

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-Propos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Modélisation d'évolutions par champs de vecteurs et itérations	1
1.2 Équivalences entre systèmes dynamiques . . . . .	5
1.3 Un survol des propriétés des systèmes dynamiques . . . . .	8
1.4 Exemples de systèmes dynamiques . . . . .	12
1.5 Plan du tome 2 . . . . .	18
<b>2 Généricité et transversalité</b>	<b>23</b>
2.1 Germe . . . . .	23
2.2 Topologie sur les espaces fonctionnels . . . . .	24
2.2.1 Convergence de classe $\mathcal{C}^k$ sur les ouverts euclidiens . .	24
2.2.2 Généralisation aux variétés . . . . .	31
2.3 La notion de généricité . . . . .	32
2.4 Le lemme fondamental de transversalité . . . . .	35
2.5 Le théorème de transversalité de Thom . . . . .	42
2.5.1 Le cas euclidien . . . . .	42
2.5.2 Formulation générale . . . . .	45
2.6 Exemples de propriétés génériques . . . . .	50
2.7 Remarques finales . . . . .	52
2.7.1 Intérêt et limite du théorème de transversalité . . . . .	52
2.7.2 Topologie de Whitney . . . . .	54
2.7.3 Notion de singularité . . . . .	55
<b>3 Étude locale des singularités hyperboliques</b>	<b>59</b>
3.1 Points singuliers et points fixes hyperboliques . . . . .	59
3.2 Champs et difféomorphismes linéaires hyperboliques . . . . .	62

	3.2.1	Champs contractants et contractions hyperboliques	65
	3.2.2	Cas général d'un point de selle linéaire . . . . .	70
3.3		Variétés invariantes locales . . . . .	73
	3.3.1	Variétés invariantes locales pour les difféomorphismes	74
	3.3.2	Variétés invariantes locales pour les champs de vecteurs . . . . .	78
3.4		Le $\lambda$ -Lemma de Palis . . . . .	81
	3.4.1	Quelques estimations préalables . . . . .	83
	3.4.2	Suites convergentes . . . . .	85
	3.4.3	Énoncés et preuves du $\lambda$ -Lemma . . . . .	88
3.5		Feuilletages invariants locaux . . . . .	96
	3.5.1	Le cas des champs de vecteurs . . . . .	96
	3.5.2	Le cas des difféomorphismes . . . . .	99
3.6		Linéarisation topologique locale . . . . .	102
3.7		Variétés invariantes globales . . . . .	105
<b>4</b>		<b>Systèmes dynamiques structurellement stables</b>	<b>111</b>
	4.1	Introduction . . . . .	111
	4.2	Stabilité structurelle locale . . . . .	112
	4.3	Stabilité des champs en dimension 1 . . . . .	116
	4.4	Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre 0 . .	118
	4.5	Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre $\geq 1$	125
	4.5.1	Champs de vecteurs du tore $T^2$ sans singularités . . .	125
	4.5.2	Le cas général . . . . .	135
	4.6	Les systèmes de Morse-Smale généraux . . . . .	137
	4.7	Les ensembles hyperboliques . . . . .	139
	4.7.1	Le fer à cheval de Smale . . . . .	139
	4.7.2	Généralités sur les ensembles hyperboliques . . . . .	156
	4.7.3	Quelques autres exemples de systèmes hyperboliques	159
	4.8	Au-delà de la stabilité structurelle . . . . .	163
	4.8.1	Non-généricité de la stabilité structurelle . . . . .	163
	4.8.2	Attracteurs non hyperboliques . . . . .	165
<b>5</b>		<b>Les bases de la théorie des bifurcations</b>	<b>167</b>
	5.1	Introduction . . . . .	167
	5.2	Premiers exemples de bifurcation . . . . .	167
	5.3	Déploiements versels pour les singularités . . . . .	179
	5.4	Réduction à une variété centrale . . . . .	188
	5.4.1	Champs de vecteurs et difféomorphismes . . . . .	188

5.4.2	Déploiements de champs de vecteurs et de difféomorphismes . . . . .	189
5.5	Déploiements de type selle-nœud . . . . .	192
5.5.1	Déploiements de type selle-nœud sur $\mathbb{R}$ . . . . .	192
5.5.2	Déploiements de type selle-nœud sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .	196
5.6	Formes normales . . . . .	197
5.6.1	Formes normales pour les champs de vecteurs . . . . .	198
5.6.2	Formes normales pour les déploiements de champs . . . . .	205
5.6.3	Formes normales pour les difféomorphismes . . . . .	206
5.7	Bifurcations de Hopf-Takens . . . . .	206
5.7.1	Digression sur les homéomorphismes de $\mathbb{R}^+$ . . . . .	209
5.7.2	Démonstration du théorème 5.14 . . . . .	214
5.7.3	Caractérisation des déploiements versels . . . . .	217
<b>6</b>	<b>Compléments théorie des bifurcations</b> . . . . .	<b>225</b>
6.1	Désingularisation . . . . .	226
6.1.1	Désingularisation des germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ . . . . .	228
6.1.2	Désingularisation des déploiements de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ . . . . .	233
6.2	La bifurcation de Bogdanov-Takens . . . . .	240
6.3	Déploiements de champs en dimension 2 . . . . .	243
6.3.1	Singularités de codimension $\leq 2$ . . . . .	245
6.3.2	Sous-filtrations particulières . . . . .	246
6.3.3	Singularités de codimension $\leq 3$ . . . . .	247
6.4	Déploiements d'orbites périodiques et polycycles . . . . .	248
6.4.1	Bifurcation des orbites périodiques . . . . .	250
6.4.2	Connection de selle de codimension 1 . . . . .	251
6.4.3	Déploiements génériques de polycycles hyperboliques . . . . .	256
6.4.4	Connection de selle de codimension quelconque . . . . .	256
6.4.5	Autres résultats sur les bifurcations de polycycles . . . . .	258
6.5	Bifurcations globales sur la sphère . . . . .	260
6.5.1	Le problème de la cyclicité finie . . . . .	260
6.5.2	Le seizième problème de Hilbert infinitésimal . . . . .	265
6.5.3	Difficulté d'une théorie de bifurcation globale . . . . .	271
<b>7</b>	<b>Le système de Lorenz</b> . . . . .	<b>275</b>
7.1	Les équations de la convection . . . . .	276
7.2	Formulation et approximation variationnelles . . . . .	277
7.3	Considérations générales . . . . .	279

7.4	Hypothèses du modèle et fonctions de base . . . . .	281
7.4.1	Les conditions limites . . . . .	282
7.4.2	Construction modale des fonctions $\psi$ et $\theta$ . . . . .	283
7.5	Le modèle de Lorenz . . . . .	285
7.6	Étude partielle du modèle de Lorenz . . . . .	287
7.6.1	Propriété de confinement du flot de $X_{a,b,r}$ . . . . .	287
7.6.2	Étude des points singuliers de $X_{a,b,r}$ . . . . .	289
7.6.3	Sous-criticité de la bifurcation de Hopf et comportement du modèle pour $r > r_0$ . . . . .	299
	<b>Bibliographie</b>	<b>309</b>
	<b>Index</b>	<b>315</b>