

Table des matières

Introduction	1
 Partie I – Intégration des fonctions d’une variable réelle	
Chapitre 1 – Quelques rappels d’analyse	7
1.1. Nombres réels	7
1.2. Complétude de \mathbf{R}	9
1.3. Topologie de \mathbf{R}	10
1.4. Continuité et continuité uniforme	12
1.5. Dérivabilité et inégalité des accroissements finis	13
1.6. Modes de convergence des suites et séries de fonctions	15
1.7. Appendice : les nombres réels d’Eudoxe	17
 Chapitre 2 – Des aires aux primitives, et <i>vice versa</i>	 23
2.1. Intégrale et aire	23
2.2. Intégrale et primitive	25
2.3. Appendice : calcul numérique d’une primitive par la méthode d’Euler	28
 Chapitre 3 – Fonctions intégrables, intégrale	 33
3.1. Le lemme de Cousin	33
3.2. Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	36
3.3. Premiers exemples de fonctions intégrables, intégrales de Riemann et de Lebesgue	37
3.3.1. Fonctions constantes	37
3.3.2. Fonctions polynomiales	37
3.3.3. Fonctions intégrables au sens de Riemann	38
3.3.4. Deux fonctions non bornées, intégrale de Lebesgue	40

3.4. Manipulations de jauges et de subdivisions	41
3.4.1. Coupage-collage d'une subdivision le long de ses points de marquage ..	41
3.4.2. Forçage des points de marquage	41
3.4.3. Application : les fonctions en escalier sont intégrables	42
3.5. Appendice : utilisation des jauges en analyse réelle	43

Chapitre 4 – Propriétés élémentaires de l'intégrale **49**

4.1. Critère de Cauchy, applications	49
4.2. L'intégrale comme forme linéaire	52
4.3. La relation de Chasles	53
4.4. Inégalités de Cauchy-Schwarz, Hölder et Minkowski	55
4.5. Appendice : méthodes numériques de calcul d'intégrales	56

Chapitre 5 – Intégrales et primitives **61**

5.1. Résultats généraux	61
5.2. Quelques méthodes pratiques de calcul d'intégrales et de primitives	64
5.2.1. Primitives usuelles	64
5.2.2. Intégration des fractions rationnelles	64
5.2.3. Applications de la formule d'intégration par parties	69
5.2.4. Applications de la formule de changement de variable	71
5.3. Appendice : irrationalité de e et de π	72

Chapitre 6 – Intégrales impropres **77**

6.1. Intégrabilité et intégrale sur $[a, +\infty[$	77
6.2. Extension de quelques théorèmes aux intégrales impropres	79
6.3. Critères de convergence	80
6.4. Appendice : preuve du théorème de Hake	83

Partie II – Intégrale de Lebesgue, théorèmes de convergence et séries de Fourier

Chapitre 7 – Ensembles de mesure nulle et notion de « presque partout » **87**

7.1. Généralités	87
7.2. Intégrale et ensembles de mesure nulle	88
7.3. L'ensemble triadique de Cantor et l'escalier du diable	90
7.4. Appendice : lemme de Vitali, application à la mesure nulle	93
7.4.1. Lemme de Vitali	94
7.4.2. Mesure nulle et intégrale	97

Chapitre 8 – Les théorèmes de convergence. Applications	101
8.1. Le lemme de Henstock	101
8.2. Fonctions Lebesgue-intégrables	104
8.3. Théorèmes de convergence	107
8.4. Intégrales dépendant d'un paramètre et dérivation sous le signe somme	111
8.5. Appendice : le théorème de dérivation de Lebesgue	114
Chapitre 9 – Séries de Fourier	117
9.1. L'équation des cordes vibrantes	118
9.2. Convergence des séries de Fourier	123
9.2.1. Coefficients et série de Fourier d'une fonction	124
9.2.2. Décroissance rapide des coefficients de Fourier des fonctions régulières	126
9.2.3. Le lemme de Lebesgue	127
9.2.4. Le noyau de Dirichlet	130
9.2.5. Application : calcul d'une somme de nature arithmétique	133
9.3. Appendice : convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction continue	134

**Partie III – Intégration des fonctions de plusieurs variables réelles
et espaces de Lebesgue**

Chapitre 10 – Intégration des fonctions de plusieurs variables	141
10.1. Pavés, subdivisions, sommes de Riemann	142
10.2. Intégration sur un ouvert quelconque	144
10.3. Extension des résultats vrais dans \mathbf{R} au cas de \mathbf{R}^d	146
10.4. Les théorèmes de Fubini et de Tonelli	148
10.5. La formule de changement de variable	153
10.5.1. Prélude : le cas linéaire	154
10.5.2. Fugue : le cas général	155
10.6. La formule de Green-Riemann	159
10.6.1. Chemins	159
10.6.2. Domaines	163
10.6.3. 1-formes différentielles	164
10.6.4. Intégration sur un chemin	165
10.6.5. La formule de Green-Riemann	167
10.6.6. La formule de la divergence	170

10.7. Appendice : preuve de la formule de changement de variable	172
10.7.1. Le théorème de P. Lax	173
10.7.2. Application : le théorème du point fixe de Brouwer	176
10.7.3. Changement de variable : la formule classique	178
10.7.4. Un cas pathologique pour le changement de variable	181

Chapitre 11 – Mesure de Lebesgue, espaces L^p , applications **183**

11.1. Fonctions mesurables	183
11.2. Ensembles mesurables, mesure de Lebesgue	186
11.3. Intégrale sur des parties mesurables	191
11.4. La convergence monotone revisitée	193
11.5. Complétude des espaces L^p	195
11.6. Théorèmes de densité	201
11.7. La théorie L^2 des séries de Fourier	205
11.7.1. Géométrie de l'espace hilbertien L^2	206
11.7.2. Convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction de classe \mathcal{C}^1	210
11.7.3. Séries de Fourier des fonctions de L^2	211
11.8. Appendice : transformations ergodiques et inégalités maximales	212

Partie IV – Exercices, fascicule de résultats

Chapitre 12 – Exercices **223**

12.1. Chapitre 1	223
12.2. Chapitres 2, 3 et 4	232
12.3. Chapitres 5 et 6	235
12.4. Chapitres 7 et 8	239
12.5. Chapitre 9	249
12.6. Chapitre 10	250
12.7. Chapitre 11	252

Chapitre 13 – Fascicule de résultats **265**

Bibliographie **283**

Index **285**