

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos</b> .....	<b>1</b>
<b>Notations et conventions</b> .....	<b>5</b>
<b>Partie I. Cohomologie des groupes et cohomologie galoisienne : généralités</b>	
<b>1. Cohomologie des groupes finis : propriétés de base</b> .....	<b>11</b>
1.1. Notion de $G$ -module.....	12
1.2. La catégorie des $G$ -modules.....	15
1.3. Les groupes de cohomologie $H^i(G, A)$ .....	18
1.4. Calcul de la cohomologie avec les cochaînes.....	23
1.5. Changement de groupe : restriction, corestriction, suite spectrale de Hochschild-Serre.....	26
1.6. Corestriction ; applications.....	33
1.7. Exercices.....	35
<b>2. Groupes modifiés à la Tate, cohomologie des groupes cycliques</b> .....	<b>39</b>
2.1. Les groupes de cohomologie modifiés de Tate.....	39
2.2. Changement de groupe. Transfert.....	43
2.3. Cohomologie d'un groupe cyclique.....	50
2.4. Quotient d'Herbrand.....	51
2.5. Cup-produits.....	53
2.6. Cup-produits pour la cohomologie modifiée.....	55
2.7. Exercices.....	63
<b>3. <math>p</math>-groupes, théorème de Tate-Nakayama</b> .....	<b>65</b>
3.1. Modules cohomologiquement triviaux.....	65
3.2. Théorème de Tate-Nakayama.....	70
3.3. Exercices.....	73

<b>4. Cohomologie des groupes profinis</b> .....	<b>75</b>
4.1. Notions de base sur les groupes profinis.....	75
4.2. $G$ -modules discrets.....	80
4.3. Cohomologie d'un $G$ -module discret.....	82
4.4. Exercices.....	88
<b>5. Dimension cohomologique</b> .....	<b>91</b>
5.1. Définitions, premiers exemples.....	91
5.2. Propriétés de la dimension cohomologique.....	93
5.3. Exercices.....	96
<b>6. Premières notions de cohomologie galoisienne</b> .....	<b>99</b>
6.1. Généralités.....	99
6.2. Théorème de Hilbert 90 et applications.....	100
6.3. Groupe de Brauer d'un corps.....	101
6.4. Dimension cohomologique d'un corps.....	102
6.5. Corps $C_1$ .....	104
6.6. Exercices.....	106

## Partie II. Corps locaux

<b>7. Rappels sur les corps locaux</b> .....	<b>111</b>
7.1. Anneaux de valuation discrète.....	111
7.2. Corps complet pour une valuation discrète.....	112
7.3. Extensions d'un corps complet.....	113
7.4. Théorie de Galois d'un corps complet pour une valuation discrète.....	115
7.5. Théorème de structure ; filtration du groupe des unités.....	116
7.6. Exercices.....	118
<b>8. Le groupe de Brauer d'un corps local</b> .....	<b>121</b>
8.1. Axiome du corps de classes local.....	121
8.2. Calcul du groupe de Brauer.....	122
8.3. Dimension cohomologique ; théorème de finitude.....	126
8.4. Exercices.....	128
<b>9. Corps de classes local : l'application de réciprocité</b> .....	<b>131</b>
9.1. Définition et principales propriétés.....	131
9.2. Théorème d'existence : lemmes préliminaires et cas d'un corps $p$ -adique.....	137
9.3. Exercices.....	141
<b>10. Dualité locale de Tate</b> .....	<b>143</b>
10.1. Module dualisant.....	143
10.2. Le théorème de dualité locale.....	147

10.3. Caractéristique d'Euler-Poincaré.....	149
10.4. Cohomologie non ramifiée.....	151
10.5. Du théorème de dualité au théorème d'existence.....	152
10.6. Exercices.....	154
<b>11. Corps de classes local : théorie de Lubin-Tate.....</b>	<b>157</b>
11.1. Groupes formels.....	157
11.2. Changement d'uniformisante.....	161
11.3. Corps associés aux points de torsion.....	164
11.4. Calcul de l'application de réciprocité.....	166
11.5. Théorème d'existence (cas général).....	168
11.6. Exercices.....	171
<b>Partie III. Corps globaux</b>	
<b>12. Rappels sur les corps globaux.....</b>	<b>175</b>
12.1. Définitions, premières propriétés.....	175
12.2. Extensions galoisiennes d'un corps global.....	179
12.3. Idèles, théorème d'approximation forte.....	180
12.4. Quelques compléments dans le cas d'un corps de fonctions..	187
12.5. Exercices.....	188
<b>13. Cohomologie des idèles : axiome du corps de classes.....</b>	<b>191</b>
13.1. Cohomologie du groupe des idèles.....	191
13.2. La seconde inégalité.....	194
13.3. Extensions de Kummer.....	199
13.4. Première inégalité et axiome du corps de classes.....	202
13.5. Preuve de l'axiome du corps de classes pour un corps de fon- ctions.....	207
13.6. Exercices.....	210
<b>14. Loi de réciprocité et théorème de Brauer-Hasse-Noether</b>	<b>213</b>
14.1. Existence d'une extension cyclique neutralisante.....	213
14.2. Invariant global et symbole de reste normique.....	217
14.3. Exercices.....	222
<b>15. Le groupe de Galois abélien d'un corps global.....</b>	<b>223</b>
15.1. Application de réciprocité et groupe des classes d'idèles.....	223
15.2. Le théorème d'existence global.....	226
15.3. Le cas du corps de fonctions.....	232
15.4. Corps de classes de rayons ; corps de classes de Hilbert.....	235
15.5. Groupes de Galois de ramification restreinte.....	241
15.6. Exercices.....	245

## Partie IV. Théorèmes de dualité

<b>16. Formations de classes.....</b>	<b>251</b>
16.1. Notion de formation de classes.....	251
16.2. La suite spectrale des Ext.....	254
16.3. Le théorème de dualité pour une formation de classes.....	262
16.4. $P$ -formations de classes.....	266
16.5. Du théorème d'existence au théorème de dualité pour un corps $p$ -adique.....	267
16.6. Compléments.....	269
16.7. Exercices.....	273
<b>17. Dualité de Poitou-Tate.....</b>	<b>277</b>
17.1. La $P$ -formation de classes associée à un groupe de Galois de ramification restreinte.....	277
17.2. Les groupes $\mathbf{P}_S^i(M)$ .....	279
17.3. Énoncé des théorèmes de Poitou-Tate.....	283
17.4. Preuve des théorèmes de Poitou-Tate (I) : calcul de deux groupes Ext.....	285
17.5. Preuve des théorèmes de Poitou-Tate (II) : calcul des Ext à valeurs dans $I_S$ et fin de la preuve.....	288
17.6. Exercices.....	292
<b>18. Quelques applications.....</b>	<b>299</b>
18.1. Nullité de certains $\text{III}^i$ .....	299
18.2. Dimension cohomologique stricte d'un corps de nombres....	306
18.3. Exercices.....	307

## Appendice

<b>Quelques résultats d'algèbre homologique.....</b>	<b>313</b>
A.1. Généralités sur les catégories.....	313
A.2. Foncteurs.....	316
A.3. Catégories abéliennes.....	318
A.4. Catégories de modules.....	322
A.5. Foncteurs dérivés.....	324
A.6. Ext et Tor.....	331
A.7. Suites spectrales.....	333
<b>Bibliographie.....</b>	<b>337</b>
<b>Index terminologique.....</b>	<b>341</b>