

# TABLE DES MATIÈRES

|  |            |
|--|------------|
| <b>Avant-Propos</b>  | <b>vii</b> |
| <b>I Notions de base</b>   | <b>1</b>   |
| I.1 Notion de système dynamique . . . . .                            | 1          |
| I.2 Exemples pour le temps discret . . . . .                         | 3          |
| I.2.1 Rotations du cercle . . . . .                                  | 3          |
| I.2.2 Applications dilatantes du cercle . . . . .                    | 5          |
| I.2.3 Endomorphismes du tore . . . . .                               | 6          |
| I.3 Exemples pour le temps continu . . . . .                         | 9          |
| I.3.1 Équations différentielles autonomes . . . . .                  | 9          |
| I.3.2 Temps discret et temps continu . . . . .                       | 13         |
| I.3.3 Équations différentielles sur le tore $\mathbb{T}^2$ . . . . . | 15         |
| I.4 Ensembles invariants . . . . .                                   | 16         |
| I.5 Exercices . . . . .  | 20         |
| <b>II Dynamique topologique</b>                                      | <b>23</b>  |
| II.1 Systèmes dynamiques topologiques . . . . .                      | 23         |
| II.2 Ensembles limites . . . . .                                     | 25         |
| II.2.1 Temps discret . . . . .                                       | 25         |
| II.2.2 Temps continu . . . . .                                       | 30         |
| II.3 Récurrence topologique . . . . .                                | 34         |
| II.3.1 Transitivité topologique . . . . .                            | 34         |
| II.3.2 Mélange topologique . . . . .                                 | 36         |
| II.4 Entropie topologique . . . . .                                  | 39         |
| II.4.1 Notions de base et exemples . . . . .                         | 39         |
| II.4.2 Invariance topologique . . . . .                              | 41         |
| II.4.3 Caractérisations alternatives . . . . .                       | 42         |

|            |         |  |            |
|------------|---------|--|------------|
|            | II.4.4  | Applications expansives . . . . .                              | 46         |
|            | II.5    | Exercices . . . . .  | 51         |
| <b>III</b> |         | <b>Systèmes dynamiques en basse dimension</b>                  | <b>55</b>  |
|            | III.1   | Homéomorphismes du cercle . . . . .                            | 55         |
|            | III.1.1 | Relèvements . . . . .  | 55         |
|            | III.1.2 | Nombre de rotation . . . . .                                   | 59         |
|            | III.1.3 | Nombre de rotation rationnel . . . . .                         | 61         |
|            | III.1.4 | Nombre de rotation irrationnel . . . . .                       | 64         |
|            | III.2   | Difféomorphismes du cercle . . . . .                           | 68         |
|            | III.3   | Applications de l'intervalle . . . . .                         | 72         |
|            | III.3.1 | Existence de points périodiques . . . . .                      | 72         |
|            | III.3.2 | Le théorème de Sharkovsky . . . . .                            | 74         |
|            | III.4   | Le théorème de Poincaré-Bendixson . . . . .                    | 80         |
|            | III.5   | Exercices . . . . .  | 82         |
| <b>IV</b>  |         | <b>Dynamique hyperbolique I</b>                                | <b>85</b>  |
|            | IV.1    | Ensembles hyperboliques . . . . .                              | 85         |
|            | IV.1.1  | Notions de base . . . . .                                      | 85         |
|            | IV.1.2  | Fer à cheval de Smale . . . . .                                | 87         |
|            | IV.1.3  | Continuité des espaces stables et instables . . . . .          | 92         |
|            | IV.2    | Ensembles hyperboliques et cônes invariants . . . . .          | 96         |
|            | IV.2.1  | Cônes et caractérisation des ensembles hyperboliques . . . . . | 96         |
|            | IV.2.2  | Existence de cônes invariants . . . . .                        | 98         |
|            | IV.2.3  | Critère d'hyperbolicité . . . . .                              | 101        |
|            | IV.3    | Stabilité des ensembles hyperboliques . . . . .                | 104        |
|            | IV.4    | Exercices . . . . .  | 106        |
| <b>V</b>   |         | <b>Dynamique hyperbolique II</b>                               | <b>109</b> |
|            | V.1     | Comportement près d'un point fixe hyperbolique . . . . .       | 109        |
|            | V.1.1   | Le théorème de Grobman-Hartman . . . . .                       | 109        |
|            | V.1.2   | Le théorème de Hadamard-Perron . . . . .                       | 117        |
|            | V.2     | Variétés invariantes stables et instables . . . . .            | 128        |
|            | V.2.1   | Existence de variétés invariantes . . . . .                    | 128        |
|            | V.2.2   | Structure produit locale . . . . .                             | 131        |
|            | V.3     | Flots géodésiques . . . . .                                    | 134        |
|            | V.3.1   | Géométrie hyperbolique . . . . .                               | 134        |
|            | V.3.2   | Quotients par isométries . . . . .                             | 139        |
|            | V.3.3   | Flot géodésique . . . . .                                      | 141        |
|            | V.3.4   | Flots hyperboliques . . . . .                                  | 143        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| V.4        | Exercices . . . . .                                       | 147        |
| <b>VI</b>  | <b>Dynamique symbolique</b>                               | <b>149</b> |
| VI.1       | Notions de base . . . . .                                 | 149        |
| VI.1.1     | Espace de suites et décalage . . . . .                    | 149        |
| VI.1.2     | Entropie topologique . . . . .                            | 151        |
| VI.1.3     | Suites bilatérales . . . . .                              | 152        |
| VI.2       | Exemples de codages . . . . .                             | 153        |
| VI.2.1     | Applications dilatantes . . . . .                         | 154        |
| VI.2.2     | Applications quadratiques . . . . .                       | 157        |
| VI.2.3     | Fer à cheval de Smale . . . . .                           | 159        |
| VI.3       | Chaînes de Markov topologiques . . . . .                  | 160        |
| VI.3.1     | Notions de base . . . . .                                 | 160        |
| VI.3.2     | Points périodiques . . . . .                              | 162        |
| VI.3.3     | Entropie topologique . . . . .                            | 164        |
| VI.3.4     | Transitivité et mélange topologiques . . . . .            | 165        |
| VI.4       | Fers à cheval et chaînes de Markov topologiques . . . . . | 169        |
| VI.5       | Fonctions zêta . . . . .                                  | 171        |
| VI.6       | Exercices . . . . .                                       | 174        |
| <b>VII</b> | <b>Théorie ergodique</b>                                  | <b>177</b> |
| VII.1      | Notions de théorie de la mesure . . . . .                 | 177        |
| VII.2      | Mesures invariantes . . . . .                             | 180        |
| VII.3      | Récurrence non triviale . . . . .                         | 183        |
| VII.4      | Le théorème ergodique . . . . .                           | 185        |
| VII.5      | Exposants de Lyapunov . . . . .                           | 190        |
| VII.6      | Entropie métrique . . . . .                               | 193        |
| VII.7      | Exercices . . . . .                                       | 196        |
|            | <b>Bibliographie</b>                                      | <b>199</b> |
|            | <b>Index</b>  | <b>201</b> |