réduite de Jordan	52
2.10 Exercices	56
<b>3 L'espace vectoriel normé <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{K})</math> (<math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math> ou <math>\mathbb{C}</math>)</b>	<b>73</b>
3.1 Norme matricielle induite par une norme vectorielle	73
3.2 Le groupe topologique $GL_n(\mathbb{K})$	77
3.3 Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	83
3.4 Rayon spectral d'une matrice complexe	86
3.5 Conditionnement d'une matrice	94
3.6 Quotient de Rayleigh-Ritz et Hausdorffien	96
3.7 Conditionnement des problèmes de valeurs propres	99
3.8 Exercices	102

<b>4</b>	<b>Matrices positives et irréductibles</b>	<b>123</b>
4.1	Matrices positives . . . . .	123
4.2	Matrices strictement positives et théorème de Perron-Frobenius . .	128
4.3	Matrices irréductibles . . . . .	134
4.4	Matrices primitives . . . . .	139
4.5	Matrices stochastiques et bistochastiques . . . . .	141
4.6	Exercices . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Systèmes linéaires</b>	<b>161</b>
5.1	Position des problèmes et notations . . . . .	161
5.2	Problèmes numériques liés à la résolution des systèmes linéaires . .	162
5.3	Cas des matrices triangulaires . . . . .	164
5.4	Matrices de dilatation et de transvection. Opérations élémentaires	164
5.5	Méthode des pivots de Gauss . . . . .	168
5.6	Résolution des systèmes linéaires à coefficients entiers . . . . .	170
5.7	Décomposition LR ou méthode de Crout . . . . .	171
5.8	Décomposition $LD^tL$ des matrices symétriques réelles . . . . .	174
5.9	Décomposition de Cholesky des matrices symétriques réelles définies positives . . . . .	175
5.10	Méthode d'élimination de Gauss-Jordan . . . . .	176
5.11	Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires . . . . .	177
5.12	Méthode de Jacobi . . . . .	178
5.13	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	179
5.14	Méthode de relaxation . . . . .	181
5.15	Méthodes de descente et de gradient . . . . .	188
5.16	Exercices . . . . .	196
<b>6</b>	<b>Calcul approché des valeurs et vecteurs propres</b>	<b>209</b>
6.1	Introduction . . . . .	209
6.2	Méthode de la puissance itérée . . . . .	209
6.3	Méthode de Jacobi pour les matrices symétriques . . . . .	213
6.4	La méthode de Givens et Householder . . . . .	218
6.5	Exercices . . . . .	223
<b>7</b>	<b>Systèmes différentiels linéaires et exponentielle d'une matrice</b>	<b>229</b>
7.1	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants . . . . .	229
7.2	L'exponentielle d'une matrice . . . . .	233
7.3	Un algorithme de calcul de l'exponentielle d'une matrice . . . . .	239
7.4	Equations différentielles linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants	240
7.5	Systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants . . . . .	242
7.6	Méthode de variation des constantes . . . . .	245
7.7	Surjectivité et injectivité de l'exponentielle matricielle . . . . .	247
7.8	Exercices . . . . .	251