

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	vii
Remerciements	xi
Avertissement	xiii
Partie I Anneaux et modules	1
I Généralités sur les anneaux	3
1 Définitions – Exemples	3
2 Idéaux – Morphismes	8
3 Idéaux maximaux, idéaux premiers	15
4 Produit d’anneaux – Théorème chinois	18
5 Caractéristique – Corps premiers	20
6 Corps des fractions d’un anneau intègre	22
Thèmes de réflexion	29
TR.I.A. Étude de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	29
TR.I.B. Localisation et idéaux	31
TR.I.C. Radical, nilradical	32
II Anneaux euclidiens, principaux, factoriels	35
1 Anneaux de polynômes	35
2 Division euclidienne – Anneaux euclidiens	41
3 Anneaux principaux	43
4 Anneaux factoriels	48
5 Divisibilité	52

Thèmes de réflexion	55
TR.II.A. Exemples d’anneaux euclidiens	55
TR.II.B. Un anneau principal non euclidien	56
TR.II.C. Anneaux noethériens	57
TR.II.D. Séries formelles – Séries et polynômes de Laurent	58
III Irréductibilité des polynômes – Polynômes symétriques	61
1 Irréductibilité	61
2 Fonctions polynomiales – Racines – Dérivations – Multiplicité . . .	66
3 Résultant – Discriminant	74
4 Polynômes symétriques	77
Thèmes de réflexion	83
TR.III.A. Critère d’irréductibilité par extension	83
TR.III.B. Critère d’irréductibilité par réduction	83
IV Généralités sur les modules	87
1 Modules – Morphismes	87
2 Sous-modules	90
3 Modules quotients	91
4 Morphismes et quotients	92
5 Modules monogènes	94
6 Produit et somme	95
7 Modules libres	96
Thèmes de réflexion	101
TR.IV.A. Propriétés universelles de somme directe et produit direct	101
TR.IV.B. Algèbres – Algèbres de polynômes	102
V Modules sur un anneau principal	105
1 Modules libres – Modules de type fini	105
2 Modules de torsion	107
3 Structure des modules de type fini sur un anneau principal	109
4 Autre démonstration du théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal	118
Thèmes de réflexion	125
TR.V.A. Réduction des endomorphismes à la forme de Jordan . . .	125
TR.V.B. Calcul des facteurs invariants	127

VI	Éléments entiers et anneaux de Dedekind	129
1	Éléments entiers	130
2	Norme et trace	134
3	Application aux corps cyclotomiques	138
4	Anneaux et modules noethériens	140
5	Idéaux fractionnaires	143
6	Anneaux de Dedekind	144
7	Norme d'un idéal	148
8	Décomposition des idéaux premiers dans une extension et action du groupe de Galois	150
9	Ramification	153
	Thèmes de réflexion	161
TR.VI.A.	Quelques propriétés des anneaux de Dedekind	161
TR.VI.B.	Ramification des nombres premiers dans un corps cyclotomique	162
TR.VI.C.	Décomposition des nombres premiers dans un corps quadratique	163
TR.VI.D.	Théorème des deux carrés	165
VII	Dualité	167
1	Modules d'applications linéaires et suites exactes	167
2	Dualité	171
3	Orthogonalité	175
	Thèmes de réflexion	177
TR.VII.A.	Modules injectifs – Modules projectifs	177
TR.VII.B.	Enveloppe injective	180
TR.VII.C.	Une autre dualité	182
Partie II	Algèbre multilinéaire	185
VIII	Produit tensoriel – Algèbre tensorielle – Algèbre symétrique	187
1	Applications bilinéaires	187
2	Produit tensoriel	189
3	Commutation du produit tensoriel aux sommes directes	193
4	Associativité du produit tensoriel	196
5	Changement d'anneau de base	198
6	Produit tensoriel d'algèbres associatives	199

7	Produit tensoriel et dualité	200
8	Algèbre tensorielle	203
9	Algèbre symétrique	206
Thèmes de réflexion		209
	TR.VIII.A. Modules plats, fidèlement plats	209
	TR.VIII.B. Passage du local au global	211
	TR.VIII.C. Propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres commutatives	211
IX	Produit extérieur – Algèbre extérieure	213
1	Applications multilinéaires alternées	213
2	Déterminants	215
3	Produit extérieur	217
4	Commutation du produit extérieur aux sommes directes	221
5	Algèbre extérieure	223
Thèmes de réflexion		225
	TR.IX.A. Annulation de puissances extérieures	225
	TR.IX.B. Dérivations et formes différentielles	225
Appendice		229
1	Ensembles ordonnés	229
2	Cardinaux – Ensembles infinis	232
Bibliographie		239
Index terminologique		241