

Table des matières

Introduction	xiii
Bibliographie	xvii
1 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation	1
1.1 L'électrodynamique quantique : une théorie quantique des champs	3
1.2 L'électrodynamique quantique et le problème des infinis	5
1.3 Méthode de renormalisation	8
1.4 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation	10
1.5 Le triomphe de la théorie quantique des champs : le Modèle Standard	12
1.6 Phénomènes critiques : d'autres infinis	15
1.7 Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson	17
1.8 Théories quantiques des champs effectives	19
2 Valeurs moyennes gaussiennes. Méthode du col	23
2.1 Fonction génératrice	24
2.2 Valeurs moyennes gaussiennes. Théorème de Wick	24
2.2.1 Intégrales gaussiennes paires	25
2.2.2 Intégrale gaussienne générale	26
2.2.3 Valeurs moyennes gaussiennes et théorème de Wick	27
2.3 Mesure gaussienne perturbée. Contributions connexes	28
2.3.1 Mesure gaussienne perturbée	28
2.3.2 Contributions connexes	30
2.4 Diagrammes de Feynman	31
2.5 Valeurs moyennes. Fonction génératrice. Cumulants	32
2.5.1 La fonction à deux points	32
2.5.2 Fonctions génératrices. Cumulants	34
2.6 Méthode du col	35
2.6.1 Intégrale réelle	36
2.6.2 Intégrale de contour complexe	39

2.7	Méthode du col à plusieurs variables. Calcul des fonctions génératrices	42
2.7.1	Méthode du col	42
2.7.2	Calcul des fonction génératrices	43
3	Universalité et limite continue	51
3.1	Théorème de la limite centrale des probabilités	51
3.1.1	Transformation de Fourier	52
3.1.2	Théorème de la limite centrale et conséquences	54
3.1.3	Remarques diverses	56
3.1.4	Variabes aléatoires à valeurs entières	58
3.2	Universalité et points fixes de transformations	61
3.2.1	Situation générique	62
3.2.2	Distribution centrée	64
3.3	Marche au hasard et mouvement brownien	66
3.3.1	Marche dans l'espace continu	67
3.3.2	Invariance par translation et localité	67
3.3.3	Fonction génératrice des cumulants	69
3.3.4	Marche au hasard : comportement asymptotique	70
3.3.5	Limite du temps continu	71
3.3.6	Corrections à la limite continue	72
3.3.7	Marche au hasard sur réseau	73
3.3.8	Séries de Fourier	75
3.3.9	Comportement asymptotique. Limite continue	76
3.3.10	Dilatation de l'échelle des temps et points fixes	78
3.4	Marche au hasard : remarques complémentaires	79
3.4.1	Distribution asymptotique	79
3.4.2	Équilibre détaillé	80
3.5	Mouvement brownien et intégrale de chemin	81
4	Mécanique statistique classique : une dimension	89
4.1	Interactions de proches voisins. Matrice de transfert	90
4.1.1	Interactions de proches voisins	91
4.1.2	Matrice de transfert et fonction de partition	92
4.1.3	Espace de Hilbert et matrice de transfert	92
4.2	Fonctions de corrélation	94
4.2.1	Fonction à un point	94
4.2.2	Fonction de corrélation à p points	95
4.3	Limite thermodynamique	95
4.3.1	La fonction de partition	95
4.3.2	Fonction à un point	96
4.3.3	Fonction à deux points et longueur de corrélation	97
4.4	Fonctions connexes et propriété d'amas	98
4.4.1	Variable moyenne et limite thermodynamique	100
4.5	Modèles statistiques : exemples simples	101

4.6	Le modèle gaussien	103
4.6.1	Matrice de transfert gaussienne : propriétés algébriques	104
4.6.2	Matrice de transfert. Vecteurs et valeurs propres	106
4.6.3	Fonction de partition. Fonctions de corrélation	107
4.7	Modèle gaussien : limite continue	109
4.7.1	Limite continue et hamiltonien quantique	109
4.7.2	Décimation et limite continue	111
4.8	Modèles plus généraux : limite continue	113
5	Limite continue et intégrale de chemin	121
5.1	Intégrale de chemin gaussienne	121
5.1.1	Fonctionnelle génératrice. Dérivée fonctionnelle	123
5.1.2	Fonctions de corrélations gaussiennes	125
5.1.3	Calcul de l'intégrale gaussienne	126
5.2	Corrélations gaussiennes. Théorème de Wick	128
5.3	Mesure gaussienne perturbée	129
5.4	Calculs perturbatifs : exemples	131
5.4.1	Fonction de partition	131
5.4.2	Fonctions de corrélation	132
6	Systèmes ferromagnétiques. Corrélations	137
6.1	Systèmes ferromagnétiques : définition	138
6.1.1	Distribution de spin moyen et énergie libre	139
6.1.2	Transformation de Legendre	140
6.1.3	Distribution du spin moyen et potentiel thermodynamique	142
6.2	Fonctions de corrélation. Représentation de Fourier	143
6.2.1	Fonctions connexes et propriété d'amas	144
6.2.2	Invariance par translation et représentation de Fourier	145
6.3	Transformation de Legendre et fonctions de vertex	147
6.3.1	Transformation de Legendre : généralisation	147
6.3.2	Fonctions de vertex	150
6.3.3	Modèle gaussien	151
6.4	Transformation de Legendre et méthode du col	152
6.5	Fonctions de vertex à deux et quatre points	153
7	Transitions de phase : généralités et exemples	157
7.1	Température infinie ou spins indépendants	160
7.1.1	Modèle à un site	160
7.1.2	Spins indépendants	162
7.2	Transitions de phase en dimension infinie	163
7.2.1	Distribution de spin moyen. Fonctions thermodynamiques	164
7.2.2	Limites de basse et haute température	166
7.2.3	Distribution du spin moyen et transition de phase . . .	167

7.3	Universalité en dimension infinie	169
7.4	Transformations, points fixes et universalité	172
7.5	Interactions de portée finie en dimension finie	174
7.5.1	Symétries discrètes : le modèle d'Ising	175
7.5.2	Symétries continues : l'exemple du groupe orthogonal	176
7.6	Modèle d'Ising : matrice de transfert	178
7.6.1	Matrice de transfert	178
7.6.2	Limite de dimension transverse infinie : transitions de phase	180
7.7	Symétries continues et matrice de transfert	183
7.8	Symétries continues et modes de Goldstone	185
8	Approximation quasi-gaussienne : universalité, dimension critique	189
8.1	Interactions à deux spins de courte portée	191
8.2	Le modèle gaussien : la fonction à deux points	194
8.2.1	Quantités homogènes	195
8.2.2	Fonction à deux points	196
8.2.3	Le comportement critique	197
8.2.4	Domaine critique	198
8.3	Modèle gaussien et marche au hasard	199
8.4	Modèle gaussien et intégrale de champ	200
8.4.1	Maximum de l'intégrand et fonction à deux points	201
8.4.2	Intégration gaussienne	203
8.4.3	Calcul explicite de la fonction à deux points	203
8.4.4	Réseau et limite continue	205
8.5	Approximation quasi-gaussienne	205
8.6	La fonction à deux points : universalité	207
8.7	Approximation quasi-gaussienne et théorie de Landau	210
8.8	Symétries continues et modes de Goldstone	212
8.9	Corrections à l'approximation quasi-gaussienne	214
8.9.1	Calcul de la correction	214
8.9.2	Le comportement critique	217
8.10	Approximation de champ moyen et corrections	220
8.10.1	Représentation de spins moyens et méthode du col	220
8.10.2	Méthode du col : un paramètre de développement	222
8.11	Points tricritiques	224
9	Groupe de renormalisation : formalisme général	231
9.1	Théorie statistique des champs. Hamiltonien de Landau	233
9.1.1	Théorie statistique des champs effective	233
9.1.2	Hamiltonien de Landau	234
9.2	Fonctions de corrélation connexes. Fonctions de vertex	235
9.3	Le groupe de renormalisation : idée générale	237
9.3.1	Équations de groupe de renormalisation	237

9.3.2	Fonctions génératrices et fonctions de vertex	238
9.3.3	Hamiltonien de point fixe	240
9.4	Flots des hamiltoniens : points fixes et stabilité	241
9.4.1	Points fixes et flot linéarisé	242
9.4.2	Classification des vecteurs propres	243
9.4.3	EGR : autre forme	244
9.4.4	Le domaine critique : propriétés d'échelle	245
9.5	Le point fixe gaussien	246
9.5.1	Le point fixe gaussien	247
9.5.2	Hamiltonien quadratique isotrope général	248
9.6	Perturbations propres : analyse générale	250
9.6.1	Perturbations propres	250
9.6.2	Représentation de Fourier	252
9.7	Un point fixe non gaussien : le développement en ε	253
9.7.1	Points fixes	253
9.7.2	Autres vecteurs propres	256
9.8	Valeurs propres et dimensions des polynômes locaux	258
10	Groupe de renormalisation perturbatif : calculs explicites	261
10.1	Hamiltonien critique et développement perturbatif	262
10.2	Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle	264
10.3	Point fixe et comportement critique	267
10.3.1	La fonction à deux points	267
10.3.2	La fonction à quatre points	268
10.3.3	Point fixe	270
10.3.4	La dimension du champ à l'ordre ε^2	271
10.4	Le domaine critique	273
10.4.1	Fonction à deux points	273
10.4.2	Groupe de renormalisation	274
10.4.3	Fonction à deux points : comportement d'échelle dans le domaine critique	276
10.5	Modèle avec symétrie orthogonale $O(N)$	277
10.6	Groupe de renormalisation près de la dimension 4	279
10.6.1	Hamiltonien critique et EGR	279
10.6.2	Domaine critique	280
10.7	Quantités universelles : résultats numériques	282
11	Théories des champs σ^4 : champ à N composantes	287
11.1	GR : remarques générales	288
11.2	Flots de gradient	289
11.2.1	Reparamétrisation	290
11.2.2	Flots et variation du potentiel	290
11.2.3	Points fixes et stabilité	291

11.3	Modèle avec anisotropie cubique	293
11.3.1	Groupe de renormalisation et points fixes	294
11.3.2	Flot linéarisé et valeurs propres	295
11.4	Expressions générales explicites : étude détaillée	296
11.4.1	Groupe de renormalisation	297
11.4.2	Stabilité du point fixe isotrope	298
11.4.3	Flots de gradients : points fixes, stabilité et dimension du champ	299
11.5	Exercice : modèle général à deux paramètres	302
12	Théorie statistique des champs :	
	développement perturbatif	307
12.1	Fonctionnelles génératrices	308
12.2	Théorie des champs gaussienne. Théorème de Wick	309
12.3	Développement perturbatif	311
12.3.1	Développement perturbatif	312
12.3.2	Diagrammes de Feynman : boucles	313
12.3.3	Diagrammes connexes et 1-irréductibles	314
12.3.4	Exemple : l'interaction σ^4	315
12.4	Développement en nombre de boucles	318
12.4.1	Ordre dominant : diagrammes en arbre	319
12.4.2	Ordre suivant : diagrammes à une boucle	320
12.5	Prolongement et régularisation dimensionnels	322
12.5.1	Prolongement dimensionnel	322
12.5.2	Régularisation dimensionnelle	323
12.5.3	Exemples	325
13	Théorie des champs σ^4 près de la dimension 4	331
13.1	Hamiltonien effectif. Renormalisation	332
13.1.1	Hamiltonien effectif	333
13.1.2	Renormalisation gaussienne	333
13.1.3	Analyse dimensionnelle et dimension critique	334
13.1.4	Théorème de renormalisation	336
13.2	Équations de groupe de renormalisation	338
13.2.1	EGR pour la théorie critique	339
13.2.2	Solution perturbative de l'EGR	340
13.3	Solution des EGR : le développement en ε	342
13.3.1	Solution générale	342
13.3.2	Calculs à l'ordre d'une boucle : point fixe et lois d'échelle	344
13.3.3	La fonction $\eta(g)$ à deux boucles et l'exposant η	346
13.4	Interaction effective et interaction renormalisée	348
13.5	Le domaine critique au-dessus de T_c	350
13.5.1	Solution des EGR	351
13.5.2	Fonctions à aimantation fixée ou au-dessous de T_c	353

14 Théorie $(\phi^2)^2$ avec symétrie $O(N)$: limite $N \rightarrow \infty$	355
14.1 Préliminaires algébriques	356
14.2 Intégrale sur le champ ϕ : le déterminant	357
14.2.1 Le déterminant : définition perturbative	358
14.2.2 Premiers diagrammes à une boucle : discussion	359
14.3 Limite $N \rightarrow \infty$: le domaine critique	361
14.4 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ pour $N \rightarrow \infty$	364
14.5 Partie singulière de l'énergie libre et équation d'état	367
14.6 Les fonctions à deux points $\langle \lambda \lambda \rangle$ et $\langle \phi^2 \phi^2 \rangle$	369
14.7 Groupe de renormalisation et corrections aux lois d'échelles	372
14.7.1 Les fonctions du groupe de renormalisation	372
14.7.2 Corrections dominantes aux relations d'échelle	373
14.8 Le développement en $1/N$	375
14.8.1 Analyse dimensionnelle	375
14.8.2 Application : développement perturbatif, singularités infrarouges et comportement à grande impulsion	376
14.9 L'exposant η à l'ordre $1/N$	377
14.10 Le modèle σ non linéaire	378
15 Le modèle σ non linéaire	381
15.1 Le modèle σ non linéaire sur réseau	382
15.2 Développement de basse température	383
15.2.1 Paramétrisation	384
15.2.2 Développement perturbatif	386
15.2.3 Point fixe gaussien et perturbations	387
15.3 Limite continue formelle	389
15.4 Régularisation	390
15.5 Divergences d'impulsion nulle ou infrarouges	391
15.6 Groupe de renormalisation	393
15.6.1 Renormalisation et EGR	393
15.6.2 Calculs à l'ordre d'une boucle	395
15.7 Solution des EGR. Points fixes	397
15.7.1 Points fixes	398
15.7.2 Intégration des EGR : $d > 2, g < g^*$	399
15.8 Fonctions de corrélation : forme d'échelle	400
15.9 Le domaine critique : exposants critiques	402
15.10 Dimension 2	403
15.10.1 Le modèle non-abélien	404
15.10.2 Le cas abélien $N = 2$	405
15.11 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ à basse température	407

16 Groupe de renormalisation fonctionnel	411
16.1 Intégration partielle et variation du hamiltonien	412
16.1.1 Intégration partielle	412
16.1.2 Forme différentielle	414
16.1.3 Évolution du hamiltonien	416
16.1.4 Fonctionnelle connexe et solution formelle	417
16.1.5 Fonctions de corrélation	419
16.1.6 Renormalisation du champ	420
16.2 Intégration sur les modes de grande impulsion et EGR	420
16.2.1 EGR	421
16.2.2 Représentation de Fourier	422
16.2.3 Développement en puissances du champ	423
16.2.4 Fonctions de corrélation	424
16.3 Solution perturbative : théorie ϕ^4	426
16.4 EGR : forme standard	430
16.5 Dimension 4	433
16.5.1 Conditions de renormalisation. Fonctions β et η	433
16.5.2 Solution des EGR à l'ordre g	435
16.5.3 Solution des EGR à l'ordre g^2	435
16.6 Point fixe : développement en ε	439
16.7 Stabilité locale du point fixe	441
16.7.1 Point fixe gaussien	442
16.7.2 Dimension $d = 4 - \varepsilon$: perturbations ϕ^2 et ϕ^4	444
16.7.3 Perturbations brisant la symétrie \mathbb{Z}_2	445
Appendice A : Compléments techniques	447
A.1 Fonctions Γ , ψ , δ	447
A.1.1 Distribution de Dirac	448
A.2 Le propagateur massif en dimension 2	449
A.3 Déterminants d'opérateurs	449
A.4 Le groupe orthogonal	450
A.5 Transformation de Fourier : décroissance et régularité	451
A.5.1 Mesures positives discrètes et séries de Fourier	451
A.5.2 Transformation de Fourier	455
Appendice B : Transitions de phase : généralités	459
B.1 Fondamental de la matrice de transfert	459
B.2 Paramètre d'ordre et propriété d'amas	460
B.3 Dynamiques stochastiques et transitions de phase	462
Appendice C : Développement en $1/N$: quelques calculs	465
C.1 Diagramme de Feynman à une boucle	465
C.2 La fonction à deux points à l'ordre $1/N$ pour $u \rightarrow 0$	466

Appendice D : Groupe de renormalisation fonctionnel :	
compléments	469
D.1 GRF et équations de champ	469
D.2 GRF : transformation de Legendre	472
D.3 GRF et régularisation dimensionnelle	475
Index	477