

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	vii
I Éléments de topologie différentielle	1
1 Préliminaires de calcul différentiel	3
1.1 Différentielle	3
1.1.1 Définitions	3
1.1.2 Expressions de la différentielle	7
1.1.3 Composition des différentielles	9
1.2 Formule des accroissements finis	10
1.3 Théorème de l'inverse, difféomorphisme	10
1.4 Théorème des fonctions implicites	14
2 Variétés et sous-variétés	19
2.1 Variétés différentiables	19
2.1.1 Définitions	20
2.1.2 Topologie quotient	22
2.1.3 Exemples de variétés	23
2.1.4 Difféomorphisme entre variétés	27
2.2 Sous-variété d'un ouvert de \mathbb{R}^n	30
2.2.1 Codimension. Sous-espaces vectoriels transverses	30
2.2.2 Définition d'une sous-variété d'un ouvert de \mathbb{R}^n	31
2.2.3 Premiers exemples de sous-variétés	33
2.2.4 Espace tangent en un point d'une sous-variété	34
2.3 Valeur régulière d'application différentiable	35
2.3.1 Équation cartésienne d'une sous-variété	35
2.3.2 Existe-t-il beaucoup de valeurs régulières ?	38

2.4	Compléments sur les variétés	42
2.4.1	Espace tangent à une variété	42
2.4.2	Plongement, immersion, submersion	44
2.4.3	Distance sur une variété	48
2.4.4	Transversalité	51
3	Points singuliers de fonctions	57
3.1	Dérivées partielles d'ordre supérieur	57
3.1.1	Définitions, notations et propriétés de base	57
3.1.2	Approximation de f au voisinage d'un point	58
3.2	Points singuliers d'une fonction sur un ouvert	61
3.2.1	Extremums	61
3.2.2	Rappels sur les formes quadratiques	62
3.2.3	Condition suffisante d'extrémalité	64
3.3	Point singulier d'une fonction sur une sous-variété	74
3.3.1	Définitions et exemples	74
3.3.2	Multiplicateurs de Lagrange	77
3.3.3	Le cas de la codimension 1	78
II	Théorie élémentaire des équations différentielles	81
1	Généralités	83
1.1	Définition des champs de vecteurs	83
1.2	Image d'un champ par un difféomorphisme	85
1.3	Équation différentielle d'un champ de vecteurs	87
1.4	Équations différentielles générales	89
2	Champs de vecteurs linéaires	93
2.1	Étude théorique	93
2.2	Résolution explicite	100
2.3	Les champs linéaires de vecteurs de \mathbb{R}^2	107
3	Propriétés générales des trajectoires	111
3.1	Le principe du point fixe	111
3.2	Existence et unicité locales des trajectoires	113
3.3	Flot d'un champ de vecteurs	118
3.3.1	Trajectoire maximale	118
3.3.2	Propriétés différentiables du flot	121
3.3.3	Groupe à 1-paramètre	123
3.3.4	Équivalence à des champs de vecteurs à flot complet	127
3.3.5	Exemples de flots	132

4	Analyse qualitative des trajectoires	135
4.1	Champ sur une variété, intégrale première	135
4.2	Type topologique des trajectoires	139
4.3	Théorème du voisinage tubulaire	142
4.4	Indice des points singuliers isolés	148
5	Récurrence	159
5.1	Propriétés des ensembles limites	160
5.2	Orbites récurrentes	164
5.3	Récurrence pour les champs de vecteurs d'un ouvert de la sphère	171
5.3.1	Préambule : le théorème de Jordan	172
5.3.2	Théorème de Poincaré-Bendixson	179
5.3.3	Applications du théorème de Poincaré-Bendixson . . .	181
5.3.4	Vers la théorie de Poincaré-Bendixson	184
6	Orbites et champs périodiques	187
6.1	Orbites périodiques	188
6.2	Section globale, suspension	197
6.2.1	Section globale pour un champ de vecteurs	197
6.2.2	Suspension d'un difféomorphisme	198
6.3	Champs de vecteurs périodiques	204
7	Stabilité des trajectoires	213
7.1	Stabilité d'un point singulier d'un champ de vecteurs	214
7.1.1	Différents types de stabilité	215
7.1.2	Théorèmes de stabilité	219
7.2	Stabilité d'une orbite périodique	229
7.2.1	Différents types de stabilité pour une orbite périodique	229
7.2.2	Différents types de stabilité pour un point fixe de difféomorphisme	231
7.2.3	Relation entre la stabilité d'une orbite périodique et celle de ses applications de Poincaré	232
7.2.4	Théorèmes de stabilité	234
	Bibliographie	239
	Index	241