

# TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	xiii
Avertissement	xvii
<b>Première partie – GROUPES</b>	<b>1</b>
<b>I Généralités sur les groupes</b>	<b>3</b>
I.1 Définitions — exemples . . . . .	3
I.2 Sous-groupes — morphismes . . . . .	8
A - Sous-groupes . . . . .	8
B - Sous-groupes engendrés . . . . .	11
C - Ordre d'un groupe, d'un élément . . . . .	13
D - Morphismes . . . . .	13
I.3 Produit direct de groupes . . . . .	19
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>25</b>
TR.I.A. Étude du groupe symétrique $S_n$ . . . . .	25
TR.I.B. Groupes cycliques . . . . .	27
TR.I.C. Détermination des groupes d'ordre $n$ , pour $1 \leq n \leq 9$ . .	30
<b>Travaux pratiques</b>	<b>33</b>
TPI. Étude de quelques groupes de permutations . . . . .	33
<b>II Groupes quotients</b>	<b>37</b>
II.1 Classes modulo un sous-groupe . . . . .	37
II.2 Compatibilité avec la structure . . . . .	41
II.3 Groupes quotients . . . . .	42

II.4	Caractérisation des sous-groupes normaux . . . . .	45
II.5	Sous-groupes normaux et morphismes . . . . .	47
II.6	Sous-groupes d'un groupe quotient . . . . .	48
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>53</b>
TR.II.A.	Sous-groupes dérivés et abélianisation . . . . .	53
TR.II.B.	Étude des sous-groupes normaux de $S_n$ . . . . .	54
TR.II.C.	Étude des automorphismes de $S_n$ . . . . .	57
<b>Travaux pratiques</b>		<b>59</b>
TP.II.	Classes, structure quotient et systèmes générateurs forts	59
<b>III</b>	<b>Présentation d'un groupe par générateurs et relations</b>	<b>65</b>
III.1	Groupes libres . . . . .	65
III.2	Générateurs et relations . . . . .	72
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>75</b>
TR.III.A.	Présentation du groupe quaternionique $\mathcal{H}$ . . . . .	75
TR.III.B.	Groupes de présentation finie . . . . .	75
TR.III.C.	Quelques propriétés des groupes libres . . . . .	76
TR.III.D.	Produit libre de groupes . . . . .	77
<b>IV</b>	<b>Groupes opérant sur un ensemble</b>	<b>81</b>
IV.1	Définitions – Exemples . . . . .	81
IV.2	Stabilisateurs – Orbites . . . . .	84
IV.3	Produit semi-direct . . . . .	87
	A - Groupes opérant sur un groupe . . . . .	87
	B - Produit semi-direct de sous-groupes . . . . .	87
	C - Produit semi-direct de groupes . . . . .	88
IV.4	Opérations transitives, fidèles . . . . .	90
IV.5	Points fixes . . . . .	91
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>93</b>
TR.IV.A.	Groupes diédraux $D_n$ . . . . .	93
TR.IV.B.	Groupe des isométries du cube . . . . .	94
TR.IV.C.	Produits et extensions de groupes . . . . .	94
TR.IV.D.	Groupes libres de rang 2 . . . . .	96
<b>Travaux pratiques</b>		<b>99</b>
TP.IV.A.	Générateurs et relations, autour de l'algorithme de Todd-Coxeter . . . . .	99

TP.IV.B	Actions $k$ -transitives, formule de Burnside et énumérations de Polya . . . . .	108
<b>V</b>	<b>Les théorèmes de Sylow</b>	<b>117</b>
V.1	Le premier théorème de Sylow . . . . .	117
V.2	Le second théorème de Sylow . . . . .	119
V.3	Applications . . . . .	122
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>125</b>
TR.V.A.	$\text{Int}(S_6) \neq \text{Aut}(S_6)$ . . . . .	125
TR.V.B.	Détermination des groupes d'ordre $n$ , $n \leq 15$ . . . . .	126
TR.V.C.	Détermination des groupes d'ordre $pq$ . . . . .	127
<b>VI</b>	<b>Groupes abéliens</b>	<b>129</b>
VI.1	Somme directe de groupes abéliens . . . . .	129
	A - Somme directe de sous-groupes d'un groupe abélien .	129
	B - Somme directe de groupes abéliens . . . . .	131
	C - Facteur direct d'un groupe abélien . . . . .	132
VI.2	Groupes abéliens libres . . . . .	133
	A - Définition - Propriété universelle . . . . .	133
	B - Rang d'un groupe abélien libre . . . . .	137
	C - Sous-groupes d'un groupe abélien libre . . . . .	140
VI.3	Groupes abéliens de torsion . . . . .	142
VI.4	Structure des groupes abéliens de type fini . . . . .	145
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>155</b>
TR.VI.A.	Rang d'un groupe libre . . . . .	155
TR.VI.B.	Groupes divisibles . . . . .	156
TR.VI.C.	Calcul des facteurs invariants . . . . .	158
	<b>Travaux pratiques</b>	<b>161</b>
TP.VI.A.	Algorithmes de Gauss-Jordan, de Hermite et de Smith . .	161
TP.VI.B.	Courbes elliptiques et groupe de Mordell . . . . .	166
<b>VII</b>	<b>Groupes résolubles</b>	<b>177</b>
VII.1	Suites de composition . . . . .	177
VII.2	Suites de Jordan-Hölder . . . . .	179
VII.3	Groupes résolubles . . . . .	181
VII.4	Applications . . . . .	183

<b>Deuxième partie – THÉORIE DES CORPS</b>	<b>185</b>
<b>VIII Anneaux de polynômes</b>	<b>187</b>
VIII.1 Définitions - Exemples . . . . .	187
VIII.2 Idéaux – Morphismes . . . . .	190
VIII.3 Idéaux maximaux, idéaux premiers . . . . .	194
VIII.4 Produit d’anneaux - Théorème chinois . . . . .	196
VIII.5 Corps des fractions d’un anneau intègre . . . . .	198
VIII.6 Anneaux de polynômes . . . . .	199
VIII.7 Anneaux principaux . . . . .	205
VIII.8 Divisibilité . . . . .	210
VIII.9 Irréductibilité des polynômes . . . . .	212
VIII.10 Racines – Ordre de multiplicité . . . . .	217
VIII.11 Polynômes symétriques . . . . .	220
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>225</b>
TR.VIII.A. Critère d’irréductibilité par extension . . . . .	225
TR.VIII.B. Critère d’irréductibilité par réduction . . . . .	226
TR.VIII.C. Résultant - Discriminant . . . . .	227
TR.VIII.D. Algèbres - Algèbres de polynômes . . . . .	228
<b>Travaux pratiques</b>	<b>231</b>
TP.VIII. Entiers de Gauss et sommes de deux carrés . . . . .	231
<b>IX Généralités sur les extensions de corps</b>	<b>237</b>
IX.1 Corps premiers – Caractéristique d’un corps . . . . .	237
IX.2 Extensions . . . . .	239
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>243</b>
TR.IX.A. Corps finis . . . . .	243
TR.IX.B. Corps des quaternions et théorème des quatre carrés . . . . .	244
<b>Travaux pratiques</b>	<b>249</b>
TP.IX.A. Factorisation des polynômes . . . . .	249
TP.IX.B. Les quaternions de Hamilton . . . . .	259
<b>X <math>K</math>-morphisms et groupe de Galois d’une extension</b>	<b>263</b>
X.1 $K$ -morphisms . . . . .	263
X.2 Groupe de Galois . . . . .	264

X.3	Degré d'une extension et ordre du groupe de Galois . . .	266
X.4	Corps intermédiaires et sous-groupes du groupe de Galois	268
<b>XI</b>	<b>Extensions algébriques – extensions transcendantes</b>	<b>271</b>
XI.1	Extensions algébriques . . . . .	271
XI.2	Extensions transcendantes . . . . .	276
XI.3	Appendice . . . . .	281
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>285</b>
TR.XI.A.	Constructions à la règle et au compas . . . . .	285
TR.XI.B.	Théorème de Lüroth . . . . .	287
	<b>Travaux pratiques</b>	<b>289</b>
TP.XI.	Nombres algébriques et polynôme minimal . . . . .	289
<b>XII</b>	<b>Décomposition des polynômes – Clôtures algébriques</b>	<b>299</b>
XII.1	Corps de rupture et corps de décomposition d'un polynôme . . . . .	299
XII.2	Clôtures algébriques . . . . .	304
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>311</b>
TR.XII.	Plongements dans une clôture algébrique . . . . .	311
	<b>Travaux pratiques</b>	<b>315</b>
TP.XII.	Calculs dans les corps de nombres . . . . .	315
<b>XIII</b>	<b>Extensions normales, séparables</b>	<b>321</b>
XIII.1	Extensions et éléments conjugués . . . . .	321
XIII.2	Extensions normales . . . . .	322
XIII.3	Extensions séparables . . . . .	326
XIII.4	Éléments primitifs . . . . .	331
XIII.5	Norme et trace . . . . .	333
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>337</b>
TR.XIII.A.	Corps parfaits . . . . .	337
TR.XIII.B.	Extensions inséparables et radicielles . . . . .	337
TR.XIII.C.	Dérivations et extensions séparables . . . . .	339

**Troisième partie – THÉORIE DE GALOIS  
ET APPLICATIONS 343**

<b>XIV Extensions galoisiennes – Théorie de Galois des extensions finies</b>		<b>345</b>
XIV.1	Extensions galoisiennes . . . . .	345
XIV.2	Clôture galoisienne d’une extension séparable . . . . .	348
XIV.3	Théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois . . . . .	348
XIV.4	Étude d’un exemple . . . . .	350
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>355</b>
TR.XIV.	Théorie de Galois des extensions infinies . . . . .	355
<b>Travaux pratiques</b>		<b>359</b>
TP.XIV.	Autour de la correspondance de Galois . . . . .	359
<b>XV Racines de l’unité – Corps finis – Extensions cycliques</b>		<b>367</b>
XV.1	Racines de l’unité . . . . .	367
XV.2	Corps des racines $n$ -ième de l’unité . . . . .	369
XV.3	Polynômes cyclotomiques . . . . .	371
XV.4	Corps finis . . . . .	373
XV.5	Extensions cycliques . . . . .	376
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>381</b>
TR.XV.A.	Symboles de Legendre. Loi de réciprocité quadratique . . . . .	381
TR.XV.B.	Interprétation cohomologique du théorème « Hilbert 90 » . . . . .	383
TR.XV.C.	Irréductibilité du polynôme $X^n - a$ . . . . .	384
<b>Travaux pratiques</b>		<b>387</b>
TP.XV.	Racines de l’unité dans un corps fini et codes $BCH$ . . . . .	387
<b>XVI Résolubilité par radicaux des équations polynomiales</b>		<b>399</b>
XVI.1	Extensions radicales . . . . .	399
XVI.2	Résolubilité des polynômes . . . . .	402
XVI.3	Caractérisation des polynômes résolubles . . . . .	406
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>409</b>
TR.XVI.	Résolution des équations polynomiales de degrés 3 et 4 . . . . .	409
<b>Travaux pratiques</b>		<b>413</b>
TP.XVI.	Théorie de Galois constructive . . . . .	413

<b>XVII Polygones réguliers constructibles et nombres de Fermat</b>	<b>431</b>
XVII.1 Points constructibles . . . . .	431
XVII.2 Constructibilité des polygones réguliers . . . . .	434
<b>Appendice</b>	<b>439</b>
1 Ensembles ordonnés . . . . .	439
2 Cardinaux – Ensembles infinis . . . . .	442
<b>Bibliographie</b>	<b>449</b>
<b>Index terminologique</b>	<b>451</b>