

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	xiii
Avertissement	xvii
Première partie – GROUPES	1
I Généralités sur les groupes	3
I.1 Définitions — exemples	3
I.2 Sous-groupes — morphismes	8
A - Sous-groupes	8
B - Sous-groupes engendrés	11
C - Ordre d'un groupe, d'un élément	13
D - Morphismes	13
I.3 Produit direct de groupes	19
Thèmes de réflexion	25
TR.I.A. Étude du groupe symétrique S_n	25
TR.I.B. Groupes cycliques	27
TR.I.C. Détermination des groupes d'ordre n , pour $1 \leq n \leq 9$. .	30
Travaux pratiques	33
TPI. Étude de quelques groupes de permutations	33
II Groupes quotients	37
II.1 Classes modulo un sous-groupe	37
II.2 Compatibilité avec la structure	41
II.3 Groupes quotients	42

II.4	Caractérisation des sous-groupes normaux	45
II.5	Sous-groupes normaux et morphismes	47
II.6	Sous-groupes d'un groupe quotient	48
Thèmes de réflexion		53
TR.II.A.	Sous-groupes dérivés et abélianisation	53
TR.II.B.	Étude des sous-groupes normaux de S_n	54
TR.II.C.	Étude des automorphismes de S_n	57
Travaux pratiques		59
TP.II.	Classes, structure quotient et systèmes générateurs forts	59
III	Présentation d'un groupe par générateurs et relations	65
III.1	Groupes libres	65
III.2	Générateurs et relations	72
Thèmes de réflexion		75
TR.III.A.	Présentation du groupe quaternionique \mathcal{H}	75
TR.III.B.	Groupes de présentation finie	75
TR.III.C.	Quelques propriétés des groupes libres	76
TR.III.D.	Produit libre de groupes	77
IV	Groupes opérant sur un ensemble	81
IV.1	Définitions – Exemples	81
IV.2	Stabilisateurs – Orbites	84
IV.3	Produit semi-direct	87
	A - Groupes opérant sur un groupe	87
	B - Produit semi-direct de sous-groupes	87
	C - Produit semi-direct de groupes	88
IV.4	Opérations transitives, fidèles	90
IV.5	Points fixes	91
Thèmes de réflexion		93
TR.IV.A.	Groupes diédraux D_n	93
TR.IV.B.	Groupe des isométries du cube	94
TR.IV.C.	Produits et extensions de groupes	94
TR.IV.D.	Groupes libres de rang 2	96
Travaux pratiques		99
TP.IV.A.	Générateurs et relations, autour de l'algorithme de Todd-Coxeter	99

TP.IV.B	Actions k -transitives, formule de Burnside et énumérations de Polya	108
V	Les théorèmes de Sylow	117
V.1	Le premier théorème de Sylow	117
V.2	Le second théorème de Sylow	119
V.3	Applications	122
	Thèmes de réflexion	125
TR.V.A.	$\text{Int}(S_6) \neq \text{Aut}(S_6)$	125
TR.V.B.	Détermination des groupes d'ordre n , $n \leq 15$	126
TR.V.C.	Détermination des groupes d'ordre pq	127
VI	Groupes abéliens	129
VI.1	Somme directe de groupes abéliens	129
	A - Somme directe de sous-groupes d'un groupe abélien .	129
	B - Somme directe de groupes abéliens	131
	C - Facteur direct d'un groupe abélien	132
VI.2	Groupes abéliens libres	133
	A - Définition - Propriété universelle	133
	B - Rang d'un groupe abélien libre	137
	C - Sous-groupes d'un groupe abélien libre	140
VI.3	Groupes abéliens de torsion	142
VI.4	Structure des groupes abéliens de type fini	145
	Thèmes de réflexion	155
TR.VI.A.	Rang d'un groupe libre	155
TR.VI.B.	Groupes divisibles	156
TR.VI.C.	Calcul des facteurs invariants	158
	Travaux pratiques	161
TP.VI.A.	Algorithmes de Gauss-Jordan, de Hermite et de Smith . .	161
TP.VI.B.	Courbes elliptiques et groupe de Mordell	166
VII	Groupes résolubles	177
VII.1	Suites de composition	177
VII.2	Suites de Jordan-Hölder	179
VII.3	Groupes résolubles	181
VII.4	Applications	183

Deuxième partie – THÉORIE DES CORPS	185
VIII Anneaux de polynômes	187
VIII.1 Définitions - Exemples	187
VIII.2 Idéaux – Morphismes	190
VIII.3 Idéaux maximaux, idéaux premiers	194
VIII.4 Produit d’anneaux - Théorème chinois	196
VIII.5 Corps des fractions d’un anneau intègre	198
VIII.6 Anneaux de polynômes	199
VIII.7 Anneaux principaux	205
VIII.8 Divisibilité	210
VIII.9 Irréductibilité des polynômes	212
VIII.10 Racines – Ordre de multiplicité	217
VIII.11 Polynômes symétriques	220
Thèmes de réflexion	225
TR.VIII.A. Critère d’irréductibilité par extension	225
TR.VIII.B. Critère d’irréductibilité par réduction	226
TR.VIII.C. Résultant - Discriminant	227
TR.VIII.D. Algèbres - Algèbres de polynômes	228
Travaux pratiques	231
TP.VIII. Entiers de Gauss et sommes de deux carrés	231
IX Généralités sur les extensions de corps	237
IX.1 Corps premiers – Caractéristique d’un corps	237
IX.2 Extensions	239
Thèmes de réflexion	243
TR.IX.A. Corps finis	243
TR.IX.B. Corps des quaternions et théorème des quatre carrés	244
Travaux pratiques	249
TP.IX.A. Factorisation des polynômes	249
TP.IX.B. Les quaternions de Hamilton	259
X K-morphisms et groupe de Galois d’une extension	263
X.1 K -morphisms	263
X.2 Groupe de Galois	264

X.3	Degré d'une extension et ordre du groupe de Galois . . .	266
X.4	Corps intermédiaires et sous-groupes du groupe de Galois	268
XI	Extensions algébriques – extensions transcendentes	271
XI.1	Extensions algébriques	271
XI.2	Extensions transcendentes	276
XI.3	Appendice	281
	Thèmes de réflexion	285
TR.XI.A.	Constructions à la règle et au compas	285
TR.XI.B.	Théorème de Lüroth	287
	Travaux pratiques	289
TP.XI.	Nombres algébriques et polynôme minimal	289
XII	Décomposition des polynômes – Clôtures algébriques	299
XII.1	Corps de rupture et corps de décomposition d'un polynôme	299
XII.2	Clôtures algébriques	304
	Thèmes de réflexion	311
TR.XII.	Plongements dans une clôture algébrique	311
	Travaux pratiques	315
TP.XII.	Calculs dans les corps de nombres	315
XIII	Extensions normales, séparables	321
XIII.1	Extensions et éléments conjugués	321
XIII.2	Extensions normales	322
XIII.3	Extensions séparables	326
XIII.4	Éléments primitifs	331
XIII.5	Norme et trace	333
	Thèmes de réflexion	337
TR.XIII.A.	Corps parfaits	337
TR.XIII.B.	Extensions inséparables et radicielles	337
TR.XIII.C.	Dérivations et extensions séparables	339

Troisième partie – THÉORIE DE GALOIS ET APPLICATIONS 343

XIV Extensions galoisiennes – Théorie de Galois des extensions finies		345
XIV.1	Extensions galoisiennes	345
XIV.2	Clôture galoisienne d’une extension séparable	348
XIV.3	Théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois	348
XIV.4	Étude d’un exemple	350
Thèmes de réflexion		355
TR.XIV.	Théorie de Galois des extensions infinies	355
Travaux pratiques		359
TP.XIV.	Autour de la correspondance de Galois	359
XV Racines de l’unité – Corps finis – Extensions cycliques		367
XV.1	Racines de l’unité	367
XV.2	Corps des racines n -ième de l’unité	369
XV.3	Polynômes cyclotomiques	371
XV.4	Corps finis	373
XV.5	Extensions cycliques	376
Thèmes de réflexion		381
TR.XV.A.	Symboles de Legendre. Loi de réciprocité quadratique	381
TR.XV.B.	Interprétation cohomologique du théorème « Hilbert 90 »	383
TR.XV.C.	Irréductibilité du polynôme $X^n - a$	384
Travaux pratiques		387
TP.XV.	Racines de l’unité dans un corps fini et codes BCH	387
XVI Résolubilité par radicaux des équations polynomiales		399
XVI.1	Extensions radicales	399
XVI.2	Résolubilité des polynômes	402
XVI.3	Caractérisation des polynômes résolubles	406
Thèmes de réflexion		409
TR.XVI.	Résolution des équations polynomiales de degrés 3 et 4	409
Travaux pratiques		413
TP.XVI.	Théorie de Galois constructive	413

XVII Polygones réguliers constructibles et nombres de Fermat	431
XVII.1 Points constructibles	431
XVII.2 Constructibilité des polygones réguliers	434
Appendice	439
1 Ensembles ordonnés	439
2 Cardinaux – Ensembles infinis	442
Bibliographie	449
Index terminologique	451