# TABLE DES MATIÈRES

**Préface** ... **ix**

**Partie I. Théorie de Morse**

**Introduction de la première partie** ... **3**

**1. Fonctions de Morse** ... **7**
- 1.1. Définition des fonctions de Morse ... 7
- 1.2. Existence et multitude des fonctions de Morse ... 8
- 1.3. Le lemme de Morse, indice d'un point critique ... 11
- 1.4. Exemples de fonctions de Morse ... 15
- Exercices ... 17

**2. Pseudo-gradients** ... **21**
- 2.1. Gradients, pseudo-gradients et cartes de Morse ... 21
- 2.2. La condition de Smale ... 33
- 2.3. Appendice : classification des variétés compactes de dimension 1 44
- Exercices ... 48

**3. Le complexe des points critiques** ... **51**
- 3.1. Définition du complexe ... 51
- 3.2. Espace des liaisons entre deux points critiques, ou des « trajectoires brisées » ... 55
- 3.3. Orientations, complexe sur **Z** ... 63
- 3.4. L'homologie du complexe ne dépend ni de la fonction ni du champ de vecteurs ... 64
- 3.5. Cobordismes ... 71
- Exercices ... 73

**4. Homologie de Morse, applications** ... **75**
- 4.1. Homologie ... 75
- 4.2. La formule de Künneth ... 76
- 4.3. La « dualité de Poincaré » ... 78
- 4.4. Caractéristique d'Euler, polynôme de Poincaré ... 79

4.5. Homologie et connexité ..... 82
4.6. Fonctorialité de l'homologie de Morse ..... 85
4.7. Suite exacte longue ..... 93
4.8. Applications ..... 95
Exercices ..... 103

**Partie II. La conjecture d'Arnold, théorie de Floer**

**Introduction de la deuxième partie ..... 109**

**5. Ce qu'il faut savoir en géométrie symplectique ..... 111**
5.1. Espaces vectoriels symplectiques ..... 111
5.2. Variétés symplectiques, définition ..... 112
5.3. Exemples de variétés symplectiques ..... 113
5.4. Champs de vecteurs hamiltoniens, systèmes hamiltoniens ..... 116
5.5. Structures complexes ..... 120
5.6. Le groupe symplectique ..... 125

**6. La conjecture d'Arnold et l'équation de Floer ..... 131**
6.1. La conjecture d'Arnold ..... 131
6.2. Stratégie de la démonstration, homologie de Floer ..... 134
6.3. La fonctionnelle d'action ..... 136
6.4. Le gradient, l'équation de Floer ..... 142
6.5. Espace des solutions ..... 144
6.6. Démonstration de la compacité ..... 155
6.7. Appendice : fonctions, formes fermées, revêtements ..... 163
6.8. Appendice : structure de variété de Banach sur $\mathcal{L}W$ ..... 165

**7. Géométrie du groupe symplectique, indice de Maslov ..... 169**
7.1. Vers la définition de l'indice ..... 169
7.2. L'indice de Maslov d'un chemin ..... 175
7.3. Appendice : construction et propriétés de $\rho$ ..... 181

**8. Linéarisation et transversalité ..... 199**
8.1. Les résultats : énoncés ..... 199
8.2. La variété de Banach $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ ..... 202
8.3. L'espace des perturbations de $H$ ..... 206
8.4. Linéarisation de l'équation de Floer : calcul de la différentielle de $\mathcal{F}$ ..... 210
8.5. La transversalité ..... 217
8.6. Les solutions de Floer sont « injectives quelque part » ..... 228
8.7. La propriété de Fredholm ..... 241
8.8. Le calcul de l'indice de $L$ ..... 257
8.9. La décroissance exponentielle ..... 267

**9. Homologie de Floer : étude des espaces de trajectoires** ..... **275**
9.1. Les espaces de trajectoires ..... 275
9.2. Trajectoires brisées, recollement : énoncés ..... 280
9.3. Pré-recollement ..... 282
9.4. Construction de $\psi$ ..... 285
9.5. Propriétés de $\widehat{\psi}$ : $\widehat{\psi}$ est une immersion ..... 302
9.6. Propriétés de $\widehat{\psi}$ : unicité du recollement ..... 303

**10. De Floer à Morse** ..... **325**
10.1. Les énoncés ..... 325
10.2. La linéarisation du flot d'un champ de pseudo-gradient, démonstration du théorème 10.1.3 ..... 328
10.3. Démonstration du théorème (de régularité) 10.1.2 ..... 336
10.4. Les trajectoires de Morse et de Floer coïncident ..... 341

**11. Homologie de Floer : invariance** ..... **347**
11.1. Le morphisme $\Phi^\Gamma$ ..... 348
11.2. Démonstration du théorème 11.1.16 ..... 360
11.3. Invariance de $\Phi^\Gamma$ : démonstration de la proposition 11.2.8 ..... 374
11.4. Démonstration du théorème 11.3.14 ..... 387
11.5. Fin de la preuve de l'invariance de l'homologie de Floer : démonstration de la proposition 11.2.9 ..... 398
11.6. Conclusion ..... 411

**12. La régularité elliptique de l'opérateur de Floer** ..... **413**
12.1. La régularité elliptique : pourquoi et comment ? ..... 413
12.2. Démonstration du lemme 8.7.2 ..... 418
12.3. Démonstration du théorème 12.1.2 ..... 420
12.4. Régularité elliptique de l'opérateur de Floer (non linéaire), démonstrations ..... 423

**13. Les lemmes sur la dérivée seconde de l'opérateur de Floer et autres technicités** ..... **433**
13.1. Versions de l'opérateur de Floer ..... 433
13.2. Les deux lemmes sur $dF$ ..... 434
13.3. L'opérateur $\widetilde{\mathcal{F}}_\rho$ ..... 436
13.4. Démonstration des deux lemmes : le premier ..... 440
13.5. Démonstration des deux lemmes : le deuxième ..... 446
13.6. Encore un lemme technique ..... 451
13.7. Deux autres lemmes techniques ..... 454
13.8. Variantes à paramètre(s) des lemmes sur la dérivée seconde ..... 460

**Exercices de la deuxième partie** ..... 469

## Appendices : ce qu'il faut savoir pour lire ce livre

**14. Un peu de géométrie différentielle** .......... **487**
14.1. Les variétés et les sous-variétés .......... 487
14.2. Points critiques, valeurs critiques et théorème de Sard .......... 492
14.3. Transversalité .......... 493
14.4. Champs de vecteurs comme équations différentielles .......... 499
14.5. Métriques riemanniennes, exponentielle .......... 503

**15. Un peu de topologie algébrique** .......... **505**
15.1. Un peu d'algèbre homologique .......... 505
15.2. Classes de Chern .......... 508

**16. Un peu d'analyse** .......... **511**
16.1. Le théorème d'Ascoli .......... 511
16.2. Théorie de Fredholm .......... 512
16.3. Espaces de distributions, solutions faibles .......... 520
16.4. Espaces de Sobolev sur $\mathbf{R}^n$ .......... 523
16.5. L'équation de Cauchy-Riemann .......... 528

**Bibliographie** .......... **535**

**Index des notations** .......... **541**

**Index terminologique** .......... **543**