

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	xi
I Bases	1
1 Fonctions d'une variable	3
1.1 Problème : évolution d'un pathogène	3
1.2 Généralités	4
1.2.1 Fonctions	4
1.2.2 Représentations graphiques	6
1.2.3 Variations	6
1.3 Quelques fonctions usuelles	8
1.3.1 Fonctions puissances	9
1.3.2 Logarithme	9
1.3.3 Exponentielle	11
1.4 Limites	14
1.4.1 Notion de limite	14
1.4.2 Règles de calcul de limites	16
1.5 Fonctions continues	19
1.5.1 Définition et propriétés	19
1.5.2 Valeurs intermédiaires	20
1.5.3 Extrema	21
1.5.4 Bijection réciproque	23
1.6 Dérivabilité	25
1.6.1 Définition et règles de calcul	25
1.6.2 Dérivée et sens de variation	27
1.6.3 Dérivée et extrema	28

1.7	Étude de fonctions	30
1.8	Évolution d'un pathogène : une solution	34
1.8.1	Vous avez dit modélisation?	34
1.8.2	Premier exemple : β sur-linéaire	36
1.8.3	Second exemple : β sous-linéaire	38
1.9	Annexe	39
1.9.1	Notations usuelles	39
1.9.2	Manipulations d'inégalités	40
1.9.3	Intégrales et primitives	41
1.10	Exercices	43
2	Fonctions de plusieurs variables	49
2.1	Problème : étude thermodynamique d'un gaz	49
2.2	Définitions générales	50
2.2.1	Préliminaire : l'espace à n dimensions	50
2.2.2	Fonctions de plusieurs variables	52
2.2.3	Représentations graphiques, surfaces-graphe	54
2.2.4	Fonctions partielles	55
2.3	Dérivées partielles	57
2.3.1	Définition	57
2.3.2	Variations et extrema	59
2.3.3	Notation différentielle et formes différentielles	62
2.3.4	Dérivée directionnelle et fonctions composées	64
2.3.5	Dérivées d'ordre supérieur	66
2.4	Intégration le long d'un chemin	67
2.4.1	Intégrale d'une forme différentielle	68
2.4.2	Formule fondamentale du calcul différentiel	70
2.5	Formes exactes et fermées	72
2.6	Étude thermodynamique d'un gaz : une solution	74
2.7	Exercices	75
3	Probabilités	79
3.1	Problème : évaluation d'un risque de trisomie 21	79
3.2	Modélisation des phénomènes aléatoires	80
3.2.1	L'univers (des possibles)	80
3.2.2	Événements	81
3.2.3	Probabilité	82
3.2.4	Analyse combinatoire	85
3.2.5	Probabilités conditionnelles, indépendance d'événements	87

	3.2.6	Formule de Bayes	90
	3.2.7	Indépendance	91
3.3		Évaluation d'un risque de trisomie 21 : une solution	93
3.4		Variables aléatoires	94
	3.4.1	Variables discrètes	97
	3.4.2	Variables continues	99
3.5		Caractéristiques des variables aléatoires	103
	3.5.1	Fonction de répartition	103
	3.5.2	Espérance	105
	3.5.3	Variance	109
	3.5.4	Indépendance entre variables aléatoires	111
3.6		Quelques exemples de lois classiques	112
	3.6.1	Loi de Bernoulli	112
	3.6.2	Loi binomiale	113
	3.6.3	Loi de Poisson	114
	3.6.4	Loi exponentielle	115
	3.6.5	Loi normale	116
	3.6.6	Trois lois utiles en statistique	118
3.7		Exercices	122
4		Des probabilités aux statistiques	127
	4.1	Problème : obésité chez les enfants	127
	4.2	L'échantillonnage	129
	4.2.1	Individus et population	129
	4.2.2	L'échantillon aléatoire	130
	4.3	Moyenne et variance empiriques	132
	4.3.1	Moyenne empirique	132
	4.3.2	Variance empirique	133
	4.4	Distributions théorique et empirique	135
	4.5	Fonction de répartition empirique	141
	4.5.1	Définition	141
	4.5.2	Quantiles et quantiles empiriques	144
	4.6	Obésité chez les enfants : une solution	149
	4.7	Annexe : loi des grands nombres et théorème central limite	152
	4.7.1	Loi des grands nombres	152
	4.7.2	Théorème central limite	155
	4.8	Exercices	157

II	Statistique	161
5	Estimation ponctuelle et par intervalle	163
5.1	Problème : estimation d'un taux de germination	163
5.2	Estimation ponctuelle	164
5.2.1	Principes généraux	164
5.2.2	Moyenne et variance empiriques	165
5.3	Intervalles de confiance	169
5.3.1	Définition et principe de construction	169
5.3.2	Estimation par intervalle de la moyenne à variance connue	171
5.3.3	Estimation par intervalle de la moyenne à variance inconnue	175
5.3.4	Estimation par intervalle de la variance : le cas gaussien	178
5.4	Estimation d'un taux de germination : une solution	181
5.4.1	Estimation d'une proportion	181
5.4.2	Application au problème du pépiniériste	184
5.5	Estimation de la différence de deux moyennes	184
5.5.1	Échantillons indépendants	185
5.5.2	Échantillons appariés	190
5.6	Exercices	192
6	Tests d'hypothèses	197
6.1	Problème : croisement génétique	197
6.2	Notions générales sur les tests statistiques	199
6.3	Test de la moyenne dans un échantillon gaussien	203
6.4	Étude de la puissance d'un test de moyenne	213
6.5	Croisement génétique : une solution	216
6.6	Comparaison de deux moyennes	218
6.6.1	Échantillons indépendants	219
6.6.2	Échantillons appariés	224
6.7	Tests du χ^2	225
6.7.1	Test du χ^2 d'ajustement	226
6.7.2	Test du χ^2 d'indépendance	230
6.7.3	Test du χ^2 d'homogénéité	233
6.8	Exercices	236

7	Régression	243
7.1	Problème : taux de croissance d'une population	243
7.2	Régression linéaire simple	245
	7.2.1 Le modèle linéaire	245
	7.2.2 Ajustement	247
	7.2.3 Généralisations	252
7.3	Qualité de l'ajustement linéaire	254
	7.3.1 Coefficient de détermination	254
	7.3.2 Corrélation	256
	7.3.3 Corrélation et covariance	259
7.4	Intervalles de confiance, tests et prévision	261
	7.4.1 Intervalles de confiance	261
	7.4.2 Tests de signification des coefficients de régression	265
	7.4.3 Prévision	266
7.5	Taux de croissance d'une population : une solution	269
7.6	Analyse de variance à un facteur	275
	7.6.1 Données et modèle	275
	7.6.2 Test de Fisher	276
	7.6.3 Estimation des effets	281
	7.6.4 Comparaisons multiples de moyennes	285
	7.6.5 Quelques remarques terminales	287
7.7	Exercices	287
III	Systèmes dynamiques	291
8	Équations différentielles	293
8.1	Problème : modélisation d'une population de parasites	293
	8.1.1 Motivation	293
	8.1.2 Bilans	294
	8.1.3 Qu'est-ce qu'une équation différentielle?	297
8.2	Équations différentielles linéaires	298
	8.2.1 Forme des équations différentielles linéaires	298
	8.2.2 Résolution des équations différentielles linéaires	299
	8.2.3 Comment trouver une solution particulière?	301
8.3	Équations à variables séparées	303
	8.3.1 Forme des équations différentielles à variables séparées	304
	8.3.2 Résolution des équations à variables séparées	304
8.4	Un mot sur la condition initiale	307

8.5	Commentaire sur la résolution des équations différentielles en général	309
8.6	Modélisation d'une population de parasites : une solution . . .	309
8.6.1	Les œufs	310
8.6.2	Les larves	311
8.7	Exercices	313
9	Calcul matriciel et applications	317
9.1	Problème : croissance d'une population	317
9.2	Matrices	319
9.2.1	Addition de matrices	321
9.2.2	Multiplication de matrices	322
9.3	Systèmes linéaires	325
9.3.1	Deux équations et deux inconnues	325
9.3.2	Cas général	328
9.3.3	Matrice inverse	329
9.4	Applications linéaires	331
9.4.1	Définitions	331
9.4.2	Changement de repère	332
9.4.3	Changements de repère et applications linéaires . . .	336
9.5	Diagonalisation	337
9.5.1	Valeurs propres, vecteurs propres	338
9.5.2	Diagonalisation en pratique	340
9.6	Croissance d'une population : une solution	344
9.7	Annexe : la méthode du pivot	348
9.8	Exercices	357
10	Équations différentielles couplées et systèmes dynamiques	361
10.1	Problème : concentration d'un composé injecté dans le sang . .	361
10.1.1	Phénomène à temps discret ou à temps continu? . . .	361
10.1.2	Systèmes couplés d'équations différentielles	362
10.2	Systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre	363
10.2.1	Existence et unicité des solutions	366
10.2.2	Résolution pratique	367
10.3	Concentration d'un composé injecté dans le sang : une solution	375
10.4	Sur l'allure des solutions lorsque $n = 2$	378
10.4.1	Informations qualitatives	380
10.4.2	Interprétation géométrique	380

10.5	Quelques exemples de dynamiques non linéaires en dimension 2	384
10.5.1	Problème : proies et prédateurs	384
10.5.2	Systèmes dynamiques	386
10.5.3	Portraits de phase	387
10.5.4	Courbes isoclines et points d'équilibre	390
10.5.5	Proies et prédateurs : une solution	394
10.5.6	Stabilité des équilibres	398
10.6	Exercices	401
IV	Solutions des exercices	407
11	Solutions de la partie I : Bases	409
11.1	Solutions des exercices du chapitre 1	409
11.2	Solutions des exercices du chapitre 2	419
11.3	Solutions des exercices du chapitre 3	422
11.4	Solutions des exercices du chapitre 4	432
12	Solutions de la partie II : Statistique	445
12.1	Solutions des exercices du chapitre 5	445
12.2	Solutions des exercices du chapitre 6	457
12.3	Solutions des exercices du chapitre 7	479
13	Solutions de la partie III : Systèmes dynamiques	491
13.1	Solutions des exercices du chapitre 8	491
13.2	Solutions des exercices du chapitre 9	499
13.3	Solutions des exercices du chapitre 10	510
	Bibliographie	525
	Index	527