

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	I
Comment utiliser cet ouvrage pap-ebook	1
Introduction	3
Notations	7
Chapitre 1. Calcul différentiel	9
1.1. Introduction	9
1.1.1. Qu'est-ce que le calcul différentiel?	9
1.1.2. Résumé	11
1.2. Différentielles	12
1.2.1. Définition et propriétés de base	12
1.2.2. Trois exemples fondamentaux	15
1.2.3. Fonctions de classe C^p	17
1.3. Théorème des fonctions composées	18
1.4. Inversion locale	21
1.4.1. Difféomorphismes	21
1.4.2. Difféomorphismes locaux	23
1.4.3. Immersions, submersions	24
1.5. Sous-variétés	27
1.5.1. Propriétés de base	27
1.5.2. Exemples : sphères, tores, groupe orthogonal	30
1.5.3. Paramétrisations	31
1.5.4. Vecteurs tangents, espace tangent	32
1.6. Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire	35
1.7. Points critiques	38
1.8. Valeurs critiques	41

1.9. Calcul différentiel en dimension infinie	43
1.10. Commentaires	45
1.11. Exercices	47
Chapitre 2. Notions de base sur les variétés	53
2.1. Introduction	53
2.1.1. Un exemple typique : les droites du plan	53
2.1.2. Résumé	54
2.2. Cartes, atlas	55
2.2.1. Des variétés topologiques aux variétés lisses	55
2.2.2. Premiers exemples	58
2.3. Fonctions différentiables ; difféomorphismes	59
2.4. Le théorème de d'Alembert	63
2.5. Les espaces projectifs	64
2.6. L'espace vectoriel tangent ; applications	69
2.6.1. Espace tangent, application linéaire tangente	69
2.6.2. Difféomorphismes locaux, immersions, submersions, sous-variétés	71
2.7. Revêtements	75
2.7.1. Quotient d'une variété par un groupe	75
2.7.2. Simple connexité	82
2.8. Dénombrabilité à l'infini	84
2.9. Commentaires	86
2.10. Exercices	88
Chapitre 3. Du local au global	97
3.1. Introduction	97
3.2. Fonctions plateau ; plongements de variétés	98
3.3. Dérivations	103
3.3.1. Dérivations ponctuelles	103
3.3.2. Un autre point de vue sur l'espace tangent	105
3.3.3. Dérivations globales	107
3.4. Image d'un champ de vecteurs ; crochet	109
3.5. Le fibré tangent	111

3.5.1. La variété des vecteurs tangents	111
3.5.2. Fibrés vectoriels	113
3.5.3. Champs de vecteurs sur les variétés; hessien	115
3.6. Le flot d'un champ de vecteurs	117
3.7. Champs de vecteurs dépendant du temps	125
3.8. Variétés de dimension un	128
3.9. Commentaires	130
3.10. Exercices	134
Chapitre 4. Autour des groupes de Lie	143
4.1. Introduction	143
4.2. Champs invariants à gauche	144
4.3. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie	149
4.3.1. Propriétés de base; représentation adjointe	149
4.3.2. Des groupes aux algèbres	152
4.3.3. Des algèbres aux groupes	153
4.4. Digression sur les groupes topologiques	156
4.5. Groupes de Lie commutatifs	162
4.5.1. Un théorème de structure	162
4.5.2. Courbes elliptiques	164
4.6. Espaces homogènes	165
4.7. Commentaires	169
4.8. Exercices	171
Chapitre 5. Formes différentielles	177
5.1. Introduction	177
5.1.1. Des formes différentielles, pourquoi?	177
5.1.2. Résumé	178
5.2. Algèbre multilinéaire	179
5.2.1. Algèbre tensorielle	179
5.2.2. Algèbre extérieure	181
5.2.3. Application : la grassmannienne des 2-plans en dimension	185
5.3. Cas des ouverts d'un espace numérique	186

5.3.1. Formes de degré 1	186
5.3.2. Formes de degré quelconque	188
5.4. Différentielle extérieure	190
5.5. Produit intérieur, dérivée de Lie	194
5.6. Le lemme de Poincaré	199
5.6.1. Ouverts étoilés	199
5.6.2. Formes dépendant d'un paramètre	202
5.7. Formes différentielles sur une variété	203
5.8. Équations de Maxwell	207
5.8.1. Espace de Minkowski	208
5.8.2. Le champ électro-magnétique vu comme une forme différentielle	208
5.8.3. Champ électromagnétique et groupe de Lorentz	209
5.9. Commentaires	211
5.10. Exercices	214
Chapitre 6. Intégration et applications	223
6.1. Introduction	223
6.2. Orientation : des espaces vectoriels aux variétés	225
6.2.1. Atlas d'orientation	225
6.2.2. Formes volume	226
6.2.3. Revêtement des orientations	230
6.3. Intégration sur les variétés ; une première application	231
6.3.1. Intégrale d'une forme différentielle de degré maximum	231
6.3.2. Le théorème de la boule chevelue	233
6.4. Théorème de Stokes	235
6.4.1. Intégration sur les parties compactes	235
6.4.2. Les domaines réguliers et leur bord	236
6.4.3. La formule de Stokes dans tous ses états	239
6.5. Forme volume canonique d'une sous-variété de l'espace euclidien	243
6.6. Le théorème de Brouwer	247
6.7. Commentaires	250
6.8. Exercices	251

Chapitre 7. Cohomologie et théorie du degré	257
7.1. Introduction	257
7.2. Espaces de de Rham	259
7.3. Cohomologie en degré maximum	260
7.4. Degré d'une application	264
7.4.1. Cas du cercle	264
7.4.2. Définition et propriétés de base dans le cas général	266
7.4.3. Invariance du degré par homotopie; applications	268
7.4.4. Indice d'un champ de vecteurs	271
7.5. Retrouver sur le théorème de d'Alembert	273
7.5.1. Deux preuves du théorème de d'Alembert utilisant le degré	273
7.5.2. Comparaison des différentes preuves du théorème de d'Alembert	275
7.6. Enlacement	276
7.7. Invariance par homotopie	280
7.8. Le principe de Mayer–Vietoris	283
7.8.1. Suites exactes	283
7.8.2. La suite exacte de Mayer–Vietoris	285
7.8.3. Application : quelques calculs de cohomologie	287
7.8.4. Cas non compact	289
7.9. Méthodes intégrales	290
7.10. Commentaires	293
7.11. Exercices	294
Chapitre 8. Caractéristique d'Euler–Poincaré et théorème de Gauss–Bonnet	303
8.1. Introduction	303
8.1.1. D'Euclide à Carl–Friedrich Gauss et Pierre–Ossian Bonnet	303
8.1.2. Esquisse d'une preuve du théorème de Gauss–Bonnet	305
8.1.3. Résumé	305
8.2. Caractéristique d'Euler–Poincaré	306
8.2.1. Définition; additivité	306
8.2.2. Pavages	307
8.3. Invitation à la géométrie riemannienne	310

8.4. Le théorème de Poincaré–Hopf	314
8.4.1. Retour sur l’indice d’un champ de vecteurs	314
8.4.2. Un théorème des résidus	315
8.5. De Poincaré–Hopf à Gauss–Bonnet	317
8.5.1. Avec le théorème de classification des surfaces	317
8.5.2. Avec les pavages : idée de la preuve	319
8.5.3. Mise en forme des arguments précédents	320
8.6. Commentaires	322
8.6.1. Cas des surfaces plongées	322
8.6.2. Métriques riemanniennes canoniques sur les surfaces	323
8.6.3. Indications sur les dimensions supérieures	323
8.7. Exercices	324
Annexe	327
Solution d’exercices	329
Bibliographie	359
Index	367