

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>xiii</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Espace des phases, portrait de phase . . . . .	1
1.2 Stabilité d'un point fixe . . . . .	3
1.2.1 Points fixes . . . . .	3
1.2.2 Stabilité linéaire d'un point fixe . . . . .	3
1.2.3 Stabilité d'un point fixe non hyperbolique . . . . .	6
1.3 Bifurcations . . . . .	6
1.3.1 Définition . . . . .	6
1.3.2 Bifurcation nœud-col . . . . .	7
1.3.3 Bifurcation fourche . . . . .	9
1.3.4 Bifurcation de Hopf . . . . .	12
1.4 Illustrations hydrodynamiques . . . . .	13
1.4.1 Stabilité d'un film de savon . . . . .	13
1.4.2 Stabilité d'une bulle . . . . .	17
1.4.3 Stabilité d'une suspension colloïdale . . . . .	21
1.4.4 Convection dans un anneau . . . . .	23
1.4.5 Double diffusion thermique et massique . . . . .	27
1.5 Non-normalité de l'opérateur linéarisé . . . . .	30
1.5.1 Croissance algébrique transitoire . . . . .	30
1.5.2 Excitation optimale d'un mode instable . . . . .	34
1.6 Exercices . . . . .	37
1.6.1 Oscillateur harmonique forcé . . . . .	37
1.6.2 Particule dans un potentiel à deux puits . . . . .	37
1.6.3 Avalanches dans un tas de sable . . . . .	38
1.6.4 Transition de phase du second ordre . . . . .	39
1.6.5 Transition de phase du premier ordre . . . . .	39
1.6.6 Problème modèle de l'instabilité d'un film de savon . . . . .	40
1.6.7 Croissance transitoire et perturbation optimale . . . . .	40

1.6.8	Excitation optimale d'un mode instable . . . . .	41
1.6.9	Bifurcation sous-critique <i>via</i> une croissance transitoire . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Instabilités de fluides au repos</b>	<b>43</b>
2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Instabilité gravitationnelle de Jeans . . . . .	44
2.2.1	Ondes acoustiques . . . . .	44
2.2.2	Effet de la gravitation aux grandes échelles . . . . .	47
2.2.3	Discussion . . . . .	51
2.3	Instabilité interfaciale de Rayleigh-Taylor . . . . .	53
2.3.1	Analyse dimensionnelle . . . . .	53
2.3.2	Équations des perturbations . . . . .	55
2.3.3	Linéarisation, modes normaux et relation de dispersion . . . . .	59
2.3.4	Discussion . . . . .	60
2.3.5	Effets des parois et de la viscosité . . . . .	61
2.4	Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau . . . . .	64
2.4.1	Description . . . . .	64
2.4.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	66
2.5	Instabilité thermique de Rayleigh-Bénard . . . . .	68
2.5.1	Description . . . . .	68
2.5.2	Mécanisme de l'instabilité ( $Pr \gg 1$ ) . . . . .	71
2.5.3	Étude de stabilité dans l'approximation de Boussinesq . . . . .	72
2.6	Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni . . . . .	76
2.6.1	Description . . . . .	76
2.6.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	77
2.7	Discussion . . . . .	78
2.7.1	Échelles caractéristiques et sélection de modes . . . . .	78
2.7.2	Caractéristiques générales d'une instabilité à seuil . . . . .	79
2.8	Exercices . . . . .	80
2.8.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor entre parois . . . . .	80
2.8.2	Instabilité d'un film mince suspendu . . . . .	81
2.8.3	Instabilité de Saffman-Taylor en milieu poreux . . . . .	81
2.8.4	Instabilité de Darrieus-Landau d'un front de flamme . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Écoulements ouverts : notions de base</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	87
3.1.1	Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes . . . . .	87
3.1.2	Stabilité au sens de Lyapunov, stabilité asymptotique . . . . .	91
3.1.3	Stabilité et instabilité linéaires . . . . .	92
3.2	Critère de stabilité linéaire . . . . .	95
3.2.1	Évolution spatio-temporelle d'une perturbation générale . . . . .	95
3.2.2	Illustration . . . . .	97
3.3	Instabilités convective et absolue . . . . .	98
3.3.1	Critère d'instabilité absolue . . . . .	98
3.3.2	Branches spatiales d'une instabilité convective . . . . .	99

3.3.3	Illustrations . . . . .	99
3.3.4	Relation de Gaster . . . . .	100
3.4	Exercices . . . . .	101
3.4.1	Dispersion d'un paquet d'ondes . . . . .	101
3.4.2	Branches spatiales d'une instabilité convective . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Instabilité non visqueuse des écoulements parallèles</b>	<b>103</b>
4.1	Introduction . . . . .	103
4.2	Résultats généraux . . . . .	106
4.2.1	Équations linéarisées des petites perturbations . . . . .	106
4.2.2	Théorème de Squire . . . . .	108
4.2.3	Équation de Rayleigh des perturbations bidimensionnelles . . . . .	109
4.2.4	Théorème du point d'inflexion de Rayleigh . . . . .	112
4.2.5	Conditions de saut entre deux couches de vortacité uniforme . . . . .	113
4.3	Instabilité d'une couche de mélange . . . . .	115
4.3.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une feuille de vortacité . . . . .	115
4.3.2	Cas d'une épaisseur de vortacité non nulle . . . . .	120
4.3.3	Effets de la viscosité . . . . .	123
4.4	Instabilité centrifuge de Couette-Taylor . . . . .	124
4.4.1	Introduction . . . . .	124
4.4.2	Maurice Couette (1890) et Geoffrey Taylor (1923) . . . . .	125
4.4.3	Critère d'instabilité pour un écoulement non visqueux . . . . .	127
4.4.4	Effet de la viscosité – Nombre de Taylor . . . . .	128
4.5	Exercices . . . . .	132
4.5.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec gravité et capillarité . . . . .	132
4.5.2	Effet de parois sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . . .	132
4.5.3	Ondes internes dans un écoulement cisailé stratifié en densité . . . . .	132
4.5.4	Instabilité de l'écoulement non visqueux de Couette-Taylor . . . . .	134
4.5.5	Instabilité d'un film visqueux . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Instabilité visqueuse des écoulements parallèles</b>	<b>137</b>
5.1	Introduction . . . . .	137
5.1.1	Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube . . . . .	138
5.1.2	Instabilité d'une couche limite . . . . .	140
5.2	Résultats généraux . . . . .	142
5.2.1	Équations linéarisées des perturbations . . . . .	142
5.2.2	Théorème de Squire . . . . .	143
5.2.3	Équation d'Orr-Sommerfeld . . . . .	145
5.2.4	Mécanisme de l'instabilité visqueuse . . . . .	148
5.3	Écoulement de Poiseuille plan . . . . .	150

5.3.1	Stabilité marginale, modes propres . . . . .	150
5.3.2	Étude expérimentale pour de petites perturbations . . .	151
5.3.3	Croissance transitoire . . . . .	156
5.4	Écoulement de Poiseuille en tube . . . . .	157
5.5	Couche limite sur une plaque plane . . . . .	158
5.5.1	Mise en évidence expérimentale . . . . .	158
5.5.2	Analyse locale . . . . .	159
5.5.3	Modes propres, stabilité marginale, effets non parallèles	159
5.5.4	Croissance transitoire . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Instabilités à faible nombre de Reynolds</b>	<b>165</b>
6.1	Introduction . . . . .	165
6.2	Films tombant sur un plan incliné . . . . .	168
6.2.1	Écoulement de base et échelles caractéristiques . . . . .	169
6.2.2	Formulation du problème de stabilité . . . . .	170
6.2.3	Instabilité interfaciale de grande longueur d'onde . . . . .	172
6.2.4	Mécanisme de l'instabilité interfaciale . . . . .	176
6.2.5	Étude expérimentale . . . . .	179
6.2.6	Instabilité à faible pente du mode de paroi . . . . .	184
6.3	Films liquides cisailés . . . . .	185
6.3.1	Introduction . . . . .	185
6.3.2	Mécanisme de l'instabilité des ondes longues . . . . .	186
6.3.3	Ondes « moins longues » . . . . .	190
6.4	Exercices . . . . .	191
6.4.1	Inclinaison critique d'un film tombant . . . . .	191
6.4.2	Conditions aux limites sur une interface libre . . . . .	191
6.4.3	Résolution pour les ondes longues . . . . .	191
<b>7</b>	<b>Avalanches, rides et dunes</b>	<b>193</b>
7.1	Introduction . . . . .	193
7.2	Avalanches . . . . .	194
7.2.1	Dynamique d'un écoulement granulaire dense . . . . .	195
7.2.2	Stabilité . . . . .	197
7.2.3	Expériences . . . . .	198
7.3	Transport de sédiments par un écoulement . . . . .	201
7.3.1	Analyse dimensionnelle . . . . .	201
7.3.2	Vitesse des grains mobiles . . . . .	201
7.3.3	Densité de grains mobiles . . . . .	203
7.3.4	Flux de grains . . . . .	204
7.3.5	Effets de relaxation . . . . .	204
7.4	Rides et dunes : première analyse dimensionnelle . . . . .	207
7.4.1	Rides et dunes éoliennes . . . . .	207
7.4.2	Rides et dunes aquatiques . . . . .	208
7.5	Rides aquatiques sous un écoulement continu . . . . .	210
7.5.1	Le modèle classique . . . . .	210

7.5.2	Phénomènes de relaxation . . . . .	214
7.5.3	Discussion . . . . .	217
7.6	Rides aquatiques sous un écoulement oscillant . . . . .	223
7.6.1	Introduction . . . . .	223
7.6.2	Observations . . . . .	224
7.6.3	Mécanisme d'initiation des rides à grains roulant . . . . .	227
7.6.4	Discussion . . . . .	231
7.7	Dunes aquatiques : un modèle élémentaire . . . . .	232
7.7.1	Introduction . . . . .	232
7.7.2	Modélisation et écoulement de base . . . . .	232
7.7.3	Stabilité sur un fond rigide . . . . .	234
7.7.4	Stabilité sur un fond érodable . . . . .	235
7.8	Exercices . . . . .	238
7.8.1	Dunes : coefficient de frottement constant . . . . .	238
7.8.2	Dunes : coefficient de frottement non constant . . . . .	238
<b>8</b>	<b>Dynamique non linéaire à petit nombre de degrés de liberté</b>	<b>239</b>
8.1	Introduction . . . . .	239
8.2	Oscillateurs non linéaires . . . . .	242
8.2.1	Oscillateur fortement dissipatif dans un potentiel à deux puits . . . . .	243
8.2.2	Oscillateur de Van der Pol : saturation de l'amplitude . . . . .	245
8.2.3	Oscillateur de Duffing : correction de la fréquence . . . . .	247
8.2.4	Oscillateurs forcés . . . . .	251
8.3	Systèmes à petit nombre de degrés de liberté . . . . .	253
8.3.1	Équation modèle . . . . .	253
8.3.2	Équations d'amplitude . . . . .	254
8.3.3	Réduction à la dynamique du mode marginal au voisinage du seuil . . . . .	254
8.4	Illustration : instabilité d'une interface cisailée . . . . .	256
8.5	Exercices . . . . .	260
8.5.1	Oscillateur de Van der Pol-Duffing . . . . .	260
8.5.2	Oscillateur de Van der Pol – Restabilisation . . . . .	260
8.5.3	Oscillateur de Van der Pol – Accrochage de fréquence . . . . .	261
8.5.4	Oscillateur de Van der Pol soumis à un forçage constant . . . . .	261
8.5.5	Oscillateur paramétrique . . . . .	262
8.5.6	Dynamique faiblement non linéaire de l'équation KS-KdV . . . . .	263
<b>9</b>	<b>Dynamique non linéaire d'une onde dispersive</b>	<b>265</b>
9.1	Introduction . . . . .	265
9.2	Instabilité des ondes de gravité . . . . .	266
9.2.1	Ondes de Stokes . . . . .	266
9.2.2	Instabilité de Benjamin-Feir . . . . .	269

9.3	Instabilité par interactions résonnantes . . . . .	272
9.3.1	Problème modèle . . . . .	272
9.3.2	Onde non linéaire de Klein-Gordon . . . . .	273
9.3.3	Instabilité d'une onde non linéaire monochromatique . . . . .	275
9.4	Instabilité vis-à-vis de modulations . . . . .	277
9.4.1	Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes : équation d'enveloppe . . . . .	278
9.4.2	Dynamique non linéaire : l'équation de Schrödinger . . . . .	279
9.4.3	Stabilité d'une onde quasi monochromatique . . . . .	280
9.4.4	Interprétation en termes d'instabilité de phase . . . . .	282
9.4.5	Dérivation de l'équation NLS pour l'onde de Klein-Gordon . . . . .	282
9.5	Retour sur les résonances . . . . .	284
9.6	Exercices . . . . .	285
9.6.1	Onde non linéaire incluant un harmonique (1) . . . . .	285
9.6.2	Onde non linéaire incluant un harmonique (2) . . . . .	286
9.6.3	Onde non linéaire de Korteweg-de Vries . . . . .	287
<b>10</b>	<b>Dynamique non linéaire des systèmes dissipatifs</b>	<b>289</b>
10.1	Introduction . . . . .	289
10.2	Dynamique faiblement non linéaire . . . . .	290
10.2.1	Évolution linéaire d'un paquet d'ondes . . . . .	290
10.2.2	Effets faiblement non linéaires : équation de Ginzburg-Landau . . . . .	292
10.2.3	Exemple de dérivation de l'équation de Ginzburg-Landau . . . . .	293
10.3	Saturation de l'instabilité primaire . . . . .	294
10.4	Instabilité secondaire d'Eckhaus . . . . .	295
10.4.1	Critère d'instabilité . . . . .	295
10.4.2	Interprétation en termes de dynamique de la phase . . . . .	296
10.4.3	Illustrations expérimentales . . . . .	298
10.5	Instabilité d'une onde propagative . . . . .	300
10.5.1	Évolution d'un paquet d'ondes . . . . .	301
10.5.2	Onde non linéaire . . . . .	302
10.5.3	Instabilité de Benjamin-Feir-Eckhaus . . . . .	303
10.5.4	Ondes de Tollmien-Schlichting et transition à la turbulence . . . . .	305
10.6	Couplage avec un champ à grande échelle . . . . .	307
10.6.1	Invariance galiléenne et lois de conservation . . . . .	307
10.6.2	Équations d'évolution couplées . . . . .	308
10.6.3	Stabilité des ondes . . . . .	310
10.6.4	Illustration expérimentale . . . . .	310
10.7	Exercices . . . . .	313

10.7.1	Dérivation de l'équation GL à partir du modèle de Swift-Hohenberg . . . . .	313
10.7.2	Invariance par translation et invariance galiléenne . . . . .	314
<b>11</b>	<b>Systèmes dynamiques et bifurcations</b>	<b>315</b>
11.1	Introduction . . . . .	315
11.2	Espace des phases, attracteurs . . . . .	316
11.2.1	Flot engendré par un champ de vecteurs. Orbites dans l'espace des phases . . . . .	316
11.2.2	Systèmes dissipatifs et conservatifs. Attracteurs . . . . .	318
11.2.3	Sections de Poincaré . . . . .	320
11.3	Étude du système linéarisé – Stabilité linéaire . . . . .	323
11.3.1	Solution du système linéarisé . . . . .	323
11.3.2	Sous-espaces invariants . . . . .	324
11.3.3	Types de points fixes . . . . .	324
11.3.4	« Ressemblance » des champs non linéaire et linéarisé . . . . .	325
11.4	Variétés invariantes et formes normales . . . . .	327
11.4.1	Variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique . . . . .	327
11.4.2	Variété centrale . . . . .	329
11.4.3	Forme normale d'un champ de vecteurs . . . . .	331
11.5	Stabilité structurelle et généricité . . . . .	334
11.5.1	Position du problème . . . . .	334
11.5.2	Stabilité structurelle et généricité : définitions . . . . .	336
11.5.3	Conditions de stabilité structurelle . . . . .	337
11.6	Bifurcations . . . . .	340
11.6.1	Introduction . . . . .	340
11.6.2	Définition d'une bifurcation . . . . .	340
11.6.3	Codimension d'une bifurcation . . . . .	341
11.6.4	Bifurcation nœud-col . . . . .	343
11.6.5	Bifurcation de Hopf . . . . .	347
11.6.6	Un exemple de bifurcation de codimension deux . . . . .	349
11.7	Exercices . . . . .	353
11.7.1	Attracteur de Hénon . . . . .	353
11.7.2	Exponentielles de matrice . . . . .	354
11.7.3	Intégration de systèmes différentiels linéaires . . . . .	354
11.7.4	Portrait de phases . . . . .	354
11.7.5	Variétés stable et instable . . . . .	354
11.7.6	Variété centrale . . . . .	354
11.7.7	Résonances de valeurs propres . . . . .	355
11.7.8	Forme normale . . . . .	355
11.7.9	Stabilité structurelle d'une orbite hétérocline . . . . .	355
11.7.10	Forme normale des équations de Lorenz . . . . .	355
11.7.11	Diagramme de bifurcation (1) . . . . .	355
11.7.12	Diagramme de bifurcation (2) . . . . .	356

11.7.13 Bifurcation de Hopf . . . . .	356
11.7.14 Bifurcation de Hopf du système de Lorenz . . . . .	356
<b>Annexe A : Équations de Saint-Venant</b>	<b>357</b>
A.1 Débit sortant d'une tranche d'un écoulement . . . . .	357
A.2 Conservation de la masse . . . . .	358
A.3 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	358
A.4 Modélisation du frottement pariétal . . . . .	360
<b>Bibliographie</b>	<b>363</b>
<b>Index</b>	<b>381</b>