

Table des matières

Préface	vii
Avant-propos	ix
1 Introduction	1
1.1 Vésicule torique de molécules amphiphiles et torsade du collagène	1
1.2 Des objets contraints dans l'espace euclidien	2
1.3 Des modèles libres de contraintes dans un espace non euclidien	4
1.4 Démarche adoptée	4
1.5 Structures toriques et torsadées des cristaux liquides	6
1.6 Plan de l'ouvrage	7
2 Espace non euclidien de l'hypersphère	9
2.1 L'hypersphère, un espace tridimensionnel courbé	9
2.1.1 L'hypersphère en coordonnées sphériques	11
2.1.2 L'hypersphère en coordonnées toriques	12
2.1.3 Symétrie de l'hypersphère	13
2.2 Tores, parallèles de Clifford	14
2.3 Fibration de Hopf	16
2.3.1 Base de la fibration	16
2.3.2 Ensemble discret de fibres	17
2.4 Fibrations de Seifert	19
2.5 Courbure et polytopes	21
3 Retour dans l'espace euclidien	25
3.1 Projection stéréographique	25
3.1.1 Projection conforme	26
3.1.2 Les cercles se transforment en cercles	27
3.1.3 Projection de l'hypersphère	28
3.2 Couverture de R_3 à l'aide de défauts de Volterra	31

4	Surfaces toriques	37
4.1	Films de molécules amphiphiles	37
4.1.1	Nature du film	39
4.1.2	Élasticité du film	40
4.2	Vésicules	43
4.2.1	Vésicules toriques de genre $g = 1$	44
4.2.2	Vésicules toriques de genre $g = 2$	46
4.2.3	Vésicules toriques de surfaces emboîtées et connectées	47
4.3	Structures toriques périodiques	50
4.3.1	Système périodique de films fluides et frustration	52
4.3.2	Relaxation de la frustration dans l'hypersphère	53
4.3.3	Retour dans l'espace euclidien	55
4.3.4	Plan de Poincaré	56
4.3.5	Surfaces infinies périodiques minimales et structures cubiques bicontinues	58
4.3.6	Cristaux de disinclinaisons	59
4.4	Structures bicontinues en biologie	61
4.4.1	Membranes	61
4.4.2	Structures du système photosynthétique	62
4.4.3	Morphologie comparée des films et membranes	70
5	Torsades	73
5.1	Milieux denses de molécules chirales	73
5.1.1	Chiralité et torsion	74
5.1.2	Élasticité en présence de torsion	75
5.2	Agrégats toriques	77
5.2.1	L'ADN, fil chiral flexible	78
5.2.2	Condensation et agrégats	80
5.2.3	Relaxation de la frustration dans S_3	82
5.2.4	Projection stéréographique de S_3 dans R_3	84
5.2.5	Dimensions des objets projetés	84
5.2.6	Remarques finales	86
5.3	Torsades périodiques	87
5.3.1	Modèle des cylindres de double torsion pour les phases bleues	88
5.3.2	Fibration de Hopf et phases bleues	90
5.3.3	Phase bleues ou agrégats toriques ?	91
5.4	Collagène et tissus biologiques	91
5.4.1	Structures hiérarchiques	92
5.4.2	Association de simples hélices en triples hélices	95
5.4.3	Association de triples hélices en fibrilles	99
5.4.4	Associations de fibrilles	102
5.5	Protéines fibreuses	106
6	Commentaire final	109

Appendice A : L'hypersphère et les quaternions	113
A.1 Nombres complexes	113
A.1.1 Des nombres complexes aux rotations dans le plan . . .	113
A.1.2 Projection stéréographique d'un cercle sur une droite . .	114
A.2 Quaternions	115
A.2.1 Relations de Hamilton	115
A.2.2 L'hypersphère et les quaternions	117
A.3 Calculer avec des quaternions	120
A.4 Quaternions et projection stéréographique	120
A.4.1 Projection de S_3 depuis un pôle dans R_3	120
A.4.2 Projections du tore sphérique à trois dimensions	122
Appendice B : Fibrations de Hopf et de Seifert	123
B.1 Retour sur les fibrations	123
B.2 Fibration de Hopf de S_3	123
B.3 Fibration de Seifert de S_3	125
B.3.1 Application sur le plan complexe	125
B.3.2 Métrique de la base de la fibration de Seifert	126
B.3.3 Courbure de Gauss des bases de fibrations de Seifert . .	127
B.4 Fibration de Seifert et fibration de Hopf disinclinée	128
B.4.1 Dislocations et disinclinaisons vis	128
B.4.2 Disinclinaison vis dans une fibration de Hopf	130
Appendice C : Courbures d'une surface	133
C.1 Point de vue local	133
C.2 Point de vue global	136
C.2.1 Topologie de surfaces fermées	136
C.2.2 Topologie de surfaces infinies	137
C.2.3 Genre et topologie	139
C.3 Relation entre le local et le global	140
Appendice D : Torsion de fibres dans S_3	141
D.1 Comparaison de vecteurs d'un champ vectoriel	141
D.2 Référentiels locaux	142
D.2.1 Référentiel local du cercle S_1	142
D.2.2 Référentiels locaux dans S_3	143
D.2.3 Expression de vecteurs dans les référentiels locaux . . .	144
D.3 Angle de torsion	145
D.3.1 Torsion de la fibration de Hopf	146
D.3.2 Torsion de la fibration de Seifert	149
D.4 Conclusion sur la torsion	149
Bibliographie	151
Index	155
Remerciements	159