

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Partie I. Théorie ergodique	
1. Théorème ergodique en moyenne	7
1. Introduction.....	7
2. Théorème ergodique en moyenne.....	8
3. Application à la mécanique classique.....	12
4. Exercices.....	16
5. Commentaires.....	17
2. Théorème ergodique presque partout	19
1. Introduction.....	19
2. Théorème ergodique ponctuel.....	20
3. Ergodicité du décalage.....	24
4. Exercices.....	27
5. Commentaires.....	27
3. Mélange	31
1. Introduction.....	31
2. Définition du mélange.....	32
3. Exemple de la multiplication par 2.....	33
4. Exemple du décalage de Bernoulli.....	34
5. Exemple des endomorphismes des tores.....	34
6. Exercices.....	37
7. Commentaires.....	38
4. L'argument de Hopf	41
1. Introduction.....	41
2. Feuilletage stable et fonctions invariantes.....	42
3. Application aux automorphismes du tore.....	44
4. Flots sur les quotients de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$	46
5. Exercices.....	49
6. Commentaires.....	50

Partie II. Systèmes dynamiques

5. Dynamique topologique	55
1. Introduction.....	55
2. Transitivité et mélange topologique.....	56
3. Points récurrents et ensemble non errant.....	58
4. Exercices.....	61
5. Commentaires.....	62
6. Non-errance	65
1. Introduction.....	65
2. Non-errance.....	66
3. Exemples.....	67
4. Graphe associé à la dynamique.....	69
5. Exercices.....	71
6. Commentaires.....	72
7. Conjugaison	75
1. Introduction.....	75
2. Conjugaison et semi-conjugaison.....	76
3. Fonctions elliptiques.....	78
4. Le pendule simple.....	79
5. Les exemples de Schröder (1871).....	79
6. Exercices.....	82
7. Commentaires.....	83
8. Linéarisation	85
1. Introduction.....	85
2. Le théorème du point fixe hyperbolique.....	86
3. Théorème de linéarisation, cas lipschitzien.....	87
4. Théorème de linéarisation, cas différentiable.....	88
5. Exercices.....	92
6. Commentaires.....	93
9. Un attracteur étrange	97
1. Introduction.....	97
2. Perturbation d'un automorphisme du tore.....	98
3. Étude de la dynamique perturbée.....	100
4. Transitivité et mélange.....	102
5. Exercices.....	104
6. Commentaires.....	105

Partie III. Théorie de l'entropie

10. Entropie	109
1. Introduction.....	109
2. Définition de l'entropie.....	110
3. Propriétés de l'entropie.....	112
4. Partitions génératrices.....	113
5. Entropie et isomorphisme.....	115
6. Exercices.....	117
7. Commentaires.....	118
11. Entropie et théorie de l'information	121
1. Introduction.....	121
2. La notion d'information.....	122
3. Le jeu des questions et des réponses.....	125
4. Information et chaînes de Markov.....	125
5. Interprétation dans le cadre dynamique.....	127
6. Exercices.....	129
7. Commentaires.....	130
12. Calculs d'entropie	131
1. Introduction.....	131
2. Formule de Rokhlin.....	132
3. Entropie des décalages.....	134
4. Entropie des applications dilatantes.....	135
5. Exercices.....	138
6. Commentaires.....	139

Partie IV. Décomposition ergodique

13. Espaces de Lebesgue et isomorphisme	143
1. Introduction.....	143
2. Isomorphisme mesurable.....	144
3. Espace de Lebesgue.....	146
4. Théorème de Stone-Weierstraß mesurable.....	148
5. Exercices.....	150
6. Commentaires.....	151
14. Décomposition ergodique	155
1. Introduction.....	155
2. Désintégration.....	156
3. Décomposition ergodique.....	158
4. Exercices.....	162
5. Commentaires.....	163

15. Partitions mesurables et σ-algèbres.....	165
1. Introduction.....	165
2. Partitions mesurables.....	166
3. σ -Algèbre associée à une partition.....	167
4. Partition associée à une σ -algèbre.....	167
5. Facteurs et partitions.....	169
6. σ -Algèbres et algèbres de fonctions.....	170
7. Correspondance de Rokhlin.....	171
8. Exercices.....	173

Partie V. Annexes

A. Convergence faible.....	177
1. Convergence dans un espace de Hilbert.....	177
2. Compacité séquentielle faible.....	178
3. Fermés convexes.....	179
B. Espérance conditionnelle.....	181
1. Définition de l'espérance conditionnelle.....	181
2. Propriétés de l'espérance conditionnelle.....	182
3. Théorème de convergence L^2 des martingales.....	182
C. Topologie et mesure.....	185
1. Séparabilité.....	185
2. Support d'une mesure.....	185
3. Densité dans les espaces L^p	186
4. Régularité intérieure.....	188
5. Exercices.....	189
Bibliographie.....	191
Notations.....	193
Index des auteurs.....	195
Index terminologique.....	197