

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-Propos</b>	<b>vii</b>
<b>Abréviations et Notations</b>	<b>xi</b>
<b>1 Énoncés</b>	<b>1</b>
1.1 Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel . . . . .	1
1.2 Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré)	3
1.3 Convexité et différentiabilité . . . . .	5
1.4 Un théorème de Rolle approché. Différentiation d'applications radiales. Un système différentiel linéaire . . . . .	7
1.5 Différentielle d'une fonctionnelle intégrale. Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs matricielles . . . . .	9
1.6 Opérateurs de Nemycki . . . . .	11
1.7 Différentiabilité (et caractère $\mathcal{C}^1$ ) <i>via</i> les différentielles partielles. Calcul différentiel (basique, Théorème des accroissements finis) . . . . .	12
1.8 Dérivée de $t \mapsto \exp((1-t)A) \exp(tB)$ . Formules de Taylor sur la fonction déterminant. Conditions d'extrémalité du deuxième ordre sur un espace de Hilbert . . . . .	13
1.9 Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre en l'absence de différentiabilité . . . . .	16
1.10 Méthode de descente le long du gradient . . . . .	18
1.11 Conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes d'inégalité . . . . .	20
1.12 Différentielle de Gâteaux. Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	23

1.13	Minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte d'inégalité convexe . . . . .	25
1.14	Minimisation d'une fonction convexe sur un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	27
1.15	Détermination et nature des points critiques d'une fonction. Différentiation de l'application exponentielle . . . . .	29
1.16	Calcul différentiel d'ordre supérieur. Différentielle d'ordre 2 d'une application composée . . . . .	31
1.17	Résolution d'équations par la méthode de Newton I . . . . .	33
1.18	Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton II. Minimisation d'une fonction convexe par la méthode du gradient . . . . .	35
1.19	Un théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs vectorielles. Un problème de maximisation. Sensibilité des racines simples d'un polynôme . . . . .	37
1.20	Conditions d'optimalité exprimées à l'aide du cône tangent à l'ensemble des contraintes. Applications à un problème variationnel . . . . .	39
1.21	Problème variationnel de minimisation d'une fonctionnelle du Calcul des variations . . . . .	43
1.22	Calcul différentiel d'ordre 2 sur un espace de matrices. Surjectivité de la normale unitaire à une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ . Ensemble des solutions possibles d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$ . . . . .	45
1.23	Descente continue le long du gradient. Projection sur une surface de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	47
1.24	Une surface conique de $\mathbb{R}^3$ . Monotonie des solutions d'équations différentielles scalaires autonomes. Une équation différentielle vectorielle linéaire . . . . .	49
1.25	Un problème aux limites par le Théorème des fonctions implicites. Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques . . . . .	51
1.26	Du Théorème des fonctions implicites au Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	53
1.27	Intégrales premières. Utilisation du Théorème des fonctions implicites. Une équation aux dérivées partielles . . . . .	54

1.28	Différentiabilité de la fonction distance à un ensemble. Une équation différentielle scalaire non linéaire du deuxième ordre. Système différentiel linéaire où les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de $t$ . . . . .	56
1.29	Équations différentielles scalaires. Équation différentielle vectorielle linéaire à coefficients périodiques . . . . .	59
1.30	Distance de l'origine à une courbe de $\mathbb{R}^3$ . Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle scalaire . . . . .	60
1.31	Équation différentielle $y' = xy^2$ . Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle . . . . .	63
1.32	Formule de Thermodynamique sur les dérivées partielles. Équation différentielle $x' = t \sin x$ . Équation différentielle linéaire à coefficients périodiques . . . . .	65
1.33	Équations différentielles non linéaires. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire sous la condition de Liapounov . . . . .	68
1.34	Une équation différentielle scalaire autonome. Calcul de la hauteur d'une courbe. Différentiation de la fonction déterminant . . . . .	70
1.35	Équations différentielles avec retard . . . . .	72
1.36	Méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles . . . . .	74
<b>2</b>	<b>Solutions</b> . . . . .	<b>77</b>
2.1	Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel . . . . .	77
2.2	Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré) . . . . .	82
2.3	Convexité et différentiabilité . . . . .	85
2.4	Un théorème de Rolle approché. Différentiation d'applications radiales. Un système différentiel linéaire . . . . .	88
2.5	Différentielle d'une fonctionnelle intégrale. Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs matricielles . . . . .	92
2.6	Opérateurs de Nemycki . . . . .	98
2.7	Différentiabilité (et caractère $\mathcal{C}^1$ ) <i>via</i> les différentielles partielles. Calcul différentiel (basique, Théorème des accroissements finis) . . . . .	99
2.8	Dérivée de $t \mapsto \exp((1-t)A) \exp(tB)$ . Formules de Taylor sur la fonction déterminant. Conditions d'extrémalité du deuxième ordre sur un espace de Hilbert . . . . .	104

2.9	Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre en l'absence de différentiabilité . . . . .	110
2.10	Méthode de descente le long du gradient . . . . .	112
2.11	Conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes d'inégalité . . . . .	116
2.12	Différentielle de Gâteaux. Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	119
2.13	Minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte d'inégalité convexe . . . . .	122
2.14	Minimisation d'une fonction convexe sur un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	126
2.15	Détermination et nature des points critiques d'une fonction. Différentiation de l'application exponentielle . . . . .	132
2.16	Calcul différentiel d'ordre supérieur. Différentielle d'ordre 2 d'une application composée . . . . .	136
2.17	Résolution d'équations par la méthode de Newton I . . . . .	140
2.18	Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton II. Minimisation d'une fonction convexe par la méthode du gradient . . . . .	144
2.19	Un théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs vectorielles. Un problème de maximisation. Sensibilité des racines simples d'un polynôme . . . . .	147
2.20	Conditions d'optimalité exprimées à l'aide du cône tangent à l'ensemble des contraintes. Applications à un problème variationnel . . . . .	153
2.21	Problème variationnel de minimisation d'une fonctionnelle du Calcul des variations . . . . .	158
2.22	Calcul différentiel d'ordre 2 sur un espace de matrices. Surjectivité de la normale unitaire à une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ . Ensemble des solutions possibles d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$ . . . . .	163
2.23	Descente continue le long du gradient. Projection sur une surface de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	166
2.24	Une surface conique de $\mathbb{R}^3$ . Monotonie des solutions d'équations différentielles scalaires autonomes. Une équation différentielle vectorielle linéaire . . . . .	170
2.25	Un problème aux limites par le Théorème des fonctions implicites. Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques . . . . .	174

2.26	Du Théorème des fonctions implicites au Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	178
2.27	Intégrales premières. Utilisation du Théorème des fonctions implicites. Une équation aux dérivées partielles . . . . .	180
2.28	Différentiabilité de la fonction distance à un ensemble. Une équation différentielle scalaire non linéaire du deuxième ordre. Système différentiel linéaire où les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de $t$ . . . . .	184
2.29	Équations différentielles scalaires. Équation différentielle vectorielle linéaire à coefficients périodiques . . . . .	189
2.30	Distance de l'origine à une courbe de $\mathbb{R}^3$ . Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle scalaire . . . . .	191
2.31	Équation différentielle $y' = xy^2$ . Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle . . . . .	195
2.32	Formule de Thermodynamique sur les dérivées partielles. Équation différentielle $x' = t \sin x$ . Équation différentielle linéaire à coefficients périodiques . . . . .	200
2.33	Équations différentielles non linéaires. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire sous la condition de Liapounov . . . . .	205
2.34	Une équation différentielle scalaire autonome. Calcul de la hauteur d'une courbe. Différentiation de la fonction déterminant . . . . .	207
2.35	Équations différentielles avec retard . . . . .	214
2.36	Méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles . . . . .	218

**Bibliographie****223**