

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 L'imagerie médicale</b>	<b>13</b>
1.1 Les techniques d'imagerie . . . . .	14
1.2 Quelques repères historiques . . . . .	16
1.3 La tomodensitométrie (CT) . . . . .	17
1.4 La tomographie par émission monophotonique (SPECT)	18
1.5 La tomographie par émission de positons (PET) . . . . .	18
1.6 L'imagerie par résonance magnétique (IRM) . . . . .	18
1.7 Les radiopharmaceutiques . . . . .	19
1.8 Les principes physiques de la tomographie . . . . .	21
1.9 L'échelle de Hounsfield . . . . .	22
1.10 Les algorithmes de reconstruction . . . . .	22
<b>2 La transformée de Radon</b>	<b>25</b>
2.1 La transformée de Fourier . . . . .	25
2.2 La transformée de Radon . . . . .	28
2.3 Propriétés de la transformée de Radon . . . . .	31
2.4 Transformée de Radon d'une ellipse . . . . .	32
2.5 Relation avec la transformée de Fourier . . . . .	33
2.6 Inversion de la transformée de Radon . . . . .	34
2.7 Transformée de Radon sur $\mathbb{R}^3$ . . . . .	35
2.8 Exemples de calcul de transformée de Radon . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Reconstruction analytique</b>	<b>43</b>
3.1	Projections et sinogrammes . . . . .	43
3.2	Théorème de la coupe centrale . . . . .	44
3.3	Rétroprojection . . . . .	45
3.4	Rétroprojection filtrée . . . . .	46
3.5	Filtrage . . . . .	47
<b>4</b>	<b>La transformée de Radon sur <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>49</b>
4.1	Intégration sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	49
4.2	Propriétés de la transformée de Radon . . . . .	53
4.3	Relation avec la transformée de Fourier . . . . .	57
4.4	Potentiels de Riesz . . . . .	57
4.5	Inversion de la transformée de Radon . . . . .	60
4.5.1	Cas des dimensions impaires . . . . .	60
4.5.2	Cas des dimensions paires . . . . .	62
4.6	Harmoniques sphériques . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Reconstruction discrète</b>	<b>69</b>
5.1	Interpolation . . . . .	69
5.1.1	L'interpolation de Lagrange . . . . .	69
5.1.2	L'interpolation d'Hermite . . . . .	70
5.1.3	L'interpolation de Tchebychev . . . . .	71
5.1.4	Les courbes de Bézier . . . . .	71
5.1.5	Les splines cubiques . . . . .	72
5.2	Régression linéaire . . . . .	73
5.3	Échantillonnage et théorème de Nyquist . . . . .	74
5.4	Reconstruction discrète . . . . .	78
5.4.1	Reconstruction par rétroprojection filtrée . . . . .	78
5.4.2	Reconstruction par transformée de Fourier rapide . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Méthodes numériques matricielles</b>	<b>83</b>
6.1	Méthode de Kaczmarz . . . . .	84
6.2	Conditionnement d'une matrice . . . . .	85
6.2.1	Propriétés du conditionnement . . . . .	87
6.2.2	Estimation du conditionnement . . . . .	88
6.3	Méthodes directes . . . . .	89
6.3.1	Méthode de Cholesky . . . . .	89
6.3.2	Factorisation LU . . . . .	89
6.3.3	Factorisation QR et méthode de Householder . . . . .	90
6.4	Méthodes itératives . . . . .	92
6.4.1	Méthode de Jacobi . . . . .	93
6.4.2	Méthodes de relaxation . . . . .	94

6.5	Méthodes projectives . . . . .	94
6.5.1	Méthode d'Arnoldi . . . . .	95
6.5.2	Méthode GMRES (Generalized Minimum Residual Method) . . . . .	96
6.5.3	Méthode FOM (Full Orthogonal Method) . . . . .	97
6.5.4	Méthode du gradient conjugué . . . . .	97
6.5.5	Méthode du gradient conjugué pour les moindres carrés . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Problèmes inverses</b>	<b>99</b>
7.1	Problèmes directs, problèmes inverses . . . . .	99
7.2	Exemples de problèmes inverses . . . . .	100
7.3	Problèmes mal posés . . . . .	101
7.4	Problèmes inverses mal posés . . . . .	103
7.5	L'électro-encéphalographie . . . . .	104
7.6	L'échographie . . . . .	104
<b>8</b>	<b>Régularisation et méthodes itératives algébriques</b>	<b>107</b>
8.1	Équation normale . . . . .	108
8.2	Régularisation de Tikhonov . . . . .	110
8.3	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	111
8.4	Méthode de troncature spectrale . . . . .	115
8.5	Critère de Morozov . . . . .	116
8.6	Méthode itérative de Landweber . . . . .	118
<b>9</b>	<b>Probabilités</b>	<b>121</b>
9.1	Lois de probabilités . . . . .	122
9.1.1	Lois discrètes . . . . .	127
9.1.2	Lois continues . . . . .	127
9.2	Modes de convergence des lois . . . . .	130
9.3	Estimateurs . . . . .	131
9.4	Lois conditionnelles . . . . .	132
9.5	Régression multilinéaire . . . . .	135
9.6	Vecteurs gaussiens . . . . .	137
9.7	Tirages d'échantillons aléatoires . . . . .	138
9.7.1	Méthode des congruences . . . . .	139
9.7.2	Méthode de la transformée inverse . . . . .	139
9.7.3	Méthode de Box-Muller . . . . .	140
9.7.4	Méthode du rejet de von Neumann . . . . .	140
9.7.5	Méthode de Cheng pour une loi gamma . . . . .	141
9.8	Intégration par Monte-Carlo . . . . .	141

9.8.1	Échantillonnage simple . . . . .	141
9.8.2	Réduction de variance . . . . .	142
9.8.3	Échantillonnage suivant l'importance . . . . .	143
9.9	Processus de Markov . . . . .	146
9.9.1	Mouvement brownien . . . . .	147
9.9.2	Chaînes de Markov . . . . .	148
9.10	Algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	151
9.11	Modèle d'Ising . . . . .	152
<b>10</b>	<b>Méthodes itératives statistiques</b>	<b>153</b>
10.1	Méthode des moments . . . . .	154
10.2	Méthode ML du maximum de vraisemblance . . . . .	155
10.3	Méthode EM d'espérance-maximisation . . . . .	158
10.4	Méthode MLEM . . . . .	164
10.5	Méthode OSEM . . . . .	166
<b>11</b>	<b>Méthodes bayésiennes</b>	<b>167</b>
11.1	Approches bayésiennes . . . . .	167
11.2	Calcul de lois <i>a posteriori</i> . . . . .	169
11.3	Modèles bayésiens linéaires . . . . .	173
11.4	Choix des lois <i>a priori</i> . . . . .	174
11.4.1	Lois conjuguées . . . . .	174
11.4.2	Lois impropres . . . . .	175
11.4.3	Lois de Jeffreys . . . . .	175
11.5	Maximum d'entropie . . . . .	177
<b>12</b>	<b>Simulation de radiothérapie par Monte-Carlo</b>	<b>181</b>
12.1	Modélisation des trajectoires . . . . .	182
12.2	Interaction photon-matière . . . . .	184
12.2.1	Diffusion élastique de Rayleigh . . . . .	184
12.2.2	Diffusion inélastique de Compton . . . . .	185
12.2.3	Absorption photoélectrique . . . . .	186
12.2.4	Création de paires électron-positon . . . . .	187
12.3	Algorithme de propagation en milieu inhomogène . . . . .	187
<b>13</b>	<b>Imagerie par résonance magnétique</b>	<b>191</b>
13.1	Le moment magnétique . . . . .	192
13.2	La précession de Larmor . . . . .	193
13.3	Phénomènes de relaxation . . . . .	193
13.4	Équations de Bloch . . . . .	194
13.5	Champ radiofréquence . . . . .	196
13.6	Impulsions radiofréquences . . . . .	197

---

13.7	Localisation et gradients de champ . . . . .	198
13.8	Équations de Bloch-Torrey . . . . .	200
13.9	Échos de spin . . . . .	203
13.10	Reconstruction de l'image . . . . .	205
<b>14</b>	<b>Traitement de l'image</b>	<b>207</b>
14.1	L'image numérique . . . . .	207
14.2	Représentation des couleurs . . . . .	208
14.3	Formats de fichiers . . . . .	210
14.4	Filtrage linéaire . . . . .	211
14.4.1	Traitement du flou . . . . .	212
14.4.2	Détection de contours . . . . .	213
14.4.3	Détection de points d'intérêt . . . . .	216
<b>15</b>	<b>Segmentation de l'image</b>	<b>217</b>
15.1	Segmentation par seuillage . . . . .	218
15.1.1	Méthode d'Otsu . . . . .	218
15.1.2	Méthode des k-moyennes . . . . .	219
15.2	Segmentation par contours . . . . .	219
15.2.1	Filtre de Canny . . . . .	220
15.2.2	Filtre de Deriche . . . . .	221
15.2.3	Filtre de Shen-Castan . . . . .	223
15.2.4	Contours actifs . . . . .	223
15.3	Segmentation par régions . . . . .	225
15.3.1	Méthode de croissance de régions . . . . .	225
15.3.2	Méthode de découpe-fusion . . . . .	226
15.4	Segmentation par optimisation stochastique . . . . .	226
15.4.1	Fonctionnelle de Mumford et Shah . . . . .	226
15.4.2	Méthodes markoviennes . . . . .	228
15.4.3	Méthode du recuit simulé . . . . .	230
	<b>Bibliographie</b>	<b>231</b>