

Table des matières

Avant-propos	v
Introduction	xv
I Les différentes classes de solitons	1
1 L'équation de Korteweg-de Vries	3
1.1 La découverte	3
1.1.1 Les observations de John Scott Russell	3
1.1.2 L'interprétation de Korteweg-de Vries	8
1.1.3 Propriétés de l'équation de Korteweg-de Vries et de ses solutions	9
1.2 Les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries	14
1.2.1 Solutions à profil constant	14
1.2.2 Solutions multisolitons	17
1.3 Relations de conservation	20
1.4 Lignes électriques non-linéaires	21
1.4.1 Description du problème physique	21
1.4.2 Approximation linéaire. Relation de dispersion	23
1.4.3 L'équation non-linéaire dans la limite des milieux continus	24
1.4.4 Les solutions quasi-solitons de la chaîne électrique	26
1.4.5 La limite Korteweg-de Vries pour la chaîne électrique	27
1.5 Ondes de pression sanguine	29
1.6 Ondes internes en océanographie	35
1.7 La généralité de l'équation de Korteweg-de Vries	37
2 L'équation de sine-Gordon	39
2.1 Un exemple mécanique simple : la chaîne de pendules couplés	39

2.2	Les solutions de l'équation de sine-Gordon	41
2.2.1	Topologie du paysage énergétique	41
2.2.2	Les solutions de faible amplitude : la limite linéaire	43
2.2.3	Solutions solitons	44
2.2.4	Énergie du soliton	48
2.2.5	Solutions multisolitons	50
2.2.6	La solution breather	52
2.3	Étude des jonctions Josephson longues	56
2.3.1	Équation dynamique de la jonction	57
2.3.2	Applications aux propriétés d'une jonction Josephson	63
2.3.3	Signification physique du soliton : fluxon	65
2.4	Autres exemples de solitons topologiques	66
2.4.1	Le modèle ϕ^4	67
2.4.2	Le modèle double sine-Gordon (DSG)	68
3	L'équation de Schrödinger non-linéaire	71
3.1	Ondes non-linéaires dans la chaîne de pendules	72
3.2	Propriétés de l'équation de NLS	76
3.2.1	La solution soliton de l'équation de NLS	77
3.2.2	La localisation de l'énergie par instabilité modulationnelle	80
3.2.3	Relation entre le breather de SG et le soliton de NLS	83
3.3	Relations de conservation	85
3.3.1	Le lagrangien de NLS	85
3.3.2	L'hamiltonien de NLS	86
3.4	Théorème de Noether	89
3.4.1	Rappel du théorème	89
3.4.2	Application à l'équation NLS	90
3.5	Lignes électriques non-linéaires	91
3.6	Solitons dans les fibres optiques	92
3.6.1	Origine de la non-linéarité : polarisation non-linéaire	92
3.6.2	La structure du champ électrique dans la fibre	95
3.6.3	La propagation non-linéaire le long de la fibre	98
3.6.4	La confrontation avec l'expérience	103
3.6.5	Application aux communications par fibre optique	105
3.7	Auto-focalisation en optique	106
3.8	Conclusion	111
4	Modélisation : ondes dans un plasma	113
4.1	Introduction	113
4.2	Le plasma	114
4.2.1	Physique d'un plasma	114
4.2.2	Températures et équations d'état	116
4.2.3	Passage à des équations sans dimension	118
4.3	Étude de la dynamique linéaire	119

4.4	Étude non-linéaire	120
4.4.1	Le plasma peut être décrit par l'équation de KdV . . .	120
4.4.2	La relation de dispersion	123
4.5	Obtention de l'équation de NLS	123
4.6	Observations expérimentales	127
4.7	Discussion	129
4.7.1	Les ondes hydrodynamiques	130
4.7.2	Les lignes électriques	131
II Méthodes mathématiques d'étude des solitons		135
Avant-propos		137
5	Linéarisation autour du soliton	139
5.1	Spectre des excitations d'un soliton sine-Gordon	139
5.2	Application : perturbations du soliton	142
5.2.1	Présentation	142
5.2.2	Exemple : réponse du soliton à une force extérieure en présence de dissipation	143
5.3	Spectre des excitations d'un soliton ϕ^4	148
6	Méthode des coordonnées collectives	155
6.1	La méthode du lagrangien effectif	155
6.2	Introduction d'une seconde coordonnée collective	159
7	La méthode inverse de diffusion	165
7.1	La méthode inverse pour l'équation de Korteweg-de Vries . . .	165
7.1.1	Le principe de la méthode inverse	165
7.1.2	L'inversion des données de diffusion	167
7.1.3	L'évolution temporelle des données de diffusion	169
7.1.4	Exemples d'applications	172
7.2	« Analyse de Fourier non-linéaire »	175
7.2.1	Une étape de la généralisation : la méthode de Lax . .	176
7.2.2	La méthode (AKNS) Ablowitz-Kaup-Newell-Segur . . .	179
7.2.3	La méthode inverse et la théorie des perturbations . . .	181
III Exemples en physique des solides		183
Avant-propos		185
8	Le problème de Fermi-Pasta-Ulam	187

14.2	Étude des équations de Davydov	320
14.3	Le soliton de Davydov existe-t-il ?	323
14.4	Le cristal d'acétanilide	324
15	Dynamique non-linéaire de l'ADN	331
15.1	Un modèle simple pour l'ADN	332
15.1.1	Structure statique de l'ADN	332
15.1.2	Les différents processus dynamiques	333
15.1.3	Le modèle	338
15.2	Dynamique non-linéaire de l'ADN	343
15.2.1	Équations adimensionnées	343
15.2.2	Solution non-linéaire des équations du mouvement	344
15.2.3	Dynamique du modèle en contact avec un bain thermique	347
15.3	Physique statistique de la dénaturation	351
15.3.1	Étude qualitative de la transition de phase	352
15.3.2	Le problème associé de l'oscillateur de Morse	355
15.3.3	Le paramètre d'ordre pour l'ADN	356
15.4	Une autre approche de la dénaturation	358
15.4.1	La paroi de domaine	358
15.4.2	Fluctuations autour de la paroi de domaine	360
15.4.3	Énergie libre de la paroi de domaine	362
15.4.4	Discussion	365
	Conclusion : Les solitons existent-ils ?	369
	Appendices	373
A	Ondes hydrodynamiques	375
A.1	Équations de base et conditions aux limites	375
A.1.1	Condition à la limite cinématique	376
A.1.2	Condition à la limite physique	377
A.2	Formulation mathématique du problème	377
A.2.1	Les équations de définition du problème	378
A.2.2	Pression statique et pression dynamique	379
A.2.3	Équations sans dimension	379
A.2.4	Hypothèses d'échelle	380
A.2.5	Le potentiel des vitesses	381
A.3	Étude de la limite linéaire	382
A.4	L'équation non-linéaire en eau peu profonde	383
B	Mécanique d'un système continu	387
B.1	Formulation lagrangienne	387
B.2	Formulation hamiltonienne	389

<i>Table des matières</i>	xiii
C États cohérents de l'oscillateur harmonique	391
Table des portraits	395
Bibliographie	397
Index	407