

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1 – Analyse vectorielle</b>	<b>1</b>
1.1. Les opérateurs différentiels	1
1.1.1. Champ scalaire et champ vectoriel	1
1.1.2. Opérateur gradient	2
1.1.3. Surface et gradient	3
1.1.4. Opérateur divergence	4
1.1.5. Opérateur rotationnel	6
1.1.6. Opérateur laplacien	7
1.1.7. Relations entre les opérateurs différentiels	8
1.2. Les potentiels	8
1.2.1. Potentiel scalaire	8
1.2.2. Potentiel vecteur	9
1.3. Les intégrales curvilignes, de surface et de volume	9
1.3.1. Intégrale curviligne. Circulation d'un champ vectoriel	9
1.3.2. Intégrale de surface. Flux d'un champ vectoriel	11
1.3.3. Intégrale de volume	13
1.4. Le théorème de STOKES	13
1.5. Le théorème d'OSTROGRADSKY	16
1.6. Exercices	20

<b>Chapitre 2 – Les équations différentielles</b>	<b>23</b>
2.1. Position du problème. Définitions .....	23
2.2. Existence et unicité des solutions .....	24
2.2.1. Equation du 1 <sup>er</sup> ordre .....	24
2.2.2. Equation du 2 <sup>e</sup> ordre .....	25
2.3. Généralités sur les équations du 1 <sup>er</sup> ordre .....	26
2.4. Les équations à variables séparées et séparables .....	26
2.5. Les équations homogènes du 1 <sup>er</sup> ordre .....	27
2.6. Les équations se ramenant aux équations homogènes .....	28
2.7. Les équations linéaires du 1 <sup>er</sup> ordre .....	29
2.8. L'équation de BERNOULLI .....	31
2.9. Les équations aux différentielles totales .....	31
2.10. Facteur intégrant .....	33
2.11. Solution singulière d'une équation du 1 <sup>er</sup> ordre .....	34
2.12. Généralités sur les équations d'ordre supérieur à 1 .....	36
2.13. Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$ .....	36
2.14. Exemples d'équations du 2 <sup>e</sup> ordre se ramenant à des équations du 1 <sup>er</sup> ordre .....	37
2.15. Les équations linéaires homogènes .....	38
2.15.1. Définitions .....	38
2.15.2. Propriétés .....	39
2.16. Les équations linéaires homogènes du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants .....	42
2.17. Généralisation à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $N$ à coefficients constants .....	43
2.18. Les équations linéaires non homogènes du 2 <sup>e</sup> ordre .....	44
2.19. Les équations linéaires non homogènes du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants .....	46
2.20. Application à un circuit électrique .....	48
2.21. Les systèmes d'équations linéaires à coefficients constants .....	50
2.22. L'intégration approchée des équations différentielles .....	54
2.22.1. L'intégration approchée d'une équation du 1 <sup>er</sup> ordre .....	54
2.22.2. Méthode de la série de TAYLOR .....	55
2.22.3. Méthode de RUNGE et KUTTA .....	56
2.23. Exercices .....	58
 <b>Chapitre 3 – Fonctions d'une variable complexe</b>	 <b>65</b>
3.1. Définitions et propriétés élémentaires .....	65
3.1.1. Continuité .....	66
3.1.2. Fonction uniforme .....	66

3.1.3.	Fonction analytique .....	66
3.1.4.	Critère pour une fonction analytique .....	68
3.1.5.	Mise d'une fonction analytique sous la forme $Z = f(z)$ .....	68
3.1.6.	Quelques fonctions analytiques élémentaires .....	69
3.2.	Points singuliers des fonctions analytiques. Fonctions holomorphes .....	70
3.3.	Fonctions multiformes .....	70
3.3.1.	Exemples .....	70
3.3.2.	Uniformisation des fonctions multiformes à l'aide de coupures .....	72
3.4.	Intégrales des fonctions analytiques .....	74
3.4.1.	Intégrale curviligne d'une fonction complexe .....	74
3.4.2.	Théorème de CAUCHY .....	76
3.4.3.	Extension du théorème de CAUCHY .....	77
3.5.	Séries entières dans le domaine complexe .....	78
3.6.	Formule de CAUCHY .....	80
3.7.	Développement d'une fonction holomorphe en série de TAYLOR .....	81
3.8.	Les zéros des fonctions analytiques .....	83
3.9.	Prolongement analytique d'un développement en série de TAYLOR .....	84
3.10.	Différents types de points singuliers .....	85
3.11.	Développement en série de LAURENT .....	85
3.12.	Intégration par la méthode des résidus .....	88
3.12.1.	Théorème des résidus .....	88
3.12.2.	Calcul des résidus relatifs aux pôles .....	89
3.12.3.	Applications au calcul d'intégrales définies réelles .....	91
3.12.4.	Intégration des fonctions multiformes .....	96
3.13.	Transformation conforme .....	98
3.13.1.	Définition .....	98
3.13.2.	Systèmes orthogonaux du plan .....	101
3.13.3.	Applications physiques .....	102
3.14.	Exercices .....	103
<b>Chapitre 4 – Fonctions spéciales</b>		<b>107</b>
4.1.	La fonction bêta .....	107
4.2.	La fonction gamma et la fonction factorielle .....	108
4.3.	Relation entre les fonctions bêta et gamma .....	109
4.4.	La formule des compléments .....	111
4.5.	Propriétés de la fonction factorielle .....	112
4.5.1.	Fonctions gamma et factorielle pour les valeurs négatives de l'argument .....	112
4.5.2.	Représentation graphique de la fonction factorielle .....	113

4.5.3.	La fonction factorielle pour les nombres demi-entiers .....	114
4.5.4.	La formule de STIRLING .....	114
4.6.	La fonction d'erreur .....	116
4.6.1.	Définition et propriétés élémentaires .....	116
4.6.2.	Développement asymptotique de la fonction d'erreur .....	117
4.7.	Exercices .....	119
<b>Chapitre 5 – La transformation de LAPLACE</b>		<b>123</b>
5.1.	Définition. Original et image .....	123
5.2.	Image d'un monôme .....	124
5.3.	Images des fonctions exponentielle et trigonométriques .....	125
5.4.	Les correspondances opératoires .....	126
5.4.1.	Le théorème du déplacement .....	126
5.4.2.	La multiplication de la variable par une constante .....	126
5.4.3.	La dérivation .....	127
5.5.	Le produit de convolution .....	128
5.6.	Exemples de transformées de LAPLACE .....	129
5.7.	La fonction de DIRAC et son image .....	132
5.8.	Applications à la résolution d'équations différentielles .....	133
5.9.	Oscillateur harmonique amorti soumis à une force imposée .....	134
5.10.	Exercices .....	136
<b>Chapitre 6 – Analyse de FOURIER</b>		<b>141</b>
6.1.	Séries de FOURIER .....	141
6.2.	Exemples de développement en série de FOURIER .....	143
6.3.	Séries de FOURIER des fonctions de période spatiale $L$ ou temporelle $T$ ...	144
6.4.	Série de FOURIER d'une fonction non périodique .....	146
6.5.	Forme complexe du développement .....	147
6.6.	Intégrale de FOURIER .....	149
6.7.	Les correspondances opératoires .....	152
6.8.	Exemples de transformées de FOURIER .....	154
6.9.	Transformée de FOURIER des fonctions de plusieurs variables .....	156
6.10.	Exercices .....	159
<b>Chapitre 7 – Les équations aux dérivées partielles</b>		<b>163</b>
7.1.	Introduction .....	163
7.2.	Les équations linéaires homogènes à coefficients constants .....	163
7.3.	Equation de propagation des ondes .....	164
7.3.1.	Milieu infini à une dimension .....	165

7.3.2.	Milieu fini à une dimension. Equation des cordes vibrantes .....	166
7.3.3.	Equation de propagation à trois dimensions .....	169
7.4.	L'équation de diffusion .....	172
7.4.1.	Diffusion à une dimension .....	173
7.4.2.	Diffusion à trois dimensions .....	175
7.5.	L'équation de LAPLACE .....	176
7.5.1.	Coordonnées sphériques .....	176
7.5.2.	Coordonnées cylindriques .....	177
7.6.	L'équation de POISSON .....	178
7.7.	La fonction de GREEN .....	179
7.8.	Exercices .....	180
<b>Chapitre 8 – Algèbre linéaire, calcul matriciel</b>		<b>183</b>
8.1.	Les opérateurs .....	183
8.2.	Espaces vectoriels et opérateurs linéaires .....	185
8.2.1.	Les espaces vectoriels .....	185
8.2.2.	Opérateur linéaire sur un espace vectoriel .....	185
8.3.	Définition des matrices .....	186
8.4.	Combinaisons de matrices .....	187
8.4.1.	Addition et multiplication par un scalaire .....	187
8.4.2.	Multiplication de deux matrices .....	188
8.4.3.	Sous-matrices .....	189
8.4.4.	Trace d'une matrice .....	189
8.4.5.	Produit direct de matrices .....	190
8.5.	Matrices particulières .....	190
8.5.1.	Matrice nulle, unité, diagonale .....	190
8.5.2.	Matrice transposée, adjointe, hermitique, unitaire .....	191
8.6.	Calcul des déterminants .....	192
8.7.	Inverse d'une matrice carrée .....	194
8.8.	Application à la résolution des systèmes d'équations linéaires .....	196
8.9.	Matrices équivalentes .....	198
8.10.	Valeurs propres, vecteurs propres, équation caractéristique d'une matrice .....	199
8.10.1.	Recherche des valeurs propres .....	199
8.10.2.	Recherche des vecteurs propres .....	200
8.11.	Théorème de CAYLEY-HAMILTON .....	203
8.12.	Application aux quadripôles électriques .....	206
8.13.	Espace vectoriel réel $R^n$ .....	209
8.13.1.	Définition, produit scalaire et bases .....	209

8.13.2.	Processus d'orthogonalisation de SCHMIDT .....	210
8.13.3.	Représentation d'un opérateur linéaire .....	211
8.13.4.	Changement de base .....	212
8.13.5.	Application aux rotations planes .....	213
8.13.6.	Application aux rotations dans l'espace : angles d'EULER .....	214
8.14.	Espace vectoriel complexe $C^n$ .....	216
8.14.1.	Généralités, produit scalaire hermitique .....	216
8.14.2.	Matrices hermitiques .....	217
8.14.3.	Matrices unitaires .....	220
8.15.	Formes quadratiques et applications .....	221
8.15.1.	Diagonalisation d'une forme quadratique réelle .....	221
8.15.2.	Application à l'étude des petits mouvements .....	222
8.16.	Espace vectoriel et algèbre de DIRAC .....	225
8.16.1.	Vecteurs droits et gauches .....	225
8.16.2.	Opérateurs Linéaires .....	228
8.16.3.	Commutateur de deux opérateurs .....	229
8.16.4.	Valeurs et vecteurs propres .....	230
8.16.5.	Produit ket-bra. Projecteurs. ....	231
8.16.6.	Changement de base .....	232
8.16.7.	Fonction d'opérateur hermitique .....	232
8.16.8.	Produit direct ou tensoriel .....	233
8.16.9.	Espaces à une infinité continue de dimensions .....	235
8.17.	Exercices .....	236
<b>Chapitre 9 – Les tenseurs</b>		<b>243</b>
9.1.	Introduction .....	243
9.2.	Tenseurs en coordonnées cartésiennes .....	244
9.2.1.	Définition des tenseurs .....	244
9.2.2.	Critère de tensorialité .....	246
9.3.	Cas particuliers .....	246
9.3.1.	Scalaire .....	246
9.3.2.	Vecteur polaire .....	247
9.3.3.	Tenseur de rang 2 .....	247
9.3.4.	Tenseur symétrique de rang 2 .....	247
9.3.5.	Exemples de tenseurs symétriques .....	248
9.3.6.	Tenseur antisymétrique de rang 2 .....	250
9.3.7.	Tenseur de rang 3 .....	251
9.4.	Principe de symétrie. Application aux propriétés physiques représentées par des tenseurs .....	253

9.5.	Les tenseurs en coordonnées non cartésiennes .....	255
9.5.1.	Covariance et contravariance .....	255
9.5.2.	Contraction des indices d'un tenseur .....	257
9.5.3.	Tenseur métrique .....	258
9.5.4.	Tenseurs antisymétriques .....	260
9.6.	Application à la relativité et aux équations de MAXWELL .....	261
9.6.1.	Les tenseurs en relativité .....	261
9.6.2.	Les équations de MAXWELL sous forme tensorielle .....	263
9.7.	Exercices .....	265
<b>Chapitre 10 – Les polynômes orthogonaux</b>		<b>269</b>
10.1.	Définitions .....	269
10.2.	Formules de récurrence .....	270
10.3.	Fonction génératrice .....	271
10.4.	Les polynômes de LEGENDRE .....	271
10.4.1.	Définition .....	271
10.4.2.	Orthogonalité .....	273
10.4.3.	Relations de récurrence. Equation de LEGENDRE .....	274
10.4.4.	Développement d'une fonction en série de $P_l(x)$ .....	276
10.5.	Fonctions de LEGENDRE associées .....	277
10.5.1.	Définition .....	277
10.5.2.	Relations d'orthogonalité .....	278
10.5.3.	Equation différentielle .....	279
10.5.4.	Relations de récurrence .....	279
10.6.	Les harmoniques sphériques .....	280
10.6.1.	Résolution de l'équation de LAPLACE en coordonnées sphériques ..	281
10.6.2.	Propriétés des harmoniques sphériques .....	284
10.6.3.	Développement d'une fonction en série des $Y_l^m$ .....	284
10.6.4.	Théorème d'addition des $Y_l^m$ .....	285
10.7.	Les polynômes d'HERMITE .....	286
10.7.1.	Définition .....	286
10.7.2.	Propriétés élémentaires des $H_n(x)$ .....	287
10.7.3.	Relations de récurrence .....	288
10.7.4.	Application à la résolution de l'équation de SCHRÖDINGER d'un oscillateur harmonique .....	289
10.8.	Les polynômes de LAGUERRE .....	290
10.8.1.	Définition. Propriétés élémentaires .....	290
10.8.2.	Relations de récurrence. Equation différentielle .....	291
10.9.	Exercices .....	293

<b>Chapitre 11 – Fonctions de BESSEL et applications</b>	<b>297</b>
11.1. L'équation différentielle de BESSEL .....	297
11.2. Fonctions de BESSEL de première et de deuxième espèce .....	298
11.2.1. Fonctions de BESSEL de première espèce .....	298
11.2.2. Relation entre $J_\nu$ et $J_{-\nu}$ .....	300
11.2.3. Fonctions de BESSEL de deuxième espèce .....	301
11.3. Forme intégrale des fonctions de BESSEL .....	302
11.4. Relations de récurrence .....	303
11.5. Fonctions de BESSEL d'indice entier et demi-entier .....	304
11.5.1. Fonctions de BESSEL d'indice entier .....	304
11.5.2. Fonctions de BESSEL d'indice demi-entier .....	306
11.6. Fonctions de HANKEL .....	307
11.7. Les fonctions de BESSEL modifiées .....	307
11.7.1. Fonctions $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ .....	307
11.7.2. Relations de récurrence des fonctions de BESSEL modifiées .....	309
11.7.3. Forme intégrale de $K_\nu(x)$ .....	311
11.8. Comportement des fonctions de BESSEL dans les cas limite .....	313
11.8.1. Faibles valeurs de l'argument .....	313
11.8.2. Comportement asymptotique des fonctions de BESSEL .....	314
11.9. Les fonctions de BESSEL sphériques .....	315
11.10. Applications des fonctions de BESSEL .....	318
11.10.1. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans le plan .....	318
11.10.2. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans l'espace .....	320
11.10.3. Ondes stationnaires dans le plan .....	321
11.10.4. Ondes stationnaires en symétrie sphérique .....	322
11.11. Exercices .....	323
<b>Chapitre 12 – Les relations de KRAMERS–KRONIG</b>	<b>327</b>
12.1. Valeur principale d'une intégrale .....	327
12.2. Valeur principale d'une fonction et fonction de DIRAC .....	328
12.3. Les relations de KRAMERS–KRONIG .....	329
12.4. Etude des systèmes à réponse linéaire .....	332
12.4.1. Définition .....	332
12.4.2. Exemples .....	332
12.4.3. Propriétés des systèmes linéaires .....	332
12.4.4. Excitation sinusoïdale .....	333
12.5. Application aux susceptibilités .....	334
12.6. Exercices .....	335

<b>Corrigés des exercices</b>	<b>337</b>
Exercices du chapitre 1 .....	337
Exercices du chapitre 2 .....	340
Exercices du chapitre 3 .....	348
Exercices du chapitre 4 .....	357
Exercices du chapitre 5 .....	361
Exercices du chapitre 6 .....	367
Exercices du chapitre 7 .....	374
Exercices du chapitre 8 .....	381
Exercices du chapitre 9 .....	393
Exercices du chapitre 10 .....	402
Exercices du chapitre 11 .....	407
Exercices du chapitre 12 .....	417
<b>Annexes</b>	<b>421</b>
I. Unicité des solutions d'une équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre .....	421
II. Formule de SIMPSON d'intégration .....	424
III. Les déterminants .....	425
IV. Tableau de transformées de LAPLACE .....	430
<b>Bibliographie</b>	<b>435</b>
<b>Index</b>	<b>437</b>