

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|------------|
| Avant-propos | vii |
| Analyse du contenu du livre..... | viii |
| Organisation du livre..... | xi |
| Préambule sur l'ellipticité | 1 |
| Définitions générales..... | 1 |
| Problèmes aux limites..... | 3 |
| Équations non traitées dans le cadre de ce cours..... | 5 |
| 1. Rappels de topologie et d'analyse fonctionnelle | 7 |
| 1.1. Espaces vectoriels topologiques..... | 7 |
| 1.2. Formes linéaires, dual topologique, topologie faible..... | 14 |
| 1.3. Espace des fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^N | 26 |
| 1.4. Distributions sur un ouvert de \mathbb{R}^N | 29 |
| 1.5. Espaces L^p , lorsque $p \in [1, +\infty]$ | 40 |
| 1.6. Exercices sur le chapitre 1..... | 49 |
| 2. Les espaces de Sobolev. Théorèmes d'injection | 61 |
| 2.1. Définitions et premières propriétés..... | 61 |
| 2.2. Injections de Sobolev pour $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ | 72 |
| 2.3. Généralisation à d'autres ouverts..... | 87 |
| 2.4. Injections compactes lorsque l'ouvert est borné..... | 98 |
| 2.5. Trace sur la frontière d'un ouvert C^1 | 103 |
| 2.6. Exercices sur le chapitre 2..... | 107 |
| 3. Traces des fonctions des espaces de Sobolev | 117 |
| 3.1. Espaces $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, pour $p > 1$ | 118 |
| 3.2. Cas du bord d'un ouvert autre que $\mathbb{R}^{N-1} \times]0, \infty[$ | 133 |
| 3.3. Trace des fonctions de $W^{1,1}(\Omega)$ | 135 |
| 3.4. Densité de $C^1(\partial\Omega)$ dans $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ | 137 |
| 3.5. Traces d'ordre supérieur..... | 148 |
| 3.6. Théorèmes d'injections continues. Injections compactes..... | 166 |
| 3.7. Exercices sur le chapitre 3..... | 171 |

| | |
|--|------------|
| 4. Espaces de Sobolev fractionnaires..... | 181 |
| 4.1. Distributions tempérées et transformation de Fourier..... | 181 |
| 4.2. Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ | 183 |
| 4.3. Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$ | 191 |
| 4.4. Théorèmes d'injection pour les $W^{s,p}(\Omega)$ | 212 |
| 4.5. Injections compactes pour les $W^{s,p}(\Omega)$, Ω borné..... | 218 |
| 4.6. Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$, avec $s \in]0, +\infty[$ | 220 |
| 4.7. Appendice : théorème de convexité de Riesz..... | 222 |
| 4.8. Exercices sur le chapitre 4..... | 226 |
| 5. EDP elliptiques : techniques variationnelles..... | 231 |
| 5.1. Présentation de quelques résultats utiles..... | 231 |
| 5.2. Rappels d'analyse convexe..... | 232 |
| 5.3. Résolution d'EDP linéaires elliptiques de type Dirichlet..... | 238 |
| 5.4. Régularité des solutions précédentes..... | 245 |
| 5.5. Problèmes de Neumann..... | 253 |
| 5.6. Problèmes de Dirichlet et de Neumann non homogènes..... | 260 |
| 5.7. Problème de l'élasticité..... | 262 |
| 5.8. L'équation du p -laplacien..... | 264 |
| 5.9. Principes du maximum pour des EDP elliptiques..... | 268 |
| 5.10. Problèmes coercifs sur des espaces non réflexifs..... | 283 |
| 5.11. Surfaces minimales..... | 285 |
| 5.12. Exercices sur le chapitre 5..... | 288 |
| 6. Distributions à dérivées mesures..... | 301 |
| 6.1. Rappels sur les mesures, convergences..... | 302 |
| 6.2. Extension d'une mesure positive..... | 308 |
| 6.3. Espace de fonctions à variation bornée..... | 316 |
| 6.4. Distributions à gradient dans L^p | 325 |
| 6.5. Distributions à gradient dans $M^1(\Omega)$ | 327 |
| 6.6. Fonctions à déformations dans L^p , avec $1 < p < \infty$ | 328 |
| 6.7. Espaces de fonctions à déformation dans L^1 | 330 |
| 6.8. L'espace des fonctions à déformations mesures..... | 341 |
| 6.9. Formules de Green généralisées..... | 346 |
| 6.10. Fonctions de mesure..... | 350 |
| 6.11. Exercices sur le chapitre 6..... | 362 |
| 7. Sur l'inégalité de Korn dans L^p..... | 373 |
| 7.1. Harmonicité. Moyennes. Fonction maximale de Hardy..... | 374 |
| 7.2. Transformation de Hilbert dans \mathbb{R} | 388 |
| 7.3. Les opérateurs de Riesz dans \mathbb{R}^N | 401 |
| 7.4. Inégalité de Korn dans $W^{1,p}(\Omega)$, Ω étant borné..... | 409 |
| 7.5. Exercices sur le chapitre 7..... | 420 |

| | |
|---|------------|
| Appendice sur la régularité | 437 |
| A.1. Estimation de type L^∞ | 438 |
| A.2. Estimations $W^{1,k}$ et $W^{1,\infty}$ dans le cas $p \geq 2$ | 443 |
| Bibliographie | 457 |
| Index des notations | 461 |
| Index terminologique | 463 |