



ONDES MATIÈRE ET UNIVERS

RELATIVITÉ GÉNÉRALE, PHYSIQUE QUANTIQUE ET APPLICATIONS

Gilbert Belaubre
Gilles Cohen-Tannoudji
Claude Elbaz
Michel Gondran,
Victor Mastrangelo
Jean Schmets
Jean-Pierre Treuil



Ondes matière et Univers

Relativité générale, physique quantique et applications

Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences

ISBN (papier) : 978-2-7598-2264-5
ISBN (ebook) : 978-2-7598-2265-2

Cet ouvrage est publié en Open Access sous licence creative commons CC-BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/fr/>) permettant l'utilisation non commerciale, la distribution, la reproduction du texte, sur n'importe quel support, à condition de citer la source.

© AEIS, 2018



La collection de l'AEIS

Les travaux de l'**Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences** portent depuis plus de dix ans sur les questions majeures auxquelles est confrontée la recherche à la croisée de plusieurs disciplines. Et la présente collection a pour but de faire le point sur ces questions.

Nos ouvrages sont issus de séminaires mensuels et de congrès bisannuels pluridisciplinaires auxquels sont associés de nombreux chercheurs extérieurs. Notre ambition est de faciliter les échanges entre programmes de recherche spécialisés. Elle est aussi d'informer un public plus large sur les avancées récentes.

Pour chacun des ouvrages et en concertation avec les auteurs, un comité de lecture a pour tâche de coordonner l'ensemble des contributions conformément aux objectifs poursuivis, et d'en faire ressortir les lignes de force.

Les ouvrages de l'Académie recourent à deux formes de publication : le livre-papier avec diffusion dans les bibliothèques des universités et des centres de recherche et en librairie, et/ou la version électronique en ligne dans la section e-Books du site de l'éditeur EDP Sciences.

Notre premier ouvrage de la collection : *Formation des systèmes stellaires et planétaires-Conditions d'apparition de la vie* est disponible en téléchargement gratuit au format PDF à l'adresse suivante : <https://www.edp-open.org/books-in-french/312-formation-des-systemes-stellaires-et-planetaires#Formation-des-systemes-stellaires-et-planetaires>

Table des matières

La collection de l'AEIS	1
Présentation générale	7
La seconde année miraculeuse d'Einstein	25

PREMIÈRE PARTIE Relativité, Ondes de l'Univers

Présentation	35
Chapitre 1 : Les ondes gravitationnelles. Une nouvelle fenêtre sur l'Univers	45
Chapitre 2 : Génération d'ondes gravitationnelles par les systèmes binaires compacts	65
Chapitre 3 : La première détection d'ondes gravitationnelles	95
Chapitre 4 : Lentilles gravitationnelles faibles : applications en cosmologie	105
Chapitre 5 : Cosmology with the Planck satellite: from quantum foam to the cosmic web ..	131

DEUXIÈME PARTIE Dualité Ondes/Corpuscules de la Physique quantique

Présentation	163
Chapitre 6 : Situation actuelle de la mécanique quantique : des difficultés conceptuelles subsistent	173
Chapitre 7 : Tests expérimentaux de la non localité quantique avec des paires de photons intriqués	201
Chapitre 8 : La théorie de de Broglie-Bohm comme façon rationnelle de compléter la mécanique quantique	237
Chapitre 9 : Atomes et lumière en équilibre thermique : de l'argument d'Einstein aux mélasses optiques	265
Chapitre 10 : Bohr's Legacy in Cavity QED	291

TROISIÈME PARTIE

Ondes, matière et quantification

Présentation	339
Chapitre 11 : Renormalisation et groupe de renormalisation	
Les infinis en physique microscopique contemporaine	351
Chapitre 12 : A Quantic Universe before the Big Bang(s)?	369
Chapitre 13 : Loop quantum gravity and exploding black holes	385

QUATRIÈME PARTIE

Une nouvelle révolution scientifique à l'horizon ?

Présentation	401
Chapitre 14 : From Einstein, Bohr, Schrödinger to Bell and Feynman: a New Quantum Revolution?	407
Chapitre 15 : Mécanique quantique	435
Chapitre 16 : La mesure du Temps au XXI ^e siècle	451
Chapitre 17 : La théorie des probabilités et le problème de l'efficacité (dé-)raisonnable des mathématiques	463
Chapitre 18 : Petite Poucette. Les nouveaux défis de l'Éducation	481

Pour conclure	489
----------------------------	-----

APPENDICES

Présentation	493
Appendice 1 : Comment comprendre la mesure du spin et l'expérience EPR-B ? Une interprétation causale	495
Appendice 2 : Une onde de Dirac augmentée visant l'unification des interactions	509
Appendice 3 : Le programme d'Einstein : une contribution	517
Appendice 4 : The Quantum Design of Photosynthesis	525
Remerciements	531
Présentation de l'Académie européenne interdisciplinaire des sciences ...	533



Présentation générale

L'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences (AEIS), son Président et le Comité des publications sont heureux de vous présenter le deuxième volume de sa ligne de publications, conçu à partir du thème du colloque organisé les 11 et 12 février 2016 et intitulé

ONDES, MATIÈRE et UNIVERS **Relativité générale, Physique quantique et applications**

Ce livre, dans la vision pluridisciplinaire de l'Académie, montre les progrès scientifiques réalisés depuis les premiers travaux d'Albert Einstein et de ses contemporains du début du XX^e siècle sur les deux grands piliers de la Physique moderne que sont la Relativité générale et la Mécanique quantique. Il vise à rassembler les résultats et les observations scientifiques les plus significatifs de la fin du XX^e siècle et de ce début de troisième millénaire. Malgré les difficultés des tentatives actuelles de conciliation de ces deux piliers de la Physique en vue de bâtir une théorie unifiée, ces deux théories montrent leur grande pertinence dans leurs domaines respectifs de validité. Elles nous offrent une vision du monde et de l'Univers d'une richesse insoupçonnée.

La commission scientifique de notre société savante, chargée de définir les grandes lignes de cet ouvrage sur le thème « Ondes, matière et univers », est partie des deux publications fondatrices d'Einstein et dont on a célébré le centenaire en 2016 :

1. « Les fondements de la théorie de la relativité générale », paru en 1916 dans *Annalen der Physik*¹
2. « Théorie quantique du rayonnement », paru en 1917 dans *Physikalische Zeitschrift* mais d'abord publié en Suisse en 1916²

(1) A. Einstein, Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* (ser. 4), 49, 769–822, 1916.

(2) A. Einstein, Quantentheorie der Strahlung, *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft*, Zürich, 16, 47–62, 1916 et Quantentheorie der Strahlung, *Physikalische Zeitschrift*, 18, 121–128, 1917.

Dans le premier article, en tant que synthèse finale de la théorie de la Relativité générale comme théorie relativiste de la gravitation, Einstein pose les fondements de la cosmologie moderne, la science de l'Univers dans lequel la gravitation joue le rôle primordial.

Dans le second, Einstein achève la démonstration de la formule de Planck pour le rayonnement du corps noir qu'il avait amorcée en 1905. Il intègre le modèle de l'atome de Bohr pour décrire la matière en équilibre thermodynamique avec le rayonnement émis et absorbé. Il y montre que les quanta d'énergie qui lui avaient permis de lever le paradoxe de l'effet photoélectrique sont des quanta de quadri-moment. Ils ne portent pas seulement une énergie mais aussi une quantité de mouvement égale à l'énergie divisée par la vitesse de la lumière c . Ce second article est la première ébauche de la théorie quantique des champs qui rend compte, pour la lumière, de la propriété de dualité ondes/corpuscules. Dans « La théorie quantique du gaz parfait », écrit en 1925 – après l'article de Bose et la thèse de Louis de Broglie –, il étendra cette dualité ondes/particules à la matière, ce qui conduira au modèle standard de la physique.

Dans son exposé introductif, Françoise Balibar considère que la période qui s'étend de part et d'autre du changement d'année, de 1915 à 1916, mérite le nom d'*annus mirabilis*, tout autant que la fameuse année 1905. À partir de cette comparaison, et en intitulant sa présentation « La seconde année miraculeuse d'Einstein », elle note que les deux articles d'Einstein prolongent ceux de 1905, qui portaient respectivement sur la relativité restreinte, avec la vitesse de la lumière comme constante fondamentale, et sur la physique quantique, avec la constante de Planck, comme autre constante fondamentale. Elle souligne ainsi l'existence de deux courants majeurs en physique théorique, courants qui se sont développés de manière indépendante jusqu'ici.

Au niveau expérimental, il convient de rappeler les prédictions extraordinaires des deux théories. Elles sont couronnées de succès et aucun phénomène n'est venu les contredire. Au niveau théorique, ces deux courants ont cependant des visions radicalement différentes du fonctionnement de l'Univers : la relativité générale considère en effet le monde comme déterministe et réaliste, tandis que la mécanique quantique le considère comme non déterministe et non réaliste. Ils diffèrent également dans leur conception de l'espace et du temps. Surmonter ces contradictions nécessiterait le rapprochement de ces deux visions, leur synthèse représente probablement un des plus grands défis de la physique.

L'objet de cet ouvrage est de faire un point sur quelques résultats théoriques et expérimentaux majeurs obtenus ces dernières années et voir si une nouvelle révolution scientifique peut en émerger. Son plan en quatre parties garde trace de la double origine dont il vient d'être question, de la nécessité et des implications de la convergence : 1) Relativité, ondes de l'Univers. 2) Dualité ondes/corpuscules de la physique quantique. 3) Ondes, matière et quantification. 4) Une nouvelle révolution scientifique à l'horizon ? La même exigence traverse en filigrane tous les travaux ou réflexions présentés : l'exigence d'accroître et d'affiner constamment les techniques d'observations et d'expérimentations, et de construire parallèlement les outils mathématiques nécessaires à l'analyse de leurs résultats ; l'exigence de tester les implications des théories jusqu'aux dernières limites permises par ces possibilités observationnelles et expérimentales. Pour résumer, l'exigence de mettre sans cesse à l'épreuve les théories dans leur conformité aux observations et

expériences, et, à travers leur interprétation, dans le rapport que nous leur attribuons à la « réalité » de notre Univers.

La première partie est consacrée à la relativité générale, dans certaines de ses implications en Astrophysique et Cosmologie : ondes gravitationnelles, « pulsars binaires », trous noirs, lentilles gravitationnelles, anisotropies du rayonnement cosmologique cartographié par le satellite Planck, consolidation du modèle de Concordance Lambda CDM.

La relativité restreinte spécifie la structure cinématique de l'espace-temps. Cette structure, d'abord suggérée par l'étude de l'électromagnétisme, a fourni un cadre général pour la description de toutes les autres lois fondamentales de la nature, à l'exception de la gravitation, dont la formulation constitue le domaine de la relativité générale. Cette dernière théorie apporte une modification profonde au concept d'espace-temps. L'abandon de l'espace euclidien en présence d'un champ de gravitation conduira Einstein à adopter un espace courbe dont la courbure exprime le champ de gravitation, champ qui évolue au même titre que les autres champs physiques.

Depuis une cinquantaine d'années l'étude des manifestations de la gravitation connaît un regain d'intérêt : développement de la gravitation expérimentale, découverte des quasars, des pulsars, etc., exploration théorique du régime des champs gravitationnels forts (objets condensés, trous noirs) et de celui des champs gravitationnels rapidement variables (rayonnement gravitationnel).

Le principe fondamental, dit d'équivalence, qui a conduit à la relativité générale est l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle (égalité entre la masse qui mesure l'inertie et la masse qui détermine la gravitation), avec sa conséquence : « l'universalité de la chute libre ». Les expériences de Galilée sur la chute des corps suggéraient déjà que l'accélération due au champ de gravitation de la Terre était indépendante de la masse et de la nature des corps. Depuis, des expériences extrêmement délicates ont pu vérifier ce principe avec une grande précision, de l'ordre de 10^{-13} en 2008. Néanmoins, le fait que la relativité générale repose sur une égalité *exacte, absolue* entre masse inertielle et masse gravitationnelle, conduit à pousser toujours plus loin la vérification expérimentale du principe, en mettant au point des mesures de plus en plus pointues, qui fournissent des résultats encore meilleurs³

Un domaine qui a donné lieu à des développements théoriques et à des observations longues et précises concerne les systèmes binaires compacts, tels les « pulsars binaires », c'est-à-dire des systèmes doubles constitués d'un pulsar (étoile à neutrons en rotation rapide sur elle-même) et d'un compagnon également très compact (étoile à neutrons ou naine blanche, ou encore trou noir stellaire). Le premier système de ce type, nommé PSR 1913 + 16, a été découvert par Russell A. Hulse et Joseph H. Taylor en 1974. Grâce aux observations régulières réalisées par Joseph H. Taylor et ses collaborateurs depuis sa découverte, il a été possible de suivre avec une grande précision le mouvement orbital du pulsar et de mettre en évidence une décroissance de sa période orbitale. La courbe de réduction de la période en fonction du temps qu'ils ont mesurée montre que le système perd

(3) Pierre Touboul *et al*, MICROSCOPE Mission: First Results of a Space Test of the Equivalence Principle, *Phys. Rev. Lett.* 119, 231101 – 4, December 2017.

de l'énergie et que la réduction correspond avec une extrême précision, dans le cas d'une perte d'énergie par rayonnement gravitationnel – c'est-à-dire par émission d'ondes gravitationnelles – à celle que prévoit la relativité générale. Le modèle indique que la coalescence des deux étoiles devrait se produire dans 300 millions d'années. Russell Hulse et Joseph Taylor furent récompensés par le prix Nobel de physique en 1993 pour cette découverte.

Les mesures faites sur les pulsars binaires permettent d'aller au-delà des expériences effectuées dans le système solaire, en sondant le régime des champs gravitationnels forts – le potentiel gravitationnel d'une étoile à neutron étant par exemple environ 10^5 plus fort que celui du Soleil. Mais lorsque la coalescence (collision) des deux partenaires de tels systèmes se produit, on atteint une situation où ces champs sont de plus rapidement variables et où les variations peuvent atteindre dans les toutes dernières phases du phénomène des vitesses relativistes. La période des ondes gravitationnelles émises passe alors d'un ordre de grandeur s'exprimant en heures à un ordre de grandeur s'exprimant en millisecondes. Et leur amplitude se trouve multipliée d'un facteur en rapport. Ces situations extrêmes ont suscité des développements théoriques visant à résoudre de façon de plus en plus précise plusieurs problèmes : celui de la génération des ondes par les systèmes binaires, celui de la propagation de ces ondes une fois engendrées et celui de leur rétroaction sur la source émettrice. Elles ont également donné lieu à des développements techniques extrêmement pointus visant à la détection de ces ondes et à la conception et construction des détecteurs.

Les ondes gravitationnelles, considérées loin de leur source et modélisées d'abord dans les cas simples où les champs ne sont pas encore trop forts et les vitesses non encore relativistes, sont, à l'instar des ondes électromagnétiques, des ondes *transverses*, décrites par deux polarisations indépendantes dans le plan orthogonal à la direction de propagation, et qui se propagent à la vitesse c , la vitesse de la lumière. La déformation de l'espace induite par le passage de l'onde en un certain point – mesurée par une variation de distance – est différente selon la direction sur laquelle on l'observe. Elle est nulle dans la direction de propagation, et dans le plan orthogonal, elle dépend de la direction de la polarisation : si à un instant donné, elle est maximale dans une certaine direction, elle sera minimale dans la direction perpendiculaire. Sur le plan de la configuration globale de l'onde autour de sa source, de même que la conservation de la charge implique qu'il n'y a pas d'émission électrique de type monopolaire, mais seulement dipolaire ou d'un ordre de polarité plus élevé, de même la conservation de l'énergie-impulsion implique pour les rayonnements gravitationnels l'absence de termes monopolaires et dipolaires, le terme dominant étant alors quadrupolaire.

Les problèmes (génération, propagation, rétroaction) que les théoriciens se sont attachés à résoudre concernent le lien entre la structure de masse et le mouvement de la source émettrice et l'amplitude tensorielle du rayonnement se manifestant en chaque point de l'espace-temps. Ce, dans différentes conditions, loin de la source et dans la zone proche, dans des contextes où les champs gravitationnels sont de plus en plus intenses et les vitesses de plus en plus relativistes. Donc du contexte actuel du pulsar binaire PSR 1913 + 16 à celui de la coalescence de deux trous noirs. Ces travaux permettent ainsi de modéliser de façon précise les signaux espérés et de « remonter » de ces signaux aux propriétés des émetteurs.

Enfin, le problème de la détection, dont le pionnier fut Joseph Weber dans les années 1960, suscite de nos jours de très actives recherches expérimentales. Le principe de tous les détecteurs repose sur le fait qu'une onde gravitationnelle d'amplitude h induit, lors de son passage, une variation de distance – distance lumière – de l'ordre de $\delta L \sim hL$ entre deux corps distants de L . Le problème est donc de détecter ce très petit déplacement relatif $\delta L/L \sim h$. Les détecteurs qui sont aujourd'hui les plus prometteurs sont de grands interféromètres, du type Michelson ou Fabry-Pérot, ayant des bras kilométriques et dans lesquels est injecté un faisceau laser monochromatique très puissant. Deux projets de détecteurs kilométriques ont été développés : le projet américain L.I.G.O. (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) et le projet Virgo (collaboration France-Italie). Ils permettent de mesurer des amplitudes relatives h aussi faibles que 10^{-21} , et ainsi de détecter le rayonnement gravitationnel émis lors des étapes ultimes d'évolution de systèmes binaires d'étoiles à neutrons, situés dans des galaxies lointaines.

Après une quête de près d'un demi-siècle en effet, les physiciens, et plus particulièrement, depuis 2007, ceux de la collaboration associant les observatoires L.I.G.O. et Virgo ont annoncé le 11 février 2016 à 16h30 avoir détecté des ondes gravitationnelles, un siècle après leur description par Einstein. En détectant pour la première fois ces ondes, les chercheurs ont également observé la première collision entre deux trous noirs. Ces deux objets très compacts sont entrés en collision à une vitesse de l'ordre des deux tiers de la vitesse de la lumière, pour former un trou noir unique de masse plus légère que la somme de celles de ses géniteurs. Cet événement cataclysmique, baptisé GW150914, a, en une fraction de seconde, converti en ondes gravitationnelles une énergie équivalant à trois fois la masse du Soleil.

Les équations de la relativité générale induisaient l'existence théorique des ondes gravitationnelles et des trous noirs, deux phénomènes inconnus et inobservables en 1916. Cette découverte ne constitue pas seulement une validation supplémentaire de la théorie d'Einstein, elle fait aussi entrer l'astrophysique dans une nouvelle ère en lui procurant une sonde supplémentaire pour observer les phénomènes les plus violents de l'Univers. Le prix Nobel de physique 2017 a été attribué conjointement à Raïder Weiss, Barry C. Barish et Kip Thorne pour leurs recherches sur les ondes gravitationnelles. Luc Blanchet et Thibault Damour, font partie des physiciens récompensés par la Fondation du Prix de Physique fondamentale (Fundamental Physics Prize Foundation). Alain Brillet et Thibault Damour, sont les lauréats 2017 de la médaille d'or du CNRS.

La conception de la relativité générale par Albert Einstein en 1916 marque le début de la cosmologie moderne, où il devient possible de décrire l'Univers dans son ensemble comme un système physique, son évolution à grande échelle nécessitant l'utilisation de cette théorie. Einstein est d'ailleurs le premier à publier un modèle cosmologique, solution de sa théorie, mais décrivant un univers homogène fini et statique. La découverte quelques années plus tard de l'expansion de l'Univers par Edwin Hubble a remis en cause le modèle d'univers statique d'Einstein. Georges Lemaître achève alors de jeter les bases de la cosmologie actuelle. La relativité générale, la mécanique quantique et la théorie des champs, couplées à de nombreuses observations astronomiques permettent aujourd'hui d'ébaucher un scénario relativement fiable de l'histoire de l'Univers sur les 13 ou 14 derniers milliards d'années. En pratique, les chercheurs élaborent des modèles cosmologiques, c'est-à-dire

des sortes de scénario décrivant les différentes phases par lesquelles l'Univers est passé depuis et éventuellement pendant le Big Bang.

Dans les années 1990 a finalement émergé le modèle Λ CDM, le sigle rappelant ses deux constituants majoritaires, à avoir de la matière noire froide (pour Cold Dark Matter) et de l'énergie sombre, symbolisée depuis Einstein par la lettre grecque Lambda (Λ). Ce modèle est appelé aussi *modèle de concordance*, car il permet d'expliquer au mieux l'ensemble des observations cosmologiques actuellement établies. On peut le voir comme le modèle standard de la cosmologie, à l'instar du modèle standard en physique des particules, bien que ce dernier soit quantitativement mieux testé et mieux contraint.

Le modèle Λ CDM s'appuie sur l'hypothèse que l'Univers est homogène et isotrope (c'est-à-dire qu'il a toujours le même aspect quel que soit l'endroit d'où on l'observe et la direction dans laquelle on l'observe), que sa courbure spatiale est nulle (c'est-à-dire que la géométrie à grande échelle correspond à la géométrie dans l'espace usuel). Ces hypothèses ne sont pas démenties par les observations faites jusqu'ici, et on cherche à les vérifier toujours plus précisément. Il est rempli d'un certain nombre de formes de matière, à savoir : de la matière ordinaire (atomes, molécules, électrons, etc.), aussi appelée matière baryonique, rentrant pour environ 5 % de la composition de l'Univers et de la matière noire (ou matière sombre), d'origine non baryonique, composée de particules massives non détectées à ce jour, entrant pour environ 25 % de la composition totale. Les quelques 70 % restant sont essentiellement le lot d'une composante appelée génériquement énergie sombre, prise en compte dans le modèle de concordance par la constante cosmologique. À ceci s'ajoute le rayonnement électromagnétique, principalement sous la forme d'un « rayonnement fossile », un fond homogène de photons issus de la phase dense et chaude de l'histoire de l'Univers, le fond diffus cosmologique (CMB, Cosmological Microwave Background). Il existe également un fond cosmologique de neutrinos (ensemble des neutrinos qui ont été produits lors du Big Bang, et qui forment en nombre et en énergie totale la très grande majorité des neutrinos de tout l'Univers), non détecté à ce jour ainsi qu'un fond cosmologique d'ondes gravitationnelles « primordiales » (qui auraient pour origine des fluctuations quantiques ayant généré les fluctuations observées au niveau du CMB, lors d'une phase « d'inflation »), également non détecté, directement ou indirectement.

De 2009 à 2013, le satellite Planck de l'ESA a observé le rayonnement fossile, la plus ancienne image de l'Univers. L'héritage légué par ce projet inclut de très nombreuses données uniques et essentielles pour plusieurs domaines de l'astrophysique. Citons entre autres la carte de l'émission polarisée de la poussière interstellaire ainsi qu'un catalogue de 13 188 nuages denses et froids de notre Galaxie et de 1653 amas de galaxies détectés par leur interaction avec le rayonnement fossile, mais aussi des informations sur la façon dont la matière s'est peu à peu concentrée lors des dix derniers milliards d'années et, enfin et surtout, la carte de ce rayonnement fossile sur tout le ciel. Cet outil permet aux chercheurs de visualiser la distribution de matière 380 000 ans après le Big Bang. Ces nouvelles données ont permis de préciser le contenu de l'Univers et sa dynamique depuis les premiers âges. Il a été attribué à François Bouchet, directeur de recherche CNRS à l'IAP et responsable de l'exploitation scientifique HFI-Planck, le Grand Prix scientifique 2014 de la Fondation Louis D. de l'Institut de France.

Les résultats obtenus avec le rayonnement fossile, à partir des données du satellite Planck, sont très robustes. L'utilisation conjointe des données sur les corrélations entre positions des galaxies liées aux BAO (BAO pour oscillations acoustiques baryoniques⁴) ne modifie que marginalement la répartition que l'on en déduit de l'énergie aujourd'hui sous ses diverses formes. Elle contribue cependant à resserrer les fourchettes d'incertitudes et lèvent certaines indéterminations sur cette répartition. La cohérence des résultats de diverses sources est un argument majeur en faveur de la validité du modèle pour décrire l'évolution des structures tout au long de l'histoire de notre Univers.

Le modèle de concordance, dans sa version la plus simple, suppose par ailleurs un espace plat, avec un paramètre de courbure, Ω_k , égal à 0. Mais les données de Planck, associées à d'autres (BAO comprises) permettent de vérifier précisément ce qu'il en est, puisque elles aboutissent à une fourchette de 0,0008 +/- 0,0040. L'hypothèse de l'espace spatialement plat à l'échelle de l'Univers s'en trouve donc largement renforcée.

Enfin les données rassemblées par Planck sur la polarisation du fonds diffus cosmologique interviennent dans un débat bien actuel, celui de la validité de l'hypothèse de l'inflation et des différents modèles de cette phase de la formation de l'Univers actuel. Non seulement ces données ne contredisent pas l'hypothèse de l'inflation, mais elles limitent, dans une gamme restant cependant encore assez large, l'ensemble de ces modèles acceptables, en privilégiant les modèles les plus simples parmi ceux qui ont été proposés.

D'après la théorie de la relativité générale, une grande concentration de masse – telle une étoile, une galaxie ou un amas de galaxies – déforme l'espace-temps autour d'elle et dévie ainsi les rayons lumineux provenant d'une source plus éloignée et passant à proximité. Si l'objet massif est aligné avec la source d'arrière-plan, les rayons lumineux convergent vers l'observateur, de sorte que la source paraît amplifiée ; on parle alors de lentille gravitationnelle. L'effet de lentille est dit fort lorsque la lumière est amplifiée et que plusieurs images de la source sont visibles, ou que l'image est tellement déformée que la source apparaît sous forme de grands arcs lumineux. Lorsque la déviation est moins importante et l'image de la source seulement légèrement déformée, on parle d'effet de lentille gravitationnelle faible. L'intensité de l'effet dépend de la densité de masse : il est fort proche du cœur d'un amas de galaxies, et faible en périphérie⁵. Les effets de lentille gravitationnelle sont utiles à plus d'un titre. Ils révèlent des objets trop peu lumineux pour être détectés par d'autres moyens, et permettent d'estimer la masse de l'objet constituant la lentille. Les effets de lentilles gravitationnelles faibles modifient à la marge les décalages spectraux, les positions angulaires et la forme des galaxies. Mais par le biais de ces modifications, ils apportent en même temps des informations sur le contenu matériel et la structure géométriques des espaces traversés. Ce dernier aspect peut permettre d'accéder notamment à la matière

(4) Les ondes de matière (ou baryoniques) de nature acoustique – variations de pression et de densité – ont pris naissance et se sont propagées – à la vitesse du son – dans le plasma primordial, jusqu'au moment de la « recombinaison », c'est-à-dire jusqu'au moment où le rayonnement électromagnétique a été libéré de son absorption par la matière et a pu ainsi parvenir jusqu'à nous sous la forme du fonds diffus micro-onde. Elles se sont alors « figées », en imprimant dans l'espace des zones de sur et de sous-densité dont la structure spatiale a suivi – grosso-modo – l'expansion de l'Univers. Cette structure, aux différentes époques, se caractérise notamment par la fonction de corrélation angulaire sur les positions des galaxies.

(5) NB : zéro au centre par symétrie.

non tracée par la lumière telle la matière noire et en construire des cartographies. On montre aussi qu'il existe une relation générale entre la structure de l'espace-temps et celle des effets de lentilles gravitationnelles, on peut ainsi approfondir la question de la validité du principe cosmologique (homogénéité et isotropie de l'Univers).

La carte de température du rayonnement fossile, réalisée par la mission satellite Planck, est elle aussi affectée par l'effet de lentille gravitationnelle, comme si elle était observée à travers un verre irrégulier. Il a donc fallu l'isoler et le caractériser en tant que tel, et corrélativement retrouver le fonds diffus cosmologique « natif ». L'effet est extrêmement faible, mais aussi particulièrement précieux, dès lors que cette caractérisation a pu s'effectuer : toute la matière présente entre nous et le rayonnement fossile – y compris la matière noire – a dévié la trajectoire de la lumière primordiale. Loin d'être un défaut, cet effet se révèle donc un outil unique pour tracer la distribution de matière sur une large partie de l'espace. Grâce à sa haute résolution et à sa sensibilité sans précédent, Planck ne se contente pas de séparer l'effet de lentille, il permet de mieux comprendre les grandes structures de notre Univers qui se sont constituées il y a dix milliards d'années.

La deuxième partie est consacrée aux avancées théoriques et expérimentales de la Mécanique quantique. Elle se situe dans la ligne initiée par Einstein qui concernait la théorie quantique du rayonnement. Elle aborde aussi les problèmes soulevés par ses possibles interprétations et les résultats aboutissants à la deuxième révolution quantique : expériences de pensée, intrication, états superposés, paradoxes EPR et EPR-B, boîte à photons, atomes froids, mélasses optiques, condensation de Bose-Einstein.

La mécanique quantique est née pendant le premier quart du XX^e siècle de l'exploration théorique et expérimentale des interactions entre la lumière et la matière. Pendant le second quart du siècle dernier, l'interprétation de son formalisme a divisé les pères fondateurs avec d'un côté Einstein, de Broglie et Schrödinger qui pensaient que la solution donnée par la théorie au problème de la dualité onde-corpuscule était encore provisoire. De l'autre côté, Bohr, Born et Heisenberg pensaient qu'elle était définitive. Du débat Bohr-Einstein-Schrödinger sont sorties un certain nombre d'expériences de pensée que la technologie de l'époque ne permettait pas de réaliser concrètement. Il fallut attendre pour cela la fin du XX^e siècle et notamment les travaux désormais célèbres d'Alain Aspect, de Serge Haroche, de Claude Cohen-Tannoudji et de leurs collègues.

Cela a été possible avec l'apparition de sources de lumières cohérentes connues sous l'acronyme de Laser. Le laser est à la base de la société de l'information et de la communication que nous connaissons aujourd'hui. La pureté chromatique de la lumière laser a permis de contrôler l'interaction entre lumière et matière à un niveau de finesse inconnu auparavant. Un outil capable par exemple de ralentir les atomes et de contrôler parfaitement leur mouvement, de les faire interférer.

On peut aussi les « forcer » à émettre des photons « intriqués ». Il a été ainsi possible de revisiter, grâce à l'expérience, des prédictions étonnantes de la mécanique quantique et d'explorer de nouvelles frontières de la connaissance qui ne pouvaient être atteintes dans la première moitié du XX^e qu'au moyen d'expériences dites de pensée.

Une bonne partie de sa vie, Einstein n'a cessé d'essayer de mettre la physique quantique en doute. Il en critiquait la non complétude liée au non déterminisme ainsi que son manque de réalisme lié au rôle de l'observateur au moment de la mesure. Pour montrer la non complétude de la mécanique quantique, il a formulé en 1935, avec Boris Podolsky et Nathan Rosen, ses objections sous forme d'une expérience de pensée, aujourd'hui désignée paradoxe EPR. Selon ces trois physiciens, si la mécanique quantique est complète, alors il faudrait supposer qu'il existe entre deux particules intriquées des interactions qui se propagent plus vite que la lumière. La seule façon d'éviter ce conflit avec la relativité restreinte est de supposer que la physique quantique décrit la réalité de façon incomplète et qu'il existe des « variables cachées », inconnues des physiciens, qui donnent l'illusion de l'intrication quantique. Pour le physicien danois Niels Bohr, principal contradicteur d'Einstein, on ne peut compléter la mécanique quantique sans qu'elle perde sa cohérence, qui repose sur la complémentarité des mesures possibles, et le fait que l'on doit prendre en compte les appareils de mesure dans la description des phénomènes.

En 1952, Bohm propose une variante de l'expérience EPR avec des spins intriqués, c'est l'expérience EPR-B que va utiliser le physicien du CERN John Bell en 1964 pour ses inégalités. Il formalise donc la question sous forme d'inégalités, dites de Bell, qui sont évaluées au cours de l'expérience. Si l'inégalité n'est pas respectée, alors le résultat de l'expérience ne peut pas être expliqué par l'existence de variables cachées, et il faut se résoudre à admettre le caractère non local de la nature. En 1982, l'équipe d'Alain Aspect, de l'Institut d'optique à Orsay, met au point une expérience pour vérifier les inégalités de Bell dans des expériences plus proches de l'expérience de pensée que les expériences précédentes. Dans le dispositif, des paires de photons intriqués sont produites, puis chacun des photons d'une paire est dirigé vers un détecteur pour mesurer sa polarisation. Alain Aspect et ses collègues montrent que, dans ce dispositif, les inégalités de Bell sont violées dans une expérience où les mesures sur les deux photons éloignés sont séparées au sens relativiste, confirmant ainsi le caractère non local de la physique quantique. « Une paire de photons intriqués doit être considérée comme un système quantique global, inséparable, même lorsque les photons sont distants l'un de l'autre. » précise A. Aspect. Plus de trente ans après, on mesure l'ampleur de ces développements ; ils ont contribué à faire émerger la seconde révolution quantique, avec les travaux de cryptographie et de traitement de l'information quantiques... Alain Aspect a reçu de nombreux prix pour ses travaux dont les médailles Albert Einstein en 2012 et Niels Bohr en 2013...

La compréhension profonde de l'interaction atome-lumière nous est venue de la théorie quantique qui a dévoilé, au début du siècle dernier, les lois étranges auxquelles obéissent à l'échelle microscopique la matière et le rayonnement. Cette théorie nous a révélé un monde contre-intuitif dans lequel les notions d'ondes et de particules se mêlent intimement. La lumière apparaît à la fois comme une onde continue et comme un ensemble de photons discrets. Quant aux atomes, ils se manifestent soit comme des particules localisées, soit comme des ondes de matière. Cette physique « étrange » se fonde sur un principe fondamental de superposition : un système microscopique peut en général exister à la fois dans plusieurs états possibles, pour ainsi dire suspendu entre différentes réalités classiques.

Dans les discussions qui ont conduit à l'élaboration de la théorie, ses fondateurs avaient pris l'habitude d'imaginer des expériences de pensée : ils manipulaient virtuellement des

atomes et des photons isolés de leur environnement pour créer des situations illustrant directement les concepts quantiques. Au cours des vingt dernières années, ces expériences, longtemps rêvées, se sont enfin réalisées. Jongler avec des atomes et des photons et les faire interagir de manière contrôlée est devenu un champ très actif de recherche expérimentale en optique quantique. Serge Haroche a joué un rôle pionnier dans ce domaine de recherche. En parvenant à isoler un atome du monde extérieur dans une cavité aux parois presque idéalement réfléchissantes, il l'a forcé à interagir avec un champ élémentaire constitué au plus de quelques photons et a ainsi observé l'interaction atome-lumière sous son jour le plus fondamental. Les cavités électromagnétiques que son équipe utilise à l'École normale supérieure (laboratoire LKB) pour piéger la lumière peuvent être considérées comme des réalisations de la fameuse « boîte à photons » imaginée par Bohr et Einstein.

Dans une expérience remarquable, Serge Haroche et son équipe de l'ENS – qu'il dirige avec ses collègues Jean-Michel Raimond et Michel Brune – ont utilisé un atome pour contrôler l'état d'un champ micro-onde contenant quelques photons. Suivant que l'atome se trouve dans l'un ou l'autre de deux états d'énergies différentes, le champ piégé dans la cavité oscille avec une phase donnée ou la phase opposée. En d'autres termes, les crêtes de l'onde électromagnétique de l'un des états du champ coïncident avec les creux de l'autre et inversement. Au plan expérimental et avec une dextérité extrême, l'équipe de l'ENS a pu, en portant l'atome dans une superposition de ses deux états d'énergie, préparer le champ dans un état où il oscille avec ces deux phases opposées à la fois, une situation impossible à comprendre d'un point de vue classique, mais parfaitement légitime selon la loi quantique. De tels états étranges s'appellent « chats de Schrödinger » en référence à une fameuse expérience de pensée dans laquelle ce physicien avait imaginé qu'un chat, emprisonné dans une boîte avec un atome radioactif, pouvait être placé dans la situation d'être suspendu de façon quantique entre la vie et la mort. Le prix Nobel de Physique 2012 a été attribué à Serge Haroche pour l'ensemble de ses contributions.

En 1916, alors qu'il vient de publier sa théorie de la Relativité générale, Einstein revient vers l'étude des processus d'échanges d'énergie et d'impulsion entre atomes et rayonnement. Pour approfondir ce thème qu'il avait abordé dès 1905 dans son étude de l'effet photoélectrique, il va prendre comme fil directeur l'atteinte de l'équilibre thermodynamique. Einstein considère une collection d'atomes éclairés par un rayonnement de type corps noir à température T . Son but est de modéliser la manière selon laquelle l'atome et le rayonnement peuvent échanger de l'énergie. La seule contrainte qu'il s'impose est la cohérence de la physique statistique : il faut que la répartition des populations moyennes des différents niveaux d'énergie de l'atome soit une distribution de Boltzmann avec cette même température T .

Dans son article de 1917, Einstein reprend les arguments développés en 1916 pour dégager les trois processus élémentaires de l'interaction atome rayonnement : absorption, émission stimulée, émission spontanée. Il développe un raisonnement qui va venir conforter ses conclusions de 1916 : si l'on admet que ces trois processus sont présents, alors non seulement les variables atomiques internes (populations) atteignent l'état d'équilibre thermique attendu, mais également la distribution en impulsion du centre de masse de l'atome. Pour établir ce résultat, Einstein développe un formalisme qui est le parent direct du refroidissement Doppler tel qu'on le met en œuvre dans les expériences modernes.

Soixante ans après l'article d'Einstein montrant comment la lumière d'un corps noir pouvait imposer une température cinétique à une assemblée d'atomes, deux articles par Hänsch & Schawlow (1975) d'une part et Wineland & Dehmelt (1975) d'autre part, sont venus simultanément proposer d'exploiter la lumière des lasers accordables pour créer de nouveaux équilibres thermodynamiques.

De cette façon, il n'y a plus de température imposée « de l'extérieur » par la lumière incidente et ce sont les paramètres de la transition atomique utilisée qui déterminent la température d'équilibre. Comme dans l'article d'Einstein, c'est l'effet Doppler qui est à la base de la force de friction qui permet de refroidir les atomes. Cela constitue le point de départ d'un nouveau domaine de la physique quantique, la physique des gaz d'atomes refroidis à une température située dans le domaine du microkelvin. Jean Dalibard fait une synthèse de tous ces travaux – dont il est un des acteurs importants – permettant d'atteindre des niveaux de très basse température et l'obtention de mélasses optiques (gaz d'atomes neutres froids, tridimensionnel, dont la force de cohésion est de type visqueux).

La physique des « atomes froids » a pris son essor à partir de méthodes fondées sur l'interaction de la matière et de la lumière, qui ont valu le prix Nobel à Claude Cohen-Tannoudji, William Phillips et Steven Chu en 1997 pour leurs travaux sur le refroidissement et le piégeage des atomes. Elle aborde à présent des domaines tels que la physique moléculaire, la physique statistique, la matière condensée ou l'information quantique.

Un exemple emblématique porte sur la mesure du temps, dont Christophe Salomon est un expert. Depuis 1967, cette mesure est fondée sur une référence atomique particulière, le césium. Construire une horloge revient à mesurer la fréquence de l'onde électromagnétique susceptible d'interagir avec cette espèce atomique. Or, les mesures sont d'autant plus précises que les atomes bougent peu. Le refroidissement de gaz par laser a donc permis une amélioration spectaculaire de la précision de la mesure du temps : les horloges à atomes froids, si elles fonctionnaient depuis le Big Bang, retarderaient ou avanceraient de quelques secondes seulement. L'extrême stabilité des horloges atomiques est une illustration spectaculaire du degré de précision que les atomes froids permettent d'atteindre. Ce degré de précision unique dans les systèmes physiques peut se révéler précieux pour certaines études fondamentales de l'infiniment grand et de l'infiniment petit. Par exemple, la mesure d'une possible variation temporelle des constantes fondamentales, qui est un enjeu essentiel pour toute la Physique et la cosmologie en particulier. Dans le cadre du projet spatial PHARAO (Projet d'Horloge Atomique par Refroidissement d'Atomes sur Orbite), un des volets scientifiques de cette mission est de pouvoir faire des tests de Physique fondamentale : la mesure de l'effet Einstein (décalage gravitationnel des horloges), le rapport des masses des constituants fondamentaux de la matière que sont les protons et les électrons est-il en cours de variation avec l'âge de l'Univers ?

Les expériences précédentes correspondent à une véritable « révolution expérimentale » en mécanique quantique et semblent bien donner tort à Einstein dans ses critiques sur la mécanique quantique au sujet du réalisme et du non déterminisme. Cependant sur le plan conceptuel, les progrès sont moindres malgré de belles démonstrations comme celle de Jean Dalibard qui nous montre comment la théorie quantique des champs a pu permettre de réaliser les calculs *ab initio* espérés par Einstein. En effet, comme le note

Franck Laloë, « de réelles difficultés conceptuelles subsistent ; nous sommes loin d'un consensus universel sur la meilleure façon d'interpréter la nature de la fonction d'onde, la mesure, etc. et leur relation (éventuelle) avec la réalité physique ». Cinquante-trois ans après la mort d'Einstein, ces questions restent toujours d'actualité et il n'y a pas d'accord sur la façon de comprendre la mécanique quantique. Les positions sont en effet figées depuis le congrès Solvay de 1927 où le point de vue de l'école de Copenhague (Bohr, Heisenberg, Born, Pauli) l'a emporté. Ont été rejetées la proposition de de Broglie d'une particule pilotée par la phase de la fonction d'onde et celle de Schrödinger d'une onde soliton représentant la particule.

Franck Laloë nous montre quelles en sont les difficultés d'interprétation ainsi que les possibles solutions. La théorie de l'onde pilote de de Broglie sera retrouvée en 1952 par David Bohm. Dans cette interprétation, une particule est représentée à la fois par la fonction d'onde et par sa position. La position de la particule sera considérée comme une variable cachée par les adversaires de l'interprétation de de Broglie. Cette onde pilote permet d'expliquer simplement la dualité ondes-corpuscules d'expériences telles que les « fentes de Young » et de considérer la mécanique quantique comme réaliste et déterministe. On notera que l'onde pilote permet, de plus, de considérer qu'il peut exister une continuité entre mécanique quantique et mécanique classique.

Jean Bricmont présente la théorie de Broglie-Bohm comme une façon rationnelle de compléter la mécanique quantique pour la rendre déterministe et compatible avec la mécanique classique. On garde les équations habituelles de la mécanique quantique. Il suffit alors d'introduire la position de la particule $X(t)$ et d'en donner l'équation d'évolution. C'est cohérent théoriquement, mais aussi expérimentalement, car cette position, bien qu'elle soit appelée la variable cachée, est en fait la variable mesurée. Un complément à ces travaux est proposé par Alexandre et Michel Gondran. Ces derniers montrent que, dans le cadre de la théorie de Broglie-Bohm, le postulat de réduction du vecteur d'état peut être démontré et que l'expérience EPR-B d'intrication à distance par les spins y trouve une explication réaliste qui ne contredit pas la relativité⁶. (Cf. Appendice I)

La troisième partie est dédiée aux travaux consacrés à la réconciliation des théories de la relativité et la mécanique quantique. Cette réconciliation comporte deux étapes, la première, objet du premier chapitre de cette partie, celle de la théorie restreinte de la relativité et de la mécanique quantique avec la théorie quantique des champs a été à l'origine des succès du modèle standard de la physique des particules ; la seconde, objet des deux autres chapitres de cette partie, celle de la théorie générale de la relativité et de la mécanique quantique, appartient encore au domaine des recherches en vue d'une possible théorie quantique de la gravitation. Ces recherches empruntent essentiellement deux voies, celle des théories des cordes et celle de la gravitation quantique à boucles. Il semblerait que ces deux voies de recherche pourraient trouver un terrain d'entente dans le domaine de la cosmologie de l'Univers primordial.

(6) Il faut rappeler cependant que l'interprétation standard des expériences EPR, l'interprétation de Copenhague, ne contredit pas non plus la relativité.

Physique des particules, théorie quantique des champs et réconciliation de la relativité restreinte et de la mécanique quantique

C'est en physique des particules qu'ont été rencontrées et, finalement, complètement levées les difficultés du rapprochement de la relativité restreinte et de la « quantique », difficultés dont cette citation d'Einstein, datant de 1936 se fait l'écho :

« Dans l'équation de Schrödinger le temps absolu et, aussi, l'énergie potentielle jouent un rôle décisif, alors que ces deux concepts ont été reconnus par la théorie de la relativité être, en principe, inadmissibles. Si l'on veut éviter cette difficulté, il faut fonder la théorie sur les champs et les lois de champ, au lieu de la fonder sur les forces d'interaction. Ceci nous amène à appliquer les méthodes statistiques de la théorie des quanta aux champs, c'est-à-dire à des systèmes à une infinité de degrés de liberté. Bien que les théories faites jusqu'à présent se soient limitées aux équations linéaires qui, comme nous le savons par les résultats de la relativité générale, sont insuffisantes, les complications que ces très ingénieuses tentatives ont rencontrées jusqu'à présent sont déjà terrifiantes. Elles s'élèveront certainement jusqu'à la hauteur du ciel, si l'on veut satisfaire aux exigences de la théorie de la relativité générale, dont le bien-fondé fondamental n'est mis en doute par personne⁷. »

Il faut reconnaître qu'en 1936, ces difficultés pouvaient en effet paraître terrifiantes : la mécanique quantique nous dit que pour révéler la structure de la matière à haute résolution, il faut utiliser des sondes d'énergie d'autant plus élevée que la résolution souhaitée est élevée ; mais la relativité (même restreinte) nous dit que l'énergie injectée par la sonde peut se transformer en nouvelles particules !

Le rapprochement avec la relativité restreinte soulève deux difficultés majeures qui sont, d'une part, l'existence de solutions des équations de la mécanique quantique comportant des énergies négatives qui correspondraient à des particules de masse négative ou à des ondes se propageant en remontant le temps, et d'autre part la survenue d'intégrales divergentes dans les calculs de théorie quantique des champs. La levée de ces difficultés doit beaucoup à la contribution décisive de R. P. Feynman. Avec ce que l'on appelle maintenant l'intégrale de chemins, il a proposé en 1948, de reformuler la mécanique quantique dans l'espace-temps, que tous les théoriciens souhaitent utiliser comme espace de représentation de la dynamique. Bien que l'article dans lequel il introduit cette reformulation s'intitule « Approche spatio-temporelle de la mécanique quantique non relativiste⁸ », il représente une étape décisive du passage de la mécanique quantique à la théorie quantique (et relativiste) des champs.

(7) A. Einstein, La physique et la réalité, *Franklin Institute Journal*, vol. 221, n° 3, mars 1936. En français dans Einstein, *Conceptions scientifiques*, p 68, Flammarion (Champs) Paris 1983.

(8) R.P. Feynman, Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics, *Review of Modern Physics*, vol. 20, n°3, 367-387, 1948.

Ce que propose Feynman dans cet article c'est de reformuler la mécanique quantique comme une théorie de champs : la fonction d'onde est assimilée à un champ, l'équation de Schrödinger à une équation de champ, sa résolution à l'application du principe de Huygens en optique ondulatoire. Il commence par énoncer une caractéristique essentielle de toute la physique quantique : la probabilité d'un événement qui peut se produire de plusieurs façons différentes est le carré du module de la somme de contributions complexes associées à chacune de ces alternatives. Il étend alors cette propriété à la probabilité qu'une particule se trouve avoir une trajectoire (un chemin ou une ligne d'Univers) $x(t)$ contenue dans une certaine région de l'espace-temps : cette probabilité est le carré du module de la somme des contributions complexes associées à chacune des trajectoires possibles contenues dans la région en question. Il postule que la contribution d'un chemin est une pure phase, l'exponentielle de i fois l'action classique (en unité de \hbar) correspondant à ce chemin. Le résultat fondamental de toute l'approche de Feynman est que la somme des contributions de tous les chemins qui, partant du passé, aboutissent au point x,t n'est rien d'autre que la fonction d'onde de la particule au point x,t $\Psi(x,t)$, à preuve que cette fonction satisfait l'équation de Schrödinger. Feynman établit ensuite la correspondance entre la nouvelle formulation qu'il propose et la méthode canonique de quantification basée sur le formalisme des matrices et des opérateurs. Il discute quelques applications possibles de sa méthode ainsi que la possibilité de la généraliser à la physique relativiste et à la physique statistique. Il montre en particulier que cette méthode peut se révéler utile à la résolution de certains problèmes qui se posent en électrodynamique quantique.

Feynman parvient donc à unifier le point de vue ondulatoire et le point de vue corpusculaire et donc à résoudre le problème du dualisme sur lequel Einstein a buté depuis 1910 jusqu'à la fin de sa vie sans jamais parvenir à le résoudre, lorsqu'il écrivait « peut-on concilier les quanta d'énergie, d'un côté, et le principe de Huygens, de l'autre ? Les apparences sont contre, mais Dieu semble avoir trouvé un truc⁹ », et lorsqu'il affirmait « je dois faire d'abord remarquer que je ne conteste absolument pas que la mécanique quantique représente un progrès significatif, et même en un certain sens, définitif, de la connaissance en physique. J'imagine que cette théorie sera englobée un jour dans une autre, un peu comme l'est l'optique des rayons dans l'optique ondulatoire¹⁰ ». Le « truc » que, d'après Einstein, Dieu semble avoir trouvé, c'est Feynman qui l'a découvert !

Le premier chapitre « Renormalisation et groupe de renormalisation, les infinis en Physique microscopique contemporaine », écrit par Jean Zinn-Justin est consacré à certaines difficultés rencontrées en théorie quantique des champs, et aux solutions qui leur ont été apportées. Ces difficultés sont liées aux divergences dans les calculs de théorie quantique des champs. Ces calculs donnent habituellement une série de termes qui apparaissent dans l'intégrale de chemins. Malheureusement, il s'avère que la plupart de ces termes sont infinis. Ce sont principalement Bethe, Feynman, Schwinger et Dyson qui, à la fin des années 40, ont résolu une bonne partie de ces difficultés par la découverte de la méthode dite de renormalisation. Ils ont montré que l'on peut regrouper les contributions infinies en un petit nombre de combinaisons mathématiques correspondant à un changement de normalisation des champs quantiques. Quand les calculs d'électrodynamique quantique avec la renormalisation convenable ont fourni les résultats en accord étroit avec l'expérimentation (par exemple sur le moment magnétique

(9) A. Einstein, Lettre à Sommerfeld, juillet 1910, traduite en français dans A. Einstein, *Œuvres choisies*, vol. 1, p. 113, Le Seuil, Paris 1989.

(10) A. Einstein, Mécanique quantique et réalité, *Dialectica*, vol II, p. 320-324, traduit en français dans Einstein, *Œuvres choisies*, vol. 1, p. 244-249, Le Seuil, Paris 1989.

anormal de l'électron pour lequel l'accord est de l'ordre de 10^{-10}), il est clairement apparu que cette technique pouvait être légitimement utilisée. Mais on en n'avait pas bien compris, à l'époque, la signification profonde. C'est à l'explication de cette signification, acquise dans les années soixante et soixante-dix, ainsi qu'à ses conséquences qui ont permis l'élaboration du modèle standard, que Jean Zinn-Justin s'est attaché principalement dans ce chapitre.

Progrès de la cosmologie observationnelle et avancées dans le rapprochement de la relativité générale et de la mécanique quantique

Nous savons que la force gravitationnelle est tellement faible qu'elle ne joue aucun rôle à l'échelle atomique et à l'échelle nucléaire, où la physique est régie par les trois autres interactions fondamentales ainsi que par les lois de la mécanique quantique. Si elle domine les phénomènes physiques à plus grande échelle, c'est parce que les objets macroscopiques, tels que les corps célestes, sont électriquement neutres, et que les deux autres forces, celle dite « faible » et la force nucléaire, sont de courte portée. Comme les objets macroscopiques sont essentiellement classiques, la gravité et la mécanique quantique ne semblent donc pas avoir de terrain commun d'application. Alors pour quelles raisons veut-on concilier la mécanique quantique avec la théorie de la relativité générale ?

Par exigence conceptuelle, mais pas seulement. Il faut pouvoir décrire des phénomènes gravitationnels quand leurs effets quantiques ne peuvent pas être négligés. On peut citer la cosmologie primordiale, certains aspects de la physique des trous noirs. Les deux derniers chapitres de cette partie, à savoir « Un Univers quantique avant le(s) Big Bang(s) ? » écrit par Gabriele Veneziano et le chapitre 13 « Loop quantum gravity and exploding black holes » écrit par Simone Speziale, concernent justement ces domaines : le chapitre de Gabriele Veneziano est consacré à la théorie des cordes et supercordes dont il a été l'initiateur, et, plus spécifiquement, à l'apport de cette théorie à la compréhension des « débuts » de l'Univers. Celui écrit par Simone Speziale est consacré à la compréhension de la structure et de la dynamique des trous noirs, telle que proposée par la théorie de la gravitation quantique à boucles, explorée au laboratoire de physique théorique de l'université de Marseille Luminy dirigé par Carlo Rovelli, l'un de ses principaux initiateurs.

Ces deux approches à la gravitation quantique, les « cordes » et les « boucles » sont souvent apparues comme concurrentes, et les débats entre leurs tenants n'ont pas toujours été sereins. Nous leur consacrerons, dans l'introduction à la troisième partie, un bref survol historique. La théorie des cordes se présentait comme la seule théorie capable d'unifier toutes les interactions fondamentales, gravitation comprise, dans un cadre dépassant celui de la théorie quantique des champs et le redonnant comme une approximation de basse énergie. La théorie de la gravitation quantique à boucles quant à elle, se maintient dans le cadre général de la théorie quantique des champs, en y incluant le champ quantique de la gravitation, contraint par la covariance de la théorie générale de la relativité. Il est intéressant de noter, et c'est ce que traduisent les deux chapitres qui leurs sont consacrés, que, grâce aux progrès de la cosmologie observationnelle décrits en première partie, les débats entre ces deux approches tendent à devenir plus sereins. Le nouveau modèle standard de la cosmologie a, en effet, réussi à débarrasser la cosmologie de l'*obstacle épistémologique* (selon l'expression utilisée par Bachelard) que représentait dans les premiers modèles prenant en compte l'expansion de l'Univers, l'existence de la *singularité* du Big Bang. Dans les deux modèles cosmologiques proposés, le Big Bang, singularité, est remplacé par un processus scientifiquement descriptible dans des cadres théoriques existants ou en cours d'élaboration.

Compte-tenu des avancées conséquentes en relativité générale, physique quantique, modèle de concordance LambdaCDM, cosmologie quantique... cette quatrième partie s'intéresse à la portée épistémologique de celles-ci. Peut-on parler d'une nouvelle révolution scientifique imminente ou simplement d'une évolution scientifique importante ; modèles standards de la cosmologie et de la physique des processus élémentaires, seconde révolution quantique, information quantique, efficacité des théories mathématiques...

Après avoir passé en revue les avancées des tests de la théorie générale de la relativité en astrophysique théorique et observationnelle et en cosmologie (première partie), avoir fait le point des débats, toujours actuels, à propos de l'interprétation de la mécanique quantique (deuxième partie), et avoir enfin évoqué les succès de la réconciliation de la relativité restreinte et de la physique quantique grâce à la théorie quantique des champs et les tentatives de réconciliation de la relativité générale avec cette même physique quantique (troisième partie), la quatrième partie est consacrée à la mise en débat de l'hypothèse d'une nouvelle révolution scientifique, à l'occasion d'une table ronde réunissant Alain Aspect, Françoise Balibar, Claude et Gilles Cohen-Tannoudji et Dominique Lambert, ainsi qu'un sixième intervenant qui, malheureusement, a été empêché d'y participer, Michel Serres.

Au travers de la diversité des positions exprimées dans ce débat et à la lecture des chapitres de cette quatrième partie, dont nous nous contenterons d'extraire quelques bonnes lignes, le lecteur pourra se faire sa propre opinion à propos de l'état actuel et des perspectives de nouvelles avancées de la recherche en physique.

Du chapitre 14, d'Alain Aspect :

"After a series of experiments closer and closer to the ideal Gedankenexperiment, more and more physicists realized that entanglement was definitely weirder than any previous concept, and that it might be used for new ways of processing and transmitting information. This prompted the development of a new field, quantum information, which brings us into a new quantum age, and may change our society as dramatically as the first quantum revolution, which gave us integrated circuits and lasers, responsible for the development of the information and communication society"...

Du chapitre 15, à propos du tome III de *Mécanique quantique*

« Dans tous les cas, il est essentiel de bien suivre les règles de base de la mécanique quantique, et de n'effectuer les calculs qu'en termes du vecteur d'état total, qui englobe l'ensemble des systèmes physiques en question. Toute tentative d'effectuer des calculs séparés dans les différentes régions de l'espace, puis d'introduire des corrélations par un calcul de probabilités classiques, conduirait à des résultats dont de nombreux effets quantiques non locaux seraient éliminés, en contradiction avec l'expérience ».
(*Mécanique quantique – Tome 3*, p. 672)

Du chapitre 16, de Christophe Salomon

« La mission spatiale ACES aborde la dernière phase d'assemblage et de tests avant son lancement vers l'ISS en 2019 par une fusée américaine SPACE X. Les équipes d'ingénieurs et de scientifiques préparent maintenant les opérations en vol, l'acquisition des données et leur exploitation.

Si l'on revient à l'amélioration exponentielle des performances des horloges qu'indique la figure 1, jusqu'où les horloges atomiques pourront-elles progresser avant qu'une nouvelle technologie ne vienne les surpasser ? De façon plus prosaïque, après 45 ans de bons et loyaux services, la précision de la définition actuelle de la seconde fondée sur l'atome de césium est maintenant dépassée par un facteur 100 par les horloges optiques. Il va donc falloir changer la définition de la seconde du SI ; les atomes candidats sont nombreux et les travaux en laboratoire explorent plusieurs pistes pour atteindre des stabilités de fréquence et des exactitudes de 10^{-18} 10^{-19} ».

Du chapitre 17 de Dominique Lambert

« La théorie des probabilités, revêtu de son propre statut épistémologique, est en fait une des illustrations de l'existence d'une composante proprement expérimentale de l'activité mathématique. L'oubli de cette composante ainsi que celui de la dimension irréductiblement historique et spécifiquement biologique (neurophysiologique) de la connaissance mathématique sont autant de freins empêchant de parvenir à une ébauche de solution rationnelle au problème de l'efficacité des mathématiques. L'interrogation sur le statut des probabilités constitue donc une invitation à reprendre en profondeur et de manière quelque peu latérale ce célèbre problème ».

Du chapitre 18 de Michel Serres

« Oui, nous vivons une période comparable à l'aurore de la paideia, après que les Grecs apprirent à écrire et démontrer ; comparable à la Renaissance qui vit naître l'impression et le règne du livre apparaître ; période incomparable pourtant, puisqu'en même temps que ces techniques mutent, le corps se métamorphose, changent la naissance et la mort, la souffrance et la guérison, l'être-au-monde lui-même, les métiers, l'espace et l'habitat ».

Le comité de lecture de l'AEIS⁽¹⁾

(1) Victor Mastrangelo (président), Jean-Pierre Treuil, Gilles Cohen-Tannoudji, Michel Gondran et Jean Schmets



La seconde année miraculeuse d'Einstein

Françoise Balibar

Professeure émérite, Université Paris-Diderot, France. Présidente du colloque

Propos transcrits et complétés par Jean Pierre Treuil, A.E.I.S

En 2015, on a célébré le centenaire de la théorie de la relativité générale. C'est en effet au cours du mois de novembre 1915 qu'Einstein présenta à l'Académie des Sciences de Prusse en trois séances mémorables l'essentiel de sa théorie enfin achevée. Cet anniversaire a donné lieu à plusieurs manifestations ; le présent colloque s'inscrit dans cette perspective.

Mais il me semble qu'en choisissant la date de février 2016 pour la tenue de la rencontre d'aujourd'hui, les organisateurs ont voulu rappeler que l'héritage d'Einstein ne se réduit pas à ses deux théories de la relativité (restreinte, et générale) et comporte également quelques contributions essentielles à la théorie quantique, dont l'une, élaborée au cours de l'été 1916, est à la base d'importants travaux actuels. La période qui s'étend de part et d'autre du changement d'année, de 1915 à 1916, mérite le nom d'*annus mirabilis*, tout autant que la fameuse année 1905.

Je me propose d'organiser mon exposé autour de la contribution en 1916 d'Einstein à la théorie du rayonnement, et par là-même à la théorie quantique encore en cours d'élaboration. Il est remarquable qu'à peine la théorie de la relativité générale achevée, Einstein ait eu assez de puissance théorique pour publier en plus un article important dans un tout autre domaine, celui de la théorie quantique. Cependant cette prouesse paraît moins étonnante si l'on songe que pendant toute sa vie, de 1905 à sa mort en 1955, Einstein n'a cessé d'être hanté (le mot n'est pas trop fort) par les quanta, qu'il avait lui-même introduits au sein de la théorie physique au terme d'un raisonnement « heuristique » développé en 1905 pour expliquer certaines particularités du rayonnement dans ses rapports avec les échanges de chaleur. Cette préoccupation incessante apparaît nettement à la lecture de sa correspondance (tout particulièrement dans les lettres adressées à ses amis Michele Besso et Paul Ehrenfest).

En 1916, à Berlin, en pleine guerre, la vie n'est pas facile et l'atmosphère déprimante : au détour d'une phrase, par exemple, Einstein note dans sa correspondance avec l'un de ses amis, que l'une de leurs connaissances communes « vient de perdre ses deux fils... ». Depuis le début de la guerre, Einstein, citoyen suisse, travaille avec acharnement - que pourrait-il faire d'autre ? - et continue à réfléchir à la « réalité » des quanta qu'il a introduits à titre d'hypothèse en 1905, mais dont il aimerait déterminer le statut ontologique. L'occasion lui est donnée de mettre en ordre et d'approfondir ses réflexions lorsqu'il lui est demandé de contribuer à un volume publié par la Société Physique de Zurich, en hommage à l'un de ses membres éminents, Alfred Kleiner, récemment décédé. Alfred Kleiner avait été l'un des directeurs de thèse d'Einstein ; plus exactement, Einstein avait entrepris avec Kleiner un travail de thèse qui d'un commun accord ne fut pas achevé et les deux hommes avaient continué à entretenir de bonnes relations. Einstein écrit pour cet hommage un texte qui constituera la première partie de l'article dont il exposera le contenu en octobre-novembre 1916 à Berlin à la Société allemande de Physique et qui sera publié en mars 1917. La correspondance qu'entretient Einstein avec son ami Besso fait apparaître que la question du rayonnement et de l'émission dirigée a été au centre de ses préoccupations pendant tout l'été 1916, et permet de suivre l'élaboration de ce qu'il appelle une nouvelle théorie quantique.

La théorie du rayonnement n'est cependant pas le seul domaine qu'abordera Einstein dans cette année 1916, au cours de laquelle il publiera une quinzaine d'articles. C'est l'année par exemple où il écrit un premier article de cosmologie, publié en 1917¹, acte de naissance de la cosmologie moderne. C'est également l'année où il rédige un premier texte de vulgarisation, ou du moins d'explicitation des fondements, de la théorie de la relativité. Au terme de cette année de grande ébullition intellectuelle, Einstein tombera malade - victime comme on dirait aujourd'hui d'un « burnout » - et le restera pendant toute l'année 1917 et une partie de 1918. De fait, Einstein ne s'est jamais complètement remis de cette période d'épuisement.

I. La construction d'une théorie de l'interaction matière/rayonnement

Ainsi donc, l'« invention » de la théorie quantique du rayonnement s'est faite en deux temps, correspondant l'un à l'article en hommage à Kleiner au début de l'été 1916, l'autre au travail présenté à l'automne de la même année à Berlin et publié en 1917.

Le modèle d'atome d'hydrogène élaboré par Bohr en 1913 imposait à Einstein de reprendre, sur de nouvelles bases, l'étude du rayonnement du corps noir à partir de laquelle il avait émis l'hypothèse « heuristique » de 1905 concernant la production et l'émission de lumière par quanta d'énergie bien définie. Il lui fallait désormais introduire dans le bilan de l'échange d'énergie entre matière et rayonnement, échange « à somme nulle », le fait nouveau constitué par ce que l'on appelle par abus de langage « la quantification de l'énergie de la matière », à savoir l'idée que cette énergie, elle-même somme des énergies des

(1) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen sur allgemeinen Relativität Theorie, *Preussische Akademie der Wissenschaft, Sitzungberichte*, 1917 (part. 2) 606-608.

constituants « atomiques » de la matière ne peut varier que par quanta d'énergie correspondant à l'écart entre deux niveaux d'énergie de chacune de ces « particules »².

Abandonnant (pour un temps) les interrogations qui le taraudaient depuis 1905 concernant la « réalité » des quanta de lumière, ainsi que la série d'arguments développés entre 1909 et 1913 visant à établir la double nature, ondulatoire et corpusculaire, du rayonnement, Einstein reprit donc l'étude de l'émission et l'absorption du rayonnement par la matière menée en 1905, à la lumière du résultat de Bohr, c'est-à-dire en faisant porter l'accent sur la matière elle-même. Résultat qui, de son point de vue, présentait un *intérêt épistémologique majeur*. Il permettait en effet d'effacer une de ces dissymétries dont on sait qu'Einstein fut toute sa vie un ardent pourfendeur ; en l'occurrence, il s'agit de la dissymétrie dans le traitement réservé en 1905 aux deux entités en interaction, la matière et la lumière : traitement quantique pour la lumière, dont l'énergie est quantifiée ; traitement classique, c'est-à-dire portant sur des valeurs moyennes, pour la matière.

Dans la mesure où le modèle de Bohr est relatif à *un* atome (et non à une collection d'atomes, ou « molécules »), son incorporation au raisonnement de 1905 imposait de remplacer le bilan énergétique de l'interaction matière/rayonnement qui dans l'article de 1905 portait sur des valeurs moyennes, par un bilan *détaillé*, portant sur les transitions d'un niveau d'énergie ϵ_m à un autre ϵ_n ($\epsilon_m < \epsilon_n$) d'une « molécule » isolée, émettant ce faisant un quantum de lumière de fréquence ν telle que $h\nu = \epsilon_n - \epsilon_m$. Le cadre ainsi posé, Einstein en vient à l'essentiel : « Introduisons, écrit-il³, quelques hypothèses sur les lois régissant cette transition ». « Hypothèse » est ici à prendre en un sens fort : il s'agit en effet d'imaginer, d'inventer à partir de presque rien, un mécanisme quantique plausible pour la production et l'absorption de rayonnement par des « molécules », dont on ne sait rien sinon que, comme dans le modèle d'atome de Bohr, leur énergie est quantifiée en niveaux $\epsilon_0 < \epsilon_1 \dots < \epsilon_m \dots < \epsilon_n \dots$ et qu'elles sont susceptibles de produire et d'absorber des quanta de lumière de fréquences déterminées par les écarts entre niveaux.

On peut penser que si le schéma alors inventé par lui : émission spontanée, absorption induite, émission induite - avait été aussi simple et « naturel » qu'il paraît aujourd'hui, il n'aurait pas fallu à Einstein tant de temps pour parvenir à lui donner une forme satisfaisante⁴.

Le choix de ces « hypothèses » était gouverné en aval par l'objectif que s'était fixé Einstein : retrouver la « formule de Planck » donnant la densité spectrale d'énergie du corps noir, dans l'hypothèse canonique (à l'équilibre caractérisé par la température fixe T), problème qui, a priori, n'admet pas qu'une seule solution. Einstein n'est donc pas vraisemblablement

(2) De fait, l'énergie qui est quantifiée, dans le modèle de Bohr, est celle de l'électron de l'atome d'hydrogène (supposé en orbite autour du proton) identifiée à « l'énergie de l'atome d'hydrogène ». Einstein, en 1916, étend la validité de cette définition au cas des « molécules » (sans plus de précision) constituant la matière, dont il suppose que l'énergie est elle aussi quantifiée, au même sens que l'est l'énergie de l'atome d'hydrogène.

(3) A. Einstein, « Zur Quantentheorie der Strahlung », *Physikalische Zeitschrift*, vol. XVIII, 1917. Traduit en français dans Albert Einstein, *Oeuvres choisies*, volume I, Quanta ; Paris, co-édition Seuil/CNRS, 1989.

(4) Rappelons que ce schéma introduit les « fameux » coefficients A et B contrôlant les probabilités de transition de la « molécule » entre ses deux niveaux d'énergie, lors de son interaction avec le rayonnement : coefficient A pour l'émission spontanée, B et B' pour l'absorption et l'émission induite. L'hypothèse d'équilibre thermique posée par Einstein détermine la valeur de ces coefficients, en amenant notamment $B = B'$.

« tombé du premier coup » sur le mélange d'absorption et d'émissions conduisant au « bon » résultat. Autant l'hypothèse heuristique des quanta de lumière allait de soi (c'était la plus simple de celles s'accordant avec la forme de la variation d'entropie lors d'un changement de volume du système), autant les hypothèses avancées en 1916 nécessitaient pour être inventées une bonne dose d'imagination ; pour imaginer, par exemple, un processus spontané d'émission, inattendu mais imposé par l'obligation d'établir un bilan énergétique équilibré (modulé par la loi de Boltzmann donnant la répartition statistique des états d'énergie de la « molécule » en fonction de la température⁵) ; une bonne dose d'imagination, mais aussi un certain flair dans le choix de ce qui dans la théorie classique devait être préservé lors du passage à une théorie quantique ; en l'occurrence le fait que sous l'effet d'un champ électromagnétique les « résonateurs de Planck »⁶ voient leur énergie augmenter ou diminuer selon la phase relative du résonateur et du champ inducteur, fait conduisant à l'idée d'absorption et d'émission induites au sein de la « molécule », induites par le rayonnement dans lequel elle se trouve immergée.

Etablissant alors, sur la base de ces hypothèses, un bilan détaillé (« détaillé » en ce sens que ce bilan vaut pour une molécule et qu'il concerne l'une des transitions possibles pour cette molécule, entre les états d'énergie ϵ_m et ϵ_n , à la température T fixant la répartition statistique de ces états d'énergie en régime canonique), Einstein retrouve très simplement l'expression de la densité spectrale de rayonnement, autrement dit la « loi du corps noir », ou « formule de Planck », conformément à l'objectif qu'il s'était fixé. « Une lumière m'est tombé sur la tête et j'ai trouvé une démonstration purement quantique » écrit-il à Besso, et il ajoute que cette démonstration est « verbluffend einfach », « bluffante »⁷ de simplicité.

2. Le passage du classique au quantique

Einstein décrit la démarche qui est la sienne en 1916 comme une fabrication d'hypothèses « obtenues par transfert (Übertragung) des relations (Verhältnisse) connues en théorie classique ... à celles encore inconnues de la théorie quantique ». On sait que la question de savoir comment « régler à chaque moment l'évolution des rapports d'une théorie quantique encore incertaine de ses fondements avec les théories classiques de la mécanique et de l'électrodynamique⁸ » a été au centre des préoccupations des premiers explorateurs de la théorie quantique, jusqu'à ce que Niels Bohr codifie ces rapports, en 1920, en énonçant un « principe de correspondance ». La solution adoptée par Einstein dès 1916 est à cet égard tout à fait singulière. Il s'agit en somme de prendre acte du fait que l'« oscillateur de Planck » n'est qu'un modèle, une construction intellectuelle forgée par la théorie classique

(5) Dans le raisonnement d'Einstein, la température T est imposée par l'équilibre thermique atteint dans la population de molécules. De nos jours c'est le rayonnement qui constitue le thermostat stabilisateur de la distribution (canonique) des niveaux d'énergie et qui impose donc sa température à la population des « molécules ». Comme l'exposera Jean Dalibard dans la suite de ce colloque, ce renversement est à la base des techniques de refroidissement d'atomes : on impose une basse température, ce qui permet de ralentir ces atomes et par conséquent de faire des observations impossibles à faire autrement.

(6) Dipôles mis en oscillation par l'effet du champ électromagnétique.

(7) Je ne résiste pas au plaisir de traduire *verbluffend* par « bluffant », au risque d'un faux-sens.

(8) C. Chevalley, Entrée « Principe de correspondance » du *Glossaire* ajouté à la réédition de l'ouvrage de N. Bohr, Physique atomique et connaissance humaine, Paris, Gallimard, coll. Folio/Essais, 1991, p 414 et suivantes.

pour rendre compte de certains effets physiques mais qui n'a pas d'existence réelle (à tout prendre, penser que la matière est constituée de « molécules » paraît plus conforme à la « réalité des choses » que se la représenter comme une collection d'« oscillateurs de Planck »). De ce fait, remplacer une construction théorique classique par une autre rendant les mêmes services⁹, mais relevant de prémisses théoriques différentes (en l'occurrence « quantiques ») paraît tout à fait justifié.

Cela revient cependant à construire la nouvelle théorie progressivement, morceau par morceau, en pièces détachées, chaque morceau de la théorie classique étant remplacé lorsque c'est possible par son équivalent quantique, obtenu par « transfert » du domaine classique au domaine quantique. Il ne s'agit pas, à proprement parler, d'une traduction (cela supposerait que l'on connaisse déjà en quoi consiste le « parler quantique », vocabulaire et syntaxe), mais bien d'un remplacement pierre par pierre de la théorie physique. Procéder ainsi ne se justifie que si la division en « morceaux » est la même en théorie quantique qu'en théorie classique. On se souvient ici de la distinction établie plus tard (en 1919¹⁰) par Einstein entre théories à principes (dont la théorie de la relativité est le plus bel exemple) et théories construites (parmi lesquelles il inclut alors la théorie quantique), conformément à sa propre expérience en tant que bâtisseur de la théorie quantique. Mais d'où Einstein tire-t-il une telle idée, sinon de sa propre expérience en tant que bâtisseur de la théorie quantique. A cet égard, la démarche adoptée à peu près à la même époque par Niels Bohr paraît plus ambitieuse dans la mesure où il s'était fixé comme objectif de « développer systématiquement les *principes* de la théorie quantique » avec le souci de réaliser « une cohérence interne¹¹ ».

Une dernière remarque s'impose à propos du style de travail d'Einstein durant cette seconde *annus mirabilis* ; celle-ci marque un changement de perspective radical dont nous n'avons plus guère conscience, tant la nouvelle perspective nous paraît aujourd'hui « aller de soi » : le rayonnement qui était jusqu'alors conçu indépendamment de la matière apparaît désormais comme un sous-produit de cette dernière. Le rayonnement en effet était l'objet même de la théorie électromagnétique de Maxwell, subissant divers avatars mais toujours au centre de la théorie. Il perd ce statut à partir de 1916. Certes, Einstein intitule son article de 1917 « Théorie quantique du rayonnement », mais en réalité c'est la matière qui en est le personnage principal. C'est elle qui – via la structure interne (intime, serait-on tenté de dire) des atomes (ou molécules) dont elle est constituée – façonne (au sens où l'on travaille quelque chose en vue de lui donner une « façon » particulière) le rayonnement. Autrement dit, alors que dans la théorie classique le lien entre matière et rayonnement était traité de manière métaphorique, la matière se comportant comme un ensemble imaginé de dipôles électriques indifférenciés qui parce qu'ils sont « oscillants », sont *ipso facto* rayonnants, dans la nouvelle théorie, le rayonnement porte la marque indélébile de la matière qui l'a produit : non seulement le rayonnement n'existe pas par lui-même, sans la matière, mais de plus, il fonctionne comme *révéléateur de la structure interne* de la molécule.

(9) On serait tenté de dire dans ce contexte que les coefficients *A* et *B* d'absorption et d'émission introduits par Einstein en 1916 ont pour fonction de « mimer » le comportement de l'oscillateur de Planck classique.

(10) A. Einstein, « My theory », *Times* (London), 28/11/1919.

(11) N. Bohr, lettre à A. Sommerfeld, 30/04/1922 ; cité par C. Chevalley, *op. cit.* ; p. 422 (souligné par moi, FB).

Le rayonnement émis ou absorbé est donc ce par quoi la matière se fait connaître, ou reconnaître. Un peu à la manière de Bernoulli (Johann) qui ayant reconnu la patte de Newton dans un article non signé par celui-ci, s'était exclamé « *tanquam ex ungue leonem* » (le lion se reconnaît à ses griffes) ; le rayonnement est ce que la molécule laisse filtrer de son intimité, exporte en dehors d'elle-même, sa marque en quelque sorte, que ce soit quand l'atome est isolé (émission spontanée) ou quand il baigne dans un rayonnement (émission induite et absorption). Peut-être faut-il voir là la raison pour laquelle Einstein établit une division en deux genres : *Ausstrahlung*, rayonnement sortant (*aus*) spontanément de l'atome, et *Einstrahlung*, rayonnement, émis et/ou absorbé, par l'atome du fait qu'il se trouve immergé (*ein*) dans un rayonnement inducteur. Pour lui, on l'a dit, le fait nouveau c'est l'émission spontanée, seul processus qui ne corresponde à rien en théorie classique, imposé par la nécessité d'équilibrer le bilan énergétique et qu'il s'empresse de comparer à un autre phénomène d'émission spontanée non classique, l'émission de rayonnement γ lors d'une désintégration radioactive. Aujourd'hui, du fait des applications technologiques liées à l'existence de l'émission induite, nous avons tendance à mettre l'accent sur ce processus plus que sur celui d'émission spontanée - ce qui conduit à privilégier la distinction émission/absorption par rapport à celle (spontanée/induite) suggérée par Einstein.

3. La symétrie matière/rayonnement

Mais là n'est pas aux yeux d'Einstein le résultat essentiel. Celui-ci ne lui apparaîtra comme tel qu'à la fin de l'été 1916 (et sera l'objet principal de l'exposé qu'il fera à Berlin à l'automne) ; le point fondamental est que les émissions de lumière, émission induite mais aussi émission spontanée, sont des *processus* (*Prozess* ou *Vorgang*) orientés, dirigés dans une direction unique. Cela apparaît lorsque l'on considère les processus non pas sous l'angle de l'émission ou de l'absorption du rayonnement en tant qu'objet théorique indépendant (conception maxwellienne) mais bien sous l'angle d'une interaction entre une molécule de matière et le rayonnement qu'elle produit ou absorbe. Interaction réglée, comme il se doit, par les lois de conservation - conservation de l'énergie, mais également de l'impulsion¹² de la molécule : « la question, écrit Einstein, est de savoir si la molécule, lorsqu'elle absorbe, ou émet, de l'énergie, ne subit pas une poussée ». Au terme de l'examen détaillé du mouvement d'une « molécule » dans un champ de rayonnement, Einstein aboutit à la conclusion suivante : « Il s'avère que l'on n'aboutit à une théorie libre de contradiction¹³ que si l'on conçoit les processus élémentaires comme totalement orientés¹⁴ ». Résultat fondamental, non prévu par la théorie classique, qui peut être interprété comme une confirmation du

(12) Ce qui n'avait pas été fait avant 1916, au motif que les impulsions transférées sont très faibles, donc négligeables devant les autres causes du mouvement. « Mais dans les arguments théoriques, il faut accorder à ces mêmes effets la même importance qu'aux effets plus visibles liés au transfert d'énergie ; et ceci, dans la mesure où énergie et impulsion sont étroitement liés » est la phrase par laquelle se termine l'article de 1917.

(13) « Théorie libre de contradiction », expression qu'affectonne Einstein. La capacité d'une théorie à résister à toutes les tentatives de mettre en évidence des contradictions - dans sa logique interne ou dans sa confrontation aux observations - ne fait-elle pas en effet de cette théorie une bonne candidate pour approcher la vérité ?

(14) A. Einstein, « Zur Quantentheorie der Strahlung », *op. cit.*

caractère « particulière¹⁵ » des quanta de lumière qui se trouvent ainsi caractérisés outre leur *énergie* $h\nu$, par leur *quantité de mouvement*, $h\nu/c$ (dans la direction du rayonnement). D'une certaine façon le photon, qui ne porte pas encore son nom, est né en 1916.

Le cas de l'émission spontanée est intéressant à un autre titre : alors que selon les règles de l'électrodynamique classique, on s'attendrait à une émission sous forme d'ondes sphériques (distribution symétrique), la « nouvelle » théorie quantique indique qu'il n'en est rien et que l'émission spontanée est elle aussi dirigée. « *Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht* »¹⁶ (l'apposition suivie de l'inversion *gibt es*, au lieu de *es gibt*, a une connotation emphatique), il n'y a pas d'émission spontanée de lumière sous forme d'ondes sphériques, écrit Einstein.

Ce ton emphatique s'explique par le fait que ce résultat apporte un élément de réponse à une question qu'Einstein s'était déjà posée en 1909. Dans la communication qu'il fit alors à la Conférence de Salzbourg réunissant les physiciens de langue allemande, portant sur l'évolution de nos conceptions (*Anschauungen*) sur la nature et la constitution du rayonnement, Einstein avait émis l'idée que la caractéristique fondamentale de la théorie ondulatoire, rendant problématique son insertion dans un raisonnement statistico-thermodynamique, est que « contrairement à ce qui se passe en théorie cinétique moléculaire, où à chaque processus élémentaire (par exemple à chaque collision moléculaire), correspond un processus inverse, en théorie ondulatoire, un ion oscillant engendre une onde sphérique se propageant vers l'extérieur, sans qu'existe un processus élémentaire inverse »¹⁷. Le fait que cette difficulté ne se présente pas dans la théorie quantique du rayonnement élaborée en 1916 - puisque la possibilité d'émission sous forme d'ondes sphériques en est exclue - ne pouvait que conforter Einstein dans son appréciation des insuffisances de la théorie classique ondulatoire.

Pourtant, Einstein n'était pas entièrement satisfait de son propre travail. L'émission spontanée qui donc ne se fait pas sous forme d'onde sphérique, mais bien dans une seule direction, n'est pas complètement décrite puisque cette direction n'est pas déterminée et reste aléatoire : « les instants et les directions des processus élémentaires [et singulièrement du processus d'émission spontanée] y sont laissés au hasard ». En sorte que la difficulté repérée en 1909 n'est pas vraiment résolue ; elle s'est plutôt déplacée. Ou encore comme le note Pauli, revenant trente ans après sur cet épisode, dans sa contribution au livre d'hommages présenté à Einstein à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire : « l'incompatibilité entre les caractéristiques « interférentielles » du rayonnement (qui ne peuvent être décrites qu'en faisant intervenir le principe de superposition de la théorie ondulatoire) et les caractéristiques « échangeistes » (échange d'énergie et de quantité de mouvement) de l'interaction du rayonnement avec la matière (qui ne peuvent être décrites qu'à partir d'une image corpusculaire) restait entière et semblait à première vue insurmontable ».

(15) « La faiblesse de la théorie réside ... dans ce qu'elle ne nous rapproche guère d'une unification avec la théorie ondulatoire » conclut Einstein, visiblement toujours préoccupé par l'idée de dualité onde-corpuscule.

(16) A. Einstein, « Zur Quantentheorie der Strahlung » *op. cit.*

(17) Cf. A. Einstein, « On the development of our understanding of the nature and composition of radiation ». *Physikalische Zeitschrift*, vol. 10, N° 22, pgs 817... (1909) ; Einstein remarquait en effet, « A spherical wave propagating inward is indeed mathematically possible, but it needs a number of emitting elementary structures for its precise realization. »

Pauli n'avait pas tort. L'émission spontanée dirigée (et non isotrope), si elle apportait bien un élément nouveau à l'intelligibilité du processus de production du rayonnement, mettait en évidence la différence irréconciliable entre les conceptions ondulatoire et corpusculaire. Si l'on en croit Pauli, la situation allait être débloquée quelques années plus tard par de Broglie et sa théorie de la dualité. Il n'est pas sûr qu'Einstein ait partagé cette opinion, persuadé qu'il était que la difficulté soulevée n'était pas propre à la théorie classique du rayonnement, mais bien plutôt à toutes les théories du champ - et donc à sa propre théorie du champ de gravitation. Ainsi écrivait-il à Lorentz, le 17 juin 1916, comme pour ajouter un bémol au bilan glorieux de sa seconde année miraculeuse : « Je n'ai pas achevé la théorie du rayonnement des systèmes matériels. Une chose est claire : les difficultés des quanta concernent tout autant la nouvelle théorie de la gravitation que la théorie de Maxwell ». Nul doute que Serge Haroche, dans son intervention qui doit porter sur la dualité onde-corpuscule, nous en dira plus demain.

Première partie

Relativité,
Ondes de l'Univers

Première partie

Relativité, Ondes de l'Univers

Présentation

La première partie de l'ouvrage est consacrée à certaines vérifications expérimentales récentes ou applications des équations de la Relativité générale : c'est l'équation d'Einstein, clé de voûte de cette théorie, admirable de simplicité formelle, qui va être en œuvre, de façon directe ou indirecte, dans toute cette partie.

La Relativité générale « succédait » à la Relativité restreinte ; cette dernière associait le postulat de la relativité galiléenne, posant l'équivalence, dans la formulation des lois physiques, des référentiels en mouvement relatif uniforme, au postulat de la constance, pour tout observateur, de la vitesse de la lumière dans le vide. La combinaison des deux postulats aboutissait aux transformations de Lorentz et à une structure de l'espace-temps « plate », dite de « Minkowski » avec une métrique uniforme, sans courbure ; la gravitation en était absente. Or nombre d'aspects de l'astrophysique et de la cosmologie ne peuvent bien sûr être traités sans intégrer la gravitation, et c'est Einstein qui, a apporté, en 1916, les compléments nécessaires pour surmonter ce problème.

Lorsque Einstein voulut aborder les problèmes du mouvement des corps massifs soumis à la gravitation, il a été amené à considérer un espace-temps ayant une structure plus complexe, présentant une courbure, courbure dont les caractéristiques pouvaient ne pas être uniformes. Dans cette réflexion, la question de l'équivalence des référentiels (vis-à-vis de la formulation des lois de la nature) était à nouveau posée : l'équivalence des référentiels en déplacement uniforme les uns par rapport aux autres pouvait-elle être généralisée à de nouvelles relations entre référentiels, animés par exemple de mouvements relatifs accélérés ? voire à des référentiels reliés de manière quelconque ?

Dans l'introduction de son article de 1916 sur les fondations de la Relativité générale, Einstein fait une référence à Ernst Mach, disparu cette année là. Ce dernier avait émis l'idée que le mouvement d'un corps, quel qu'il soit, inertiel ou accéléré, était relatif, en ce sens qu'il ne pouvait se définir que par rapport aux autres corps présents dans l'Univers. Mach avait illustré ce postulat par une expérience de pensée que l'on peut décrire ainsi :

1. une fusée est en mouvement inertiel rectiligne et uniforme, car supposée suffisamment loin de toute autre masse pour que la gravitation soit négligeable. Si son réacteur est mis en marche, l'intérieur de la fusée est soumis à une force inertielle produite par l'accélération ;
2. supposons que l'ensemble de l'Univers, c'est-à-dire des corps qui le composent, à l'exception de la fusée, soit soudain soumis à une accélération constante ; qu'en résulte-t-il pour la fusée ? Mach postule que, à l'intérieur de la fusée, sera aussitôt ressentie une accélération égale et opposée à celle qui anime l'univers.

Dans le premier cas le mouvement de la fusée est accéléré par ses moteurs ; dans le second cas il n'est soumis à aucune force apparente, donc censé rester au repos ou en mouvement uniforme. Cependant un observateur présent dans la fusée ne pourra faire aucune différence entre les deux situations, ce qui établit leur équivalence du point de vue des lois physiques : seul le mouvement relatif de la fusée et des autres corps entre en jeu.

En citant Mach, Einstein reprend cette expérience de pensée sous une forme un peu différente, en considérant deux corps en rotation relative. Mais il en considère une seconde : celle-ci montre l'équivalence, du point de vue d'un observateur, entre un référentiel accéléré dans un univers sans gravitation (cas semblable au premier cas de Mach décrit précédemment) et un référentiel soumis à gravitation : les forces inertielles apparaissant dans le premier référentiel se comportent comme des forces gravitationnelles. C'est une conclusion qui s'impose suite à la constatation de « l'universalité de la chute libre » selon laquelle, dans un champ gravitationnel, les corps accélèrent de la même manière, quelles que soient leur masse et leur nature.

Einstein eut donc une double intuition ; d'une part, qu'il fallait pouvoir écrire les lois de la nature de façon indépendante de tout référentiel particulier ; d'autre part, que l'espace – plus exactement l'espace-temps – était doté de propriétés qui contrôlaient les mouvements des corps massifs et les trajets des rayons lumineux et qu'il fallait décrire l'espace selon ces propriétés. Pour mettre en application cette double intuition, il sut tirer parti des géométries non-euclidiennes et de l'invention des tenseurs. Les géométries non euclidiennes avaient été introduites au XX^e siècle, notamment par Bernhard Riemann en 1854. L'invention des tenseurs, du moins le premier exposé systématique du calcul tensoriel, est due à deux italiens, R. Ricci et T. Levi-Civita, dans leur publication de 1900. Le calcul tensoriel fournissait un outil idéal ; les tenseurs et les équations tensorielles décrivent en effet les propriétés locales d'un espace dans leur nature intrinsèque, indépendamment de tout référentiel, et notamment les métriques des espaces non-euclidiens.

Einstein s'engouffra dans cette voie pour développer la théorie de la Relativité générale. Deux tenseurs fondamentaux étaient ainsi mobilisés : un tenseur d'ordre 2, $G_{\mu\nu}$, porte

le nom d'Einstein, il décrit des propriétés géométriques de l'espace-temps sur un évènement donné, déduites mathématiquement du champ tensoriel métrique au voisinage de cet évènement, et donc du champ gravitationnel dans ce même voisinage. Le second, $T_{\mu\nu}$, est le tenseur d'énergie impulsion, exprimant les propriétés du contenu matériel sur le même évènement, en terme de densités d'énergie et d'impulsion, de flux d'énergie et de contraintes exercées, de type pression.

L'équation d'Einstein est une relation de proportionnalité entre les deux tenseurs, valable sur tous les points de l'espace-temps : $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$; k , constante de couplage, tire sa valeur $8\pi G/c^4$ de la nécessité de retrouver la limite newtonienne (soit l'équation de Poisson, liant le champ gravitationnel au champ de densité) lorsque le champ gravitationnel devient faible. Cette équation couronne la Relativité générale ; elle est l'outil de base de tous les calculs dans ce domaine.

Notons enfin une sorte de prix à payer dans le passage entre les deux Relativités ; à savoir les répercussions d'ordre métrologique de la présence d'un champ gravitationnel non uniforme. En Relativité générale, la longueur d'une règle « rigide », sur une position spatiale fixe dans un référentiel, ne peut plus être évaluée indépendamment de cette position et de l'instant de la mesure. De même, est-il impossible, en général, de faire en sorte que deux horloges mécaniquement semblables puissent rester synchrones tout au long de leur « ligne d'univers ». Ces impossibilités disparaissent, en première approximation, *localement*, c.-à-d. dans une région de l'espace-temps suffisamment petite pour que le champ métrique, et donc le champ gravitationnel, puissent y être considérés comme uniformes : on retrouve alors les conditions qui prévalaient en Relativité restreinte, où un observateur pouvait synchroniser ses horloges sur tout l'espace et où la longueur d'une règle pouvait être associée aux différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ entre les coordonnées de ses extrémités.

Des premiers éléments de preuve – déterminants dans l'acceptation de la Relativité générale à l'époque – étaient apportés très vite. Ainsi en est-il de la précession du périhélie de Mercure ; un écart significatif, par rapport à ce que l'on pouvait déduire de la théorie newtonienne, avait déjà été mentionné et évalué par Le Verrier en 1859. Ainsi également la valeur de la déviation de la lumière, en provenance d'une étoile en arrière plan, observée lors de l'éclipse de 1919. Mais d'autres conséquences n'ont été attestées par l'observation que bien après, la dernière en date fut celle des ondes gravitationnelles en 2015 seulement. La raison essentielle est que la détection de ces éléments de preuve appelait des moyens techniques d'une puissance et d'une précision que les physiciens n'ont acquises que très récemment. Ces conséquences concernent des phénomènes d'astrophysique et autres aspects relevant de la structure à grande échelle de l'Univers. Il s'agit notamment de l'existence d'ondes gravitationnelles, du phénomène de lentilles gravitationnelles et de l'existence et de l'origine des trous noirs.

Les quatre premiers chapitres de cette partie sont consacrés aux ondes gravitationnelles et aux effets de lentilles. Il s'agit de phénomènes bien différents, mais cependant que l'on peut réunir par le fait qu'ils manifestent tous deux *des perturbations de la géométrie de l'espace-temps*, par rapport à une géométrie de référence : dans le premier cas, cette géométrie de référence est celle d'un espace-temps *vide* alors que dans le second cas, elle est celle d'un espace-temps rempli de matière. Pour les ondes gravitationnelles, il s'agit de perturbations

de nature *tensorielle*, les seules dont la théorie montre qu'elles peuvent « se propager » dans le vide. Pour les effets de lentilles, il s'agit de perturbations induites par l'inhomogénéité spatiale du champ de matière (ou d'énergie). Elles sont principalement de nature *scalaire*, du moins lorsque l'espace-temps « de fond » est isotrope et la distribution de matière pas trop éloignée d'une distribution uniforme, et bien sûr, en l'absence d'interactions avec des ondes gravitationnelles. Le dernier chapitre est consacré aux apports du satellite Planck à la cosmologie. Notons, sans entrer ici dans le détail, qu'on y retrouve les thèmes des chapitres précédents, à travers le fond diffus cosmologique et l'image que l'on en perçoit.

I. Ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles ont été prédites par Einstein, *comme conséquences* de sa célèbre équation. Les calculs montrant la possibilité de telles ondes ont été présentés dans un article paru dès 1916, et ont été repris ensuite en 1918. Dans les deux articles la démarche est la même : Einstein linéarise son équation, en supposant que la métrique de l'espace-temps ne s'écarte que très peu de celle d'un espace-temps qu'il appelle alors « galiléen », et que nous désignons maintenant par l'espace-temps de Minkowski. Le système d'équations obtenu comprend une équation d'onde, telle que décrite par la physique ondulatoire classique, assortie de conditions restreignant le champ des solutions possibles. De ces calculs, Einstein déduit les propriétés générales de ces solutions : combinaisons d'ondes planes, polarisées, se propageant dans le vide, à la vitesse de la lumière ; il établit par quels types de systèmes matériels de telles ondes peuvent être générées ; il présente les formules donnant, dans cette approximation linéaire, l'amplitude de ces ondes, mesurée loin de leurs sources, dans le vide, ainsi que la puissance qu'elles transportent, en fonction des caractéristiques des systèmes émetteurs. Einstein, à la fin de l'article de 1918, envisage l'action d'un train d'ondes gravitationnelles sur un système matériel. Mais avait-il imaginé que, cent ans plus tard, les ondes gravitationnelles seraient détectées ?

Il faut noter que des solutions exactes aux équations de la Relativité générale – des solutions de l'équation d'Einstein – ont pu être trouvées dans certains cas : les solutions, par exemple, exprimant la structure géométrique d'un trou noir isolé (métriques de Schwarzschild, de Kerr), ou encore celles exprimant la structure géométrique d'un univers homogène et isotrope (métriques de Friedmann-Lemaître). Il ne s'agit cependant que de cas particuliers, où de fortes symétries interviennent. Hors de tels contextes, les physiciens passent par des simplifications et des approximations. C'est le cas pour le calcul des équations d'ondes gravitationnelles. L'approximation linéaire, présentée plus en détail dans le chapitre I (premier exposé de Patrice Hello), s'est avérée suffisante pour établir les formules rendant compte du phénomène, lorsque généré par un système émetteur où le champ gravitationnel reste faible et dont la dynamique reste lente. Par exemple un système stellaire binaire loin de la coalescence. Mais cette approximation linéaire s'avère insuffisante pour modéliser et pouvoir interpréter le signal émis lors de la coalescence de tels systèmes, et il faut alors pouvoir affronter les non-linéarités de l'équation d'Einstein. C'est l'objet d'une partie du chapitre 2 (chapitre rédigé sous la responsabilité de Jean

Pierre Treuil à partir de l'exposé de Luc Blanchet), que d'approcher dans leur principe les méthodes mises en œuvre à cette fin.

Les ondes gravitationnelles ouvrent une nouvelle fenêtre d'observation de l'Univers, et il est bien sûr essentiel de bien connaître la variété des sources d'émissions, et de pouvoir spécifier les détecteurs adaptés. Le chapitre 1 décline ainsi quelques grands types de sources, contextes d'émission ou de détection : ondes gravitationnelles émises par les systèmes binaires, mais seulement détectables, pour le moment, lors de leur coalescence ; ondes gravitationnelles émises lors de l'effondrement gravitationnel dans certaines explosions de supernovae ; ondes gravitationnelles émises par des étoiles à neutrons isolées, mais de forme non complètement isotrope ; ondes gravitationnelles d'un fond stochastique, composé d'un éventuel fond d'origine cosmologique (traces des fluctuations primordiales et de la période d'inflation) et d'un fond diffus (analogue, dans le domaine électromagnétique, du fond diffus infrarouge) provenant de la superposition d'ondes émises par des sources trop lointaines et nombreuses pour être individuellement distinguées. Sur ce même thème, le chapitre 2 se focalise spécifiquement sur les systèmes binaires d'objets compacts, tels les couples d'étoiles à neutrons, de trous noirs stellaires, de trous noirs supermassifs aux centres des galaxies, ainsi qu'aux estimations qui ont pu être faites dans le passé concernant la fréquence des coalescences détectables de ces objets. Il faut dire que tout système constitué d'au moins deux corps gravitationnellement liés émet des ondes gravitationnelles, le point important étant cependant la nécessité de corps très massifs pour que la puissance émise ne soit pas négligeable. À titre d'exemple, Roger Penrose évoque le cas du couple Soleil-Jupiter où l'énergie dissipée est celle d'une lampe de 40 watts ; par comparaison la coalescence de deux trous noirs stellaires détectée par LIGO en septembre 2015 avait soutenu, sur une durée de 0.28 secondes, une puissance moyenne de 10^{48} watts !

Le chapitre 3 (second exposé de Patrice Hello) présente brièvement cette première détection d'ondes gravitationnelles, faite conjointement, aux Etats-Unis, par les deux détecteurs LIGO de Hanford et Livingston. Le même chapitre mentionne les outils statistiques qui ont permis de s'assurer de la réalité astrophysique de l'événement, complétant le chapitre 1 qui dresse un tableau du principe de ces détecteurs, de la nature des différents « bruits » qu'il faut réduire pour espérer un rapport signal sur bruit acceptable, et de la longue course à la réduction progressive de ces bruits.

Depuis août 2017 le détecteur européen VIRGO est opérationnel, le trio LIGO/VIRGO permettant désormais de connaître précisément la direction des sources émettrices. Il faut rappeler que rien, pour le moment, ne permet d'anticiper la survenue imminente de tels événements : il faut simplement faire que les détecteurs soient « à l'écoute » et que les ordinateurs puissent en permanence, sur la fenêtre temporelle d'observation, décoder les signaux reçus. Dans l'avenir cependant, le détecteur spatial du projet LISA, travaillant sur des fréquences d'ondes plus basses, sera capable de détecter les ondes émises par un système binaire plusieurs années avant sa coalescence, ce qui permettra de prévoir cette dernière avec une très grande précision.

2. Les trous noirs

Si la survenue de la coalescence d'un système binaire était légitimement espérée, sa nature – la coalescence de deux trous noirs stellaires – semble avoir été une surprise. L'origine de cette surprise ne tient pas tant au fait qu'un tel évènement ait eu lieu – les estimations antérieures du taux de coalescence de trous noirs stellaires étaient entachées de grandes incertitudes, supérieures à celles effectuées pour les couples d'étoiles à neutrons : elle réside principalement dans les masses en jeu, de l'ordre de 30 masses solaires pour chacun des deux trous noirs.

Mais c'est bien l'existence de trous noirs qui se trouvait ainsi directement observée à l'aide de cette nouvelle sonde. Ces objets n'ont pas été explicitement évoqués dans les chapitres de cette première partie, mais ils sont l'une des conséquences majeures de la théorie relativiste. Ils résultent des solutions (des équations d'Einstein) à symétrie sphérique *dans le vide*, établies par S. Schwarzschild en 1916. Il calcule la distance au centre d'un astre à partir de laquelle l'attraction gravitationnelle donne à l'espace-temps une courbure capable de retenir la lumière. Cette distance, appelée « rayon de Schwarzschild » a une importance capitale : si l'astre est suffisamment compact pour être inclus dans une sphère ayant ce rayon, alors les rayons lumineux émis par l'astre seront déviés vers le centre d'attraction. On a alors affaire à un trou noir. A titre d'exemple, pour être un trou noir, un astre de la masse de la Terre devait avoir un rayon de 8,9 m. Et un astre de la masse du soleil, un rayon de 2,95 km.

Notons que, dans un premier temps, Schwarzschild avait calculé le rayon qui porte son nom dans la cinétique non relativiste où c est une vitesse non limitative. Ce rayon trouve son origine dans une réflexion sur la vitesse de libération d'un corps gravitant en orbite autour d'un astre, donc dans le calcul de la distance en deçà de laquelle un corps animé d'une vitesse égale à celle de la lumière ne peut s'échapper à l'infini. Il faut rappeler que de telles idées, couplant les lois de Newton avec une conception corpusculaire de la lumière, avait déjà été évoquées à la fin du XVIII^e siècle par John Michell, puis par Pierre Simon de Laplace.

L'application des équations de la Relativité générale permet de bien décrire la structure de la géométrie de l'espace-temps contenant le trou noir, tant externe qu'interne. Elle a donné lieu à de nombreux développements, introduisant notamment les notions d'horizon, de singularité centrale, d'ergosphère, en prenant en compte la présence d'un moment cinétique (rotation, métrique et trous noirs de Kerr).

3. Lentilles gravitationnelles

Juste après l'avènement de la Relativité générale, différents travaux ont recherché des solutions particulières aux équations d'Einstein fondant des modèles théoriques d'univers vides ou de contenu homogène. Donc dans une approche purement mathématique (géométrique). Mais la cosmologie moderne se fixant pour but de rendre compte de l'histoire de l'Univers réel se devait d'intégrer les développements de

la physique et d'appliquer les équations relativistes à un univers inhomogène à de multiples échelles. Dès lors que le niveau de précision dépasse un certain seuil, il devient notamment important de comprendre comment se construit l'image que nous percevons en provenance d'objets et de phénomènes lointains, sachant que les rayons lumineux qui forment cette image ne dépendent pas seulement de la source émettrice, mais sont affectés dans leur trajet par le contenu matériel et la structure géométrique des milieux traversés. C'est le défi des chercheurs qui étudient ainsi les effets de lentilles gravitationnelles que de convertir en faveur d'une meilleure connaissance, ce qui pourrait paraître a priori purement négatif, à savoir toutes les transformations (convergence ou divergence, déformations diverses) imposées à l'image par la matière intermédiaire rencontrée.

Le chapitre 4 (rédigé sous la responsabilité de Jean Pierre Treuil à partir de l'exposé de Jean-Philippe Uzan) aborde en premier le principe de ces analyses, dont les fondements remontent eux aussi aux articles d'Einstein de 1916 et aux premiers tests de la Relativité générale : la déviation d'un rayon lumineux par un corps massif tel que le Soleil. Plus largement, le cône lumineux provenant d'un objet céleste et « enveloppant » en quelque sorte, une galaxie, est courbé par l'effet relativiste de la masse de cette galaxie, et fournit à l'observateur au delà de la galaxie, une image agrandie et éventuellement déformée de l'objet émetteur. Mais cette présentation est encore trop simple car en réalité le faisceau lumineux parvenant à l'observateur passe à travers, ou à côté, d'une succession de sur-densités ou de sous-densités et c'est la somme de ces modifications successives que cet observateur réceptionne. L'outil théorique qui permet de raisonner sur ces transformations et de les exploiter (après les avoir mesurées dans une région du ciel par des approches statistiques) est l'équation de Sachs dont le chapitre 4 donne la forme et la filiation à partir des équations contrôlant les trajets lumineux (équations des géodésiques et de déviation géodésique).

Dans leur principe, de telles études opèrent par comparaison : comparaison des images réellement observées (ou de grandeurs, éventuellement statistiques, qui leur sont liées) avec les images ou grandeurs qui *seraient observées* dans un univers hypothétique pour lequel on dispose d'un modèle, et que l'on peut donc calculer. Ces études procèdent donc d'une part de mesures de plus en plus performantes, et d'autre part de la mise en œuvre d'outils mathématiques lourds que les physiciens utilisent avec pragmatisme, en commençant par des modèles simples, pour atteindre progressivement des modèles prenant en compte la complexité de la réalité.

Le chapitre 4 expose ainsi comment sont calculées, à partir de l'équation de Sachs, les caractéristiques du champ de transformation des images (convergence, cisaillement) qui seraient celles d'un modèle d'univers construit sur celui de Friedmann-Lemaître (i.e. homogène et isotrope) auquel sont imposées des variations continues de densité introduisant de faibles inhomogénéités. De même, peut-on calculer, toujours à partir de la même équation, ces mêmes caractéristiques dans un modèle d'univers *non isotrope*, où le rythme d'expansion dépendrait de la direction d'observation. Enfin, ce chapitre aborde également, pour des objets très lointains et dont on ne reçoit qu'un faisceau lumineux très fin, les biais que les effets de lentilles introduisent dans le calcul des distances à partir du redshift – du décalage de la fréquence lumineuse vers le rouge. Les astrophysiciens sont en effet lancés dans une

course pour la précision dans les mesures de distances, dont l'enjeu est primordial pour la connaissance des paramètres cosmologiques. Or, à l'échelle de ces rayons lumineux très fins, le modèle d'un champ continu de variations de densité n'est plus tout à fait pertinent ; il faut alors se tourner vers le paramétrage d'une distribution (discontinue) de grains de matière dans un univers vide.

4. Vers un modèle standard de la cosmologie : les résultats du satellite Planck

Le projet Planck a été imaginé en 1992. L'Agence spatiale européenne l'adopta en 1996, et le lancement a eu lieu en 2009. Le projet est essentiellement une cartographie des rayonnements venus du « fond du ciel », dans une bande de fréquence très étendue, et couvrant, en particulier, les fréquences permettant de cartographier les infimes variations directionnelles des propriétés du fond diffus cosmologique (CMB), au cœur de l'étude de l'Univers primordial et de la lumière fossile. Planck fait suite à deux autres entreprises successives ayant eu également comme objectif l'étude du fond diffus cosmologique, savoir COBE (fin des années 1980) et WMAP (2001), en portant la résolution angulaire à un niveau de précision inégalé.

Le satellite Planck a été arrêté en 2013. Il a apporté une moisson d'informations, qui s'exprime, après le recueil des données, leurs traitements et leur traduction, par des cartographies très variées de l'ensemble de la sphère céleste. Les résultats scientifiques obtenus à partir de ces cartographies font l'objet d'une série de publications référencées sous la Planck collaboration. François Bouchet, qui fait partie de l'équipe franco-italienne à l'origine du projet et qui en a été un des acteurs principaux, présente, au chapitre 5, les modalités de recueil et de traitement des données qui ont conduit à cette avancée scientifique cruciale pour le modèle standard de la cosmologie, le modèle Λ CDM en y intégrant l'hypothèse de l'inflation.

Le chapitre 5 (texte de François Bouchet) résume ainsi quelques conclusions importantes ; citons ici celles concernant l'isotropie à grande échelle du fond diffus et son caractère gaussien ; citons encore les fourchettes encadrant à 68 % et 95 % les estimations des paramètres du modèle standard. En particulier, une grande attention a été portée sur le paramètre de « platitude » spatiale Ω_k ; donc en envisageant un modèle Λ CDM étendu, dans lequel ce paramètre pourrait ne pas être rigoureusement égal à 0 ; les estimations laissant, à priori, la valeur de Ω_k non fixée, et intégrant plusieurs sources, donne ainsi pour cette valeur une moyenne de 0.0008 dans une fourchette à 95 % entre -0.0039 et +0.0040. Ce résultat conforte sérieusement l'hypothèse de l'inflation, qui prédit une platitude quasi-nulle. Citons enfin les tests de « non-gaussianité » concernant différentes variantes des modèles d'inflation ; les scénarios les plus simples (dynamiques induites par un seul champ scalaire avec « roulement lent ») prédisent des fluctuations primordiales de métrique – découlant de fluctuations quantiques – presque gaussienement distribuées : les tests effectués sur les données de Planck sont compatibles avec de telles distributions et semblent donc privilégier de tels scénarios.

5. Conclusion

En se basant sur les équations de la Relativité générale, qui ignorent la constante de Planck, et sur les propagations d'ondes électromagnétiques et gravitationnelles, les articles de cette première partie se situent dans un courant classique et déterministe, comme le confirment ces différents éléments. Les ondes gravitationnelles sont des ondes au sens de la physique classique, sans nécessité expérimentale de faire intervenir une éventuelle description quantique basée sur la notion de graviton. Elles avaient été prédites par les équations d'Einstein en 1916, soit une décennie avant l'élaboration des premiers formalismes de la mécanique quantique avec Heisenberg et Schrödinger. Leur détection elle-même, un siècle après la prévision théorique, montre que la Relativité générale reste indépendante de toute approche quantique, et n'a toujours pas été surpassée. Ainsi, le courant classique et déterministe, défendu par Einstein, occupe toujours une place importante en physique, avec toutefois une composante chaotique pouvant avoir un rôle majeur, ce à côté du courant quantique probabiliste, qui s'est extrêmement développé, et est abordé dans les deux prochaines parties.

Il faut constater, en outre, que les physiciens qui sont à l'origine de ces théories sont partis, pour les établir, de postulats inspirés par une réflexion approfondie sur les phénomènes physiques. Puis ils ont fait confiance aux résultats des développements mathématiques. Ainsi, Einstein constatant que son équation de la gravitation avait la structure d'une équation d'ondes n'hésite pas à prédire la découverte d'ondes gravitationnelles ; la nature ondulatoire de la propagation de la gravitation était implicite dans la structure des tenseurs de l'équation d'Einstein. On ne peut qu'être admiratif devant les capacités prédictives des théories, compte tenu du nombre très limités de postulats sur lesquels elles se fondent. Cette réflexion vaut aussi pour la Mécanique quantique, ce qui place ces constructions au sommet des capacités de l'esprit humain.

Le comité de lecture de l'AEIS¹

(1) Jean-Pierre Treuil, Gilbert Belaubre, Claude Elbaz et Jean Schmets

1

Les ondes gravitationnelles. Une nouvelle fenêtre sur l'Univers

Patrice Hello

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay, CNRS,
IN2P3 et Université de Paris Sud, France

Conférence transcrite par Jean Pierre Treuil, A.E.I.S

Résumé

Le présent chapitre est, dans cet ouvrage, le premier de trois chapitres compagnons consacrés aux ondes gravitationnelles. Il présente quelques éléments de l'état de l'art, tel qu'existant lors de l'annonce de la première détection directe des ondes gravitationnelles, lors du 11 février 2016 : Nature et propriétés des ondes gravitationnelles ; équations de la propagation et de la génération des ondes dans les conditions de validité de l'approximation linéaire (équations d'Einstein linéarisées) ; diversité des sources astrophysiques et des signaux gravitationnels associés. Après un rappel des principes de détection en œuvre au sein de détecteurs tels VIRGO et LIGO, il dresse un tableau de l'amélioration du rapport signal sur bruit et de la course à la sensibilité ayant conduit aux performances actuellement opérationnelles.

Abstract

Gravitational Waves, a new Window on Universe

The present chapter in this book is the first of three devoted to gravitational waves. It presents some elements of the existing state of art, when the first direct detection of gravitational waves was announced on february 11, 2016: nature and properties of gravitational waves; equations of propagation and generation of waves according to the validity conditions of the linear approximation (linearized Einstein's equations); diversity of astrophysical sources and their related gravitational signals. After a reminder of the implemented principles of detection within detectors like VIRGO and LIGO, he draws a table of the improvement of the signal noise ratio, and the course of sensibility, having led to the nowadays operational performances.

Ce chapitre reprend, dans son contenu, la première partie de l'exposé effectué par Patrice Hello le Jeudi 11 février 2016 dans l'après midi. Cet exposé a en effet été volontairement interrompu par l'annonce de la première détection directe des ondes gravitationnelles, annonce faite depuis les Etats-Unis par l'équipe LIGO ce même après-midi à 16 h 30. Il s'agissait en effet de donner toute sa place à cette annonce, qui ouvrait une nouvelle ère dans l'Astronomie observationnelle.

Sont ici présentés successivement, en trois grandes sections :

1. Un rappel de la nature et des propriétés des ondes gravitationnelles, en les situant dans le cadre de la théorie par laquelle leur existence a été prévue, savoir la Relativité Générale, et en se limitant à l'approximation linéaire des équations d'Einstein.
2. Un aperçu des sources génératrices d'ondes gravitationnelles et des formes de signaux, dans leur diversité.
3. Un tableau des techniques de détection, telles qu'elles sont utilisées dans des détecteurs comme VIRGO ou LIGO, et de la « course à la sensibilité », c'est à dire à la réduction des bruits de fond, auxquelles la mise en œuvre pratique de ces techniques a procédé.

I. Nature et propriétés des ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont une perturbation de la métrique de l'Espace-Temps. Elles sont engendrées par des mouvements de masses, en analogie avec les ondes électromagnétiques qui sont produites par des mouvements de charge. De par cette nature, elles relèvent d'emblée de la théorie de la Relativité Générale et leur existence a été prédite par Einstein dès 1916. Après un bref préambule concernant la notion de métrique, nous montrons dans cette section comment les équations contrôlant les ondes gravitationnelles se déduisent des équations fondamentales de la Relativité générale ; nous allons vérifier qu'il s'agit bien d'équations d'ondes, énoncer quelques propriétés de ces ondes et en décrire les effets sur la matière.

I.1 Rappel : la notion de métrique

La métrique, dans le présent contexte, est une propriété de l'Espace-Temps en chacun de ses points, c'est à dire en chacun de ses évènements¹. C'est une propriété intrinsèque car associée à des quantités conservant la même valeur, quelque soit le référentiel de coordonnées choisi. L'emploi du terme de tenseur marque ce caractère intrinsèque, de propriété indépendante des référentiels utilisés.

Dans un référentiel donné, le tenseur métrique lié à un certain évènement prend la forme concrète d'un tableau de 16 nombres ou *composantes*, positionnées sur quatre lignes et quatre colonnes, d'où la notation $g_{\mu\nu}$, les valeurs (0, 1, 2, 3) des indices μ et ν désignant respectivement les lignes et les colonnes du tableau. Dans les référentiels considérés dans cet article, la valeur 0 des indices sera toujours associée à la direction temporelle, et les valeurs 1, 2, 3 aux trois directions spatiales² ; des formules précises indiquent comment se transforment les composantes lorsqu'on change de référentiel. Bien entendu, dans un univers non homogène, la valeur multidimensionnelle du tenseur, et donc celles des composantes du tableau qui représente cette valeur dans un référentiel donné, varie d'un évènement à l'autre. On parle de *champ tensoriel*, en l'occurrence du champ tensoriel métrique ; mais en pratique le terme de tenseur, dans les équations, est souvent employé pour désigner le champ tensoriel correspondant. Notons que le tenseur métrique est symétrique : il n'y a en fait que dix (et non seize) composantes indépendantes.

Les quantités associées au tenseur métrique - invariants lorsque l'on change de système de coordonnées - sont les « longueurs » des « trajectoires » entre deux évènements ; les guillemets marquent ici l'inadaptation du vocabulaire courant pour intégrer le temps comme quatrième dimension³. Sans s'étendre, disons que de telles longueurs comportent une composante spatiale - une distance - et une composante temporelle - une durée - qui séparément n'ont pas de valeurs indépendantes du système choisi ; et qu'elles se calculent par une intégrale mobilisant les valeurs du tenseur métrique le long de la trajectoire étudiée.

I.2 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont les fondations de la Relativité Générale. Elles établissent une relation entre le contenu matériel (masses et énergie) de l'Univers d'une part et sa géométrie (géométrie d'un espace à quatre dimensions, l'Espace-Temps) : comme l'a dit le physicien américain John Wheeler, *la matière dit à l'Espace-Temps comment se courber, l'Espace-Temps courbé dit à la matière comment se déplacer*. La gravitation n'est plus une force : c'est juste la déformation géométrique que le contenu matériel impose à l'Espace-Temps par le biais de ces équations.

(1) L'emploi du terme d'évènement, outre qu'il est conforme à la nature de ces points, évite d'avoir à répéter « points de l'Espace-Temps ».

(2) Dans un tel référentiel, la première des quatre coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 d'un évènement x , soit donc x^0 , s'interprétera comme ct , où, dans les unités de longueurs et de temps choisies, c est la vitesse de la lumière, et t la référence temporelle de l'évènement sur l'horloge de l'observateur.

(3) A la place de « trajectoires », on parlera plutôt de segments de « lignes d'univers » joignant les deux évènements.

Une fois adoptées les conventions de représentation mathématique des notions géométriques et physiques en jeu - tenseurs de courbure, tenseur métrique, tenseur énergie-impulsion, l'expression des équations d'Einstein prend une forme très compacte⁴ :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \text{ où } G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1)$$

Ces équations relient des champs tensoriels : elles formalisent les contraintes de proportionnalité qui s'imposent en chaque événement, entre la valeur du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$, résumant les structures géométriques présentes sur cet événement, et la valeur du tenseur énergie-impulsion, $T_{\mu\nu}$, résumant les propriétés de la matière et de l'énergie présentes en ce même événement. Les tenseurs impliqués dans la définition du tenseur d'Einstein, soit $R_{\mu\nu}$, tenseur de courbure dit « de Ricci » et R , coefficient appelé courbure scalaire, sont tous calculables à partir du champ tensoriel métrique, c'est-à-dire à partir des valeurs du tenseur $g_{\mu\nu}$, et de la manière dont ces valeurs varient d'un événement à l'autre (concrètement, dans un référentiel donné, composantes et dérivées partielles premières et secondes des composantes).

1.3 Des équations d'Einstein à celles des ondes gravitationnelles

La nature des ondes gravitationnelles est d'être des *perturbations* de la métrique de l'Espace-Temps. Le terme de perturbation implique a priori qu'elles soient de légères modifications d'une métrique de référence, qui est, telle que Einstein la prise, celle d'un Espace-Temps quasiment vide.

Dans cette perspective, techniquement, l'équation des ondes gravitationnelles résulte de l'application des équations d'Einstein au cas d'un Espace-Temps et d'une métrique associée s'écartant faiblement d'un Espace-Temps « plat » de Minkowski⁵. Ce faible écart implique l'existence de référentiels dans lesquels les fonctions $h_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$, gardent en chaque événement x des valeurs très petites⁶. Dans l'expression de ces fonctions, $\eta_{\mu\nu}$ est un tableau constant, indépendant de x , qui représente la métrique de Minkowski. Tous ses coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale, avec⁷ $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$.

(4) Abstraction faite de l'intervention de la constante cosmologique, qui n'intervient pas dans la théorie des ondes gravitationnelles.

(5) Le lecteur pourra consulter sur les développements de cette sous-section diverses références, dont les cours de Relativité Générale dispensés à l'Institut d'Astrophysique de Paris. Citons aussi plus directement l'ouvrage de Patrick Peter et Jean-Philippe Uzan, *Cosmologie Primordiale* [1], *Limite en champ faible*, pages 56-62 ; ou encore l'ouvrage de Peter Hajicek, *An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation* [8], *Weak gravitational field*, pages 133-152. On pourra également se reporter à la thèse de Nicolas Arnaud [1], 1.2.2. Approximation de champ faible, page 6. Rappelons que l'Espace-Temps de Minkowski est celui de la Relativité Restreinte.

(6) D'autres conditions de petitesse sont exigées ; elles concernent la faiblesse des dérivées premières et secondes de la métrique $g_{\mu\nu}$: les variations dans l'espace et dans le temps du tenseur métrique doivent être très « douces » ; cf. [8], page 134, définition du *Weak gravitational field*.

(7) Dans la littérature, on trouve aussi la « signature » opposée, avec $\eta_{00} = -1 \dots$

Le référentiel étant choisi, les fonctions $h_{\mu\nu}(x)$ peuvent être prises comme les composantes d'un tenseur symétrique $h_{\mu\nu}$. Un calcul conduit à une expression approchée du tenseur d'Einstein en fonction de $h_{\mu\nu}$, puis in fine aux *équations d'Einstein linéarisées*, dans lesquels interviennent $h_{\mu\nu}$ et le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Mais la *liberté de jauge*, équivalente à la liberté de choisir le référentiel, permet de sélectionner les référentiels dans lesquels les équations obtenues seront les plus simples⁸. On montre alors qu'il existe des choix de jauge pour lequel ces équations prennent une forme compacte rappelant celle des équations de départ⁹ :

$$\begin{aligned} (\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta)\bar{h}_{\mu\nu} &= -\left(\frac{16\pi G}{c^4}\right)T_{\mu\nu} \\ \text{où } \bar{h}_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33})\eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2)$$

Ce choix de référentiels particuliers implique par ailleurs la vérification, par le champ $h_{\mu\nu}$, d'une *condition de jauge*. Cette condition de jauge est une contrainte de divergence nulle qui s'écrit :

$$\partial_\nu\bar{h}^{\mu\nu} = 0 \text{ où } \bar{h}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\bar{h}_{\alpha\beta} \quad (3)$$

I.4 Il s'agit bien d'équations d'ondes

Par delà l'abstraction des notations tensorielles et des conventions d'Einstein, l'opérateur $\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ en œuvre dans la partie gauche des équations linéarisées (2) est un opérateur différentiel du second ordre courant, très présent en Physique : en remplaçant, dans les coordonnées d'un évènement de coordonnées $[x^0, x^1, x^2, x^3]$, x^0 par ct , x^1 par x , x^2 par y , x^3 par z cet opérateur se réécrit¹⁰ en effet sous la forme plus habituelle :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On reconnaît dans cette forme celle de l'opérateur intervenant dans l'équation d'une onde ayant sa source quelque part dans l'Espace-Temps, se propageant avec une vitesse de égale à c , la vitesse de la lumière.

Certains des phénomènes pouvant faire naître de telles ondes sont présentés dans une prochaine section. Mais, loin de la source, une manière simple et légitime de poursuivre

(8) Et partant, les plus faciles à interpréter en termes de lois physiques.

(9) On y retrouve la relation de proportionnalité entre, d'une part, des termes contrôlant la perturbation géométrique (termes de gauche, exprimant par le biais de dérivées secondes, la manière dont les composantes de la perturbation $\bar{h}_{\mu\nu}$ varient dans l'espace et le temps) et d'autre part, des termes de droite, $T_{\mu\nu}$, représentant le contenu matériel.

(10) Compte tenu de la nature diagonale de la matrice $\eta^{\alpha\beta}$.

l'étude est de considérer que l'Espace-Temps est vide et donc qu'en chaque point le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ est nul. $\bar{h}_{\mu\nu}$ étant vu comme une fonction des nouvelles coordonnées t, x, y, z , le système d'équations rendant compte de la propagation des ondes gravitationnelles loin de la source se réduit alors au système homogène :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (4)$$

auquel il faut ajouter les contraintes de la condition de jauge, que l'on peut récrire explicitement sur les composantes par :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{h}_{\mu 0} - \frac{\partial}{\partial x} \bar{h}_{\mu 1} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{h}_{\mu 2} - \frac{\partial}{\partial z} \bar{h}_{\mu 3} \right) \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (5)$$

et enfin les contraintes de symétrie $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\nu\mu}$

1.5 Quelques propriétés des ondes gravitationnelles

Les solutions satisfaisant à l'ensemble de ces contraintes sont des combinaisons linéaires d'ondes planes. Une onde plane isolée constitue un cas idéalisé dont la réalisation est physiquement impossible. Mais c'est néanmoins un modèle simple et utile. Pour une telle onde, dans un repérage Ot, Ox, Oy, Oz où le troisième axe spatial Oz est celui de la direction de propagation, les composantes $\bar{h}_{\mu\nu}$ de la perturbation (égales en l'occurrence à celle de $h_{\mu\nu}$) seront les éléments de la matrice 4×4 symétrique

$$e^{i\omega(ct-z)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

L'expression du tenseur est donc dans ce cas le produit d'un facteur périodique de pulsation ω et d'un tenseur constant, dans lequel interviennent deux amplitudes possiblement différentes h_+ et h_x . Cette expression cristallise plusieurs propriétés des ondes gravitationnelles :

1. Elles se propagent à la vitesse de la lumière.
2. Elles sont *transverses* : parmi les composantes de la métrique, seules celles qui sont orthogonales à la direction de propagation sont modifiées. Les composantes de la perturbation faisant intervenir le temps ($h_{0\nu} = h_{\nu 0}$) et la direction de propagation ($h_{3\nu} = h_{\nu 3}$) restent nulles.
3. Elles sont *sans trace* : la somme des composantes diagonales de la perturbation est nulle.

4. Elles sont *polarisées* ; les deux amplitudes h_+ et h_x correspondent à deux polarisations différentes de l'onde. Leurs valeurs sont indépendantes l'une de l'autre ; elles résultent de la configuration particulière du système émetteur et sont calculables à partir de cette configuration.

I.6 De leurs effets sur la matière

En tant que perturbation de la métrique de l'Espace-Temps, l'effet physique, mesurable, du passage de l'onde est de modifier la distance-lumière¹¹ entre deux corps, entre deux masses tests pour reprendre le vocabulaire utilisé dans le contexte des détecteurs. Si, dans le référentiel choisi, l'écart entre les lignes d'univers respectives des deux masses tests est représenté à chaque instant t (temps de l'expérimentateur) par le vecteur $[0, x^1, x^2, x^3]$ de l'Espace-Temps, les variations de ce vecteur, au cours du passage de la perturbation, seront régies par le système d'équations¹² :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}}{dt^2} x^j, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Les produits - de type produits scalaires - intervenant dans les termes de droite traduisent l'impact de l'orientation relative du vecteur séparant les deux masses par rapport à la direction de propagation. Un calcul permet de déduire que la variation maximale de la distance L entre les deux masses s'exprime par :

$$\delta L_{max} = \frac{1}{2} h L \quad (8)$$

où h est un terme d'amplitude. Dans le cas théorique du passage de l'onde plane, l'équation (7) s'intègre, et cette intégration donne les manières dont un cercle de masses tests se déforme, pour différentes valeurs de h_+ et de h_x . La figure 1 permet de comprendre alors la raison de l'écriture de ces valeurs en présentant deux cas extrêmes : le cas où l'amplitude h_+ est seule présente, et le cas où l'amplitude h_x est seule présente. Ces deux cas correspondent chacun à un mode de polarisation *linéaire* ; les mouvements des masses situées sur les axes Ox et Oy (pour le premier cas) et les axes diagonaux (pour le second cas) sont rectilignes. La figure d'ensemble des masses est une ellipse se contractant et s'étirant alternativement sur des axes fixes. D'autres cas extrêmes¹³ correspondent à des modes de polarisations *circulaires*. Les mouvements des masses y forment des petits cercles de même rayon, centrés sur les positions initiales avant le passage de l'onde. Ces mouvements présentent un décalage de phase lié à la position angulaire initiale dans le plan ; aussi bien, la figure d'ensemble reste une ellipse gardant la même forme mais tournant dans son plan avec une pulsation $\omega/2$.

(11) Produit de la vitesse de la lumière par le temps de parcours d'un photon entre les deux corps.

(12) En revenant aux conventions d'Einstein ; cf. à nouveau [11] page 62. La condition de jauge 3 laisse encore plusieurs degrés de liberté : ce système d'équations est valide sous un affinement complémentaire de la jauge, conduisant à la jauge « TT », jauge transverse sans trace. L'article transcrivant l'exposé de Luc Blanchet sera l'occasion de revenir sur ces questions.

(13) Comme avec $h_x = ih_+ = ih$ (h réel, polarisation circulaire droite) ou avec $h_x = -ih_+ = -ih$ (h réel, polarisation circulaire gauche) ; cf. cours de Luc Blanchet sur la Relativité Générale [2], page 66.

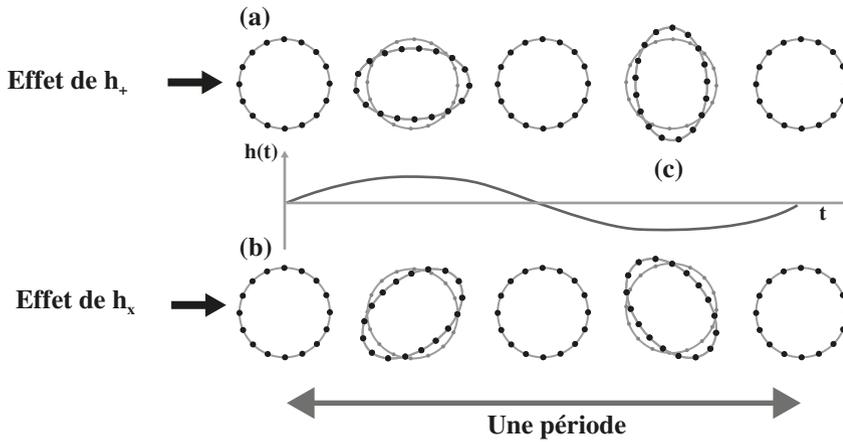


Figure 1. Effet du passage d'une onde sur un cercle de masses-tests.

2. De la diversité des sources astrophysiques et de leurs signaux

Le spectre en fréquence des ondes gravitationnelles est très large. La figure 2 fait ainsi part de la possible existence d'ondes de très basse fréquence, dont l'origine se situerait dans la phase d'inflation ; et à l'opposé, d'ondes de (relativement) haute fréquence, de l'ordre de la centaine ou du millier de Hz, ces dernières détectables par les instruments actuels.

La coupure entre les instruments existants et ceux en projet se situant aux alentours du Hz. Un tel spectre, évalué en durée de période, s'étend alors de l'âge de l'Univers à quelques millisecondes ; et parallèlement, en longueurs d'onde, de plusieurs milliards d'années-lumière à quelques centaines de kilomètres.

A la diversité des fréquences correspond une diversité de formes de signaux et de sources émettrices, et aussi une diversité de puissance émise, autrement dit de luminosité, et d'amplitude.

2.1 Diversité des types de signaux

On peut classer en première approche, les signaux gravitationnels en trois grandes catégories¹⁴.

1. Les signaux ponctuels : détectables sur une courte période de temps (de l'ordre du dixième de seconde), ils s'interprètent comme la trace d'événements

(14) Le lecteur pourra consulter par exemple, sur cette question de la diversité des signaux et des sources, l'article de Stephen Fairhurst et al. 2011, « Current status of gravitational waves observations » [6].

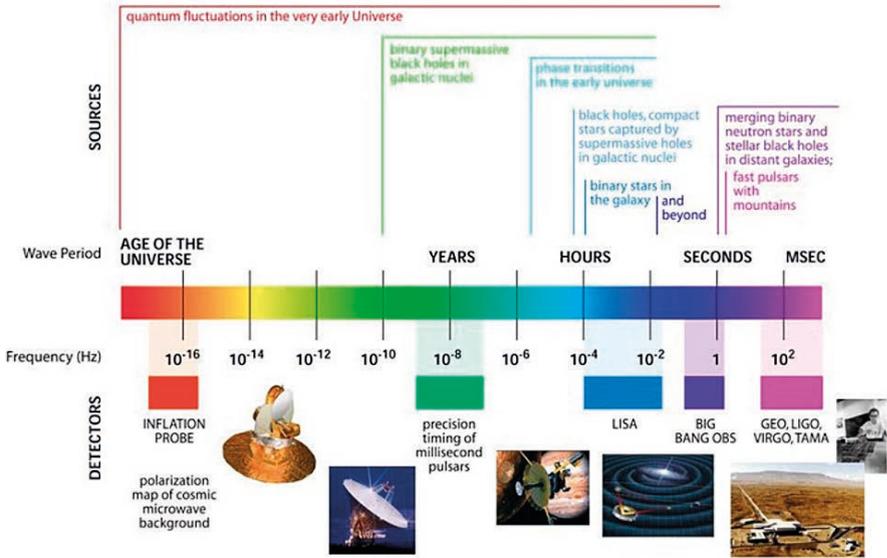


Figure 2. L'étendue du spectre des ondes gravitationnelles.

astrophysiques. Tels sont les signaux émis par des systèmes binaires compacts dans la phase de coalescence, où les partenaires se rapprochent en tournant de plus en plus vite pour finir par fusionner ; le modèle de ces signaux est le « chirp », signal quasi périodique, mais dont l'amplitude et la fréquence augmentent simultanément. Se placent également dans cette catégorie les signaux émis lors d'évènements de type effondrement gravitationnel (supernovae), dont la signature - sous forme de pics et de rebonds - diffère nettement de celle des chirps.

2. Les signaux continus. Tels sont les signaux périodiques émis par les systèmes binaires compacts loin de la coalescence, comme ceux du pulsar binaire PSR1913+16, cité en exemple de détection indirecte¹⁵. Les basses fréquences en jeu (moins de un dix-millième de Hz pour PSR1913+16) les rendent cependant difficilement détectables par les instruments actuels. Des pulsars isolés, des étoiles à neutrons, présentant une déformation entraînant une forte asymétrie, peuvent également être sources d'ondes gravitationnelles ; lorsqu'on compare les limites actuelles de sensibilité avec les amplitudes attribuables aux ondes émises par de tels pulsars, la détection de ces ondes ne semble pas hors de portée, comme le notent Fabien Cavalier et Patrice Hello dans l'article publié sur le site du CNRS [4].

3. Les signaux stochastiques de type « bruits de fond », tel l'hypothétique fond cosmologique d'ondes gravitationnelles¹⁶, non encore détecté mais dont la connaissance

(15) Ce pulsar a été découvert en 1974 par R.A. Hulse et J.H. Taylor [9]. La première publication montrant la décroissance de la période orbitale de ce système binaire, et son interprétation en terme d'émission d'ondes gravitationnelles date de 1982, par J.H Taylor et J.M Weisberg [12].

(16) Cf. par exemple la thèse de Nicolas Arnaud [1], 1.3.6. Fonds stochastiques, page 26.

du spectre de puissance en fonction de la fréquence apporterait de précieuses informations complémentaires à celles du fond cosmologique électromagnétique. Où encore un fond diffus résultant de la superposition d'innombrables sources non résolues, analogue, dans le domaine électromagnétique, au fond diffus infra-rouge¹⁷.

2.2 Amplitudes et Luminosités

La théorie de l'émission des ondes gravitationnelles¹⁸ permet d'évaluer l'amplitude de l'onde à une certaine distance du système émetteur (la source), et la puissance transportée ; ce en fonction des caractéristiques du dit système.

Dans leur principe, les calculs¹⁹ partent des équations 2 mobilisant le tenseur de perturbation $\bar{h}_{\mu\nu}$, cette fois sans négliger la partie droite $-(16\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$. Il s'agit en effet de prendre en compte le champ tensoriel énergie-impulsion du système émetteur. Les solutions des équations sont analogues aux solutions de potentiels retardés en électromagnétisme : la perturbation $\bar{h}_{\mu\nu}$ évaluée en $[t, x, y, z]$ est proportionnelle à une intégrale du tenseur énergie-impulsion prise sur la région de l'espace occupée par la source. En chaque point $[x', y', z']$ de cette région cependant, $T_{\mu\nu}$ est évalué non pas à l'instant mais avec un retard dû au temps nécessaire à l'onde pour se propager de $[x', y', z']$ en $[x, y, z]$.

Après affinement des choix de jauge, ces calculs sont à l'origine des formules du quadrupôle d'Einstein²⁰. Le moment quadrupolaire a la même nature qu'un moment d'inertie. C'est un tenseur $Q_{\mu\nu}$ exprimant la répartition relative, dans l'espace, selon les différentes directions spatiales, des masses constituant le système émetteur. Il encode notamment le caractère asymétrique de la source.

La valeur de l'amplitude de l'onde à une grande distance r de la source, au temps t , est inversement proportionnelle à cette distance, et proportionnelle à la dérivée seconde - par rapport au temps - du moment quadrupolaire de la source évalué au temps $t - r/c$.

L'onde gravitationnelle transporte de l'énergie puisqu'elle modifie la distance entre deux corps massifs. La définition et le calcul de la *luminosité*, ou puissance totale transportée, sont cependant plus difficiles. Au bout des calculs, la formule obtenue mobilise

(17) Le fond diffus infrarouge, ou plus précisément le *fond extragalactique infrarouge lointain*, résulte du rayonnement émis par l'ensemble des galaxies depuis leur création ; il se superpose au fond diffus cosmologique, tout en étant nettement moins intense ; cf. par exemple l'article de Guilaine Lagache et al. [10].

(18) Concernant les développements qui suivent, le lecteur pourra consulter le cours de Luc Blanchet [2] déjà cité, pages 67-69, ou encore celui de Eric Gourgoulhon [7], section 6.5, génération d'ondes gravitationnelles.

(19) Ces calculs supposent toujours vérifiées les conditions pour lesquelles les équations d'Einstein linéarisées restent valides (cf. à nouveau [2] et [7] : champ gravitationnel faible donc source relativement peu compacte et « faiblement autogravitante » ; ils supposent également que la dynamique du système est lente : pendant le temps mis par la lumière pour traverser la source, la distribution spatiale de sa masse ne bouge que très peu). Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites - par exemple lors de la phase finale de la coalescence de deux trous noirs - des calculs allant au delà de l'ordre linéaire sont nécessaires ; leur principe sera abordé dans l'article compagnon de Luc Blanchet.

(20) Ces formules ont en effet été présentées par Einstein dans une publication de 1918, « *Über Gravitationswellen* » [5].

la dérivée troisième du moment quadrupolaire. Dans le cas d'un système binaire deux versions de cette formule, versions équivalentes, mais toutes deux approchées, ont été présentées (cf. par exemple [7], sous-section 6.5.3) :

1. Une première formule donne la luminosité P en fonction de la taille du système émetteur R , de sa masse totale M , d'un facteur d'asymétrie a (variant entre 0 et 1) et enfin de la durée de sa période de révolution T . Cette formule montre que la puissance transportée est d'autant plus forte que l'asymétrie, la masse et la taille du système sont grandes et que la période est courte. Elle prend pour expression :

$$P = \frac{G}{c^5} a^2 \left(\frac{M^2 R^2}{T^2} \right)^2 \quad (9)$$

2. Une seconde formule donne la puissance en fonction de la compacité du système (son rayon de Schwarzschild R_s , rapporté à son rayon réel), de son asymétrie et des vitesses en jeu v rapportées à la vitesse de la lumière ; donc en fonction de facteurs sans dimension, avec une valeur maximale égale à 1. La puissance est d'autant plus grande que le système est plus asymétrique, compact et rapide. L'expression de cette seconde formule, dans laquelle on a inversé le facteur numérique $\frac{G}{c^5}$, est :

$$P = \frac{c^5}{G} a^2 \left(\frac{R_s}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6 \quad (10)$$

Le maximum de puissance lorsque tous les facteurs valent 1, est énorme, de l'ordre de $\frac{c^5}{G} = 3.6 \cdot 10^{52}$ watts ! Observons que de très faibles amplitudes ne sont pas incompatibles avec des puissances considérables : ainsi, à une distance de 10 Mpc, l'amplitude de l'onde (grandeur sans dimension) générée par la coalescence de deux trous noirs stellaires ne sera par exemple que de 10^{-20} , alors que la puissance totale transportée pourra être de 10^{50} watts !

2.3 Vers la détection d'ondes gravitationnelles

La diversité qui vient d'être évoquée a orienté les projets de détection vers les sources et types de signaux les plus immédiatement accessibles aux techniques disponibles.

Ainsi, les cibles des projets de détecteurs terrestres ont été d'emblée les émissions d'ondes gravitationnelles haute fréquence (bande passante entre 1 Hz et 10^4 Hz, en comptant large), se manifestant en tant que signaux localisés dans le temps, émissions associées aux fusions de systèmes binaires et aux effondrements gravitationnels des supernovae. En résumé, émissions liées à des événements rares, affectant des astres ou des couples d'astres compacts et fortement asymétriques.

La fréquence de ces événements est une composante importante d'une telle entreprise. Cette fréquence est estimée pour la fusion de systèmes binaires, inférieure à un événement dans un volume spatial de un mégaparsec cube (1 Mpc^3) tous les 100 000 ans ; et pour les supernovae, inférieure à un à deux cas par galaxie et par siècle. Pour détecter un nombre annuel significativement non nul de tels événements, il faut être capable de couvrir un volume d'univers suffisamment grand, et donc, compte tenu de la formule liant amplitude et distance, être capable de construire des détecteurs atteignant une sensibilité de l'ordre de $h \approx 10^{-21}$. A titre de comparaison, le nombre de pulsars dans notre galaxie est estimé à plus de 100 000, dont plusieurs centaines de pulsars « rapides », mais les signaux, on l'a vu, sont continus et leur amplitude sur Terre est inférieure à 10^{-24} .

Mais, malgré cette rareté d'événements détectables et les difficultés techniques de la recherche d'une telle sensibilité, la quête d'une détection directe des ondes gravitationnelles a été encouragée par la certitude de leur existence ! L'évolution, sur plusieurs années, du fameux pulsar binaire 1913+16, découvert rappelons-le en 1974, en constitue en effet une preuve indirecte, en même temps qu'une confirmation expérimentale (une de plus, en fait) de la Relativité Générale : la décroissance de la période orbitale du système, observée entre 1975 et 2005²¹, s'explique de manière convaincante en faisant l'hypothèse d'une perte d'énergie liée à l'émission d'ondes gravitationnelles. La corrélation entre les prédictions théoriques et les observations est vérifiée à une précision de l'ordre de 1 pour mille, remarquable pour des mesures astrophysiques.

La détection directe consiste à extraire, d'un bruit de fond généré par les instruments de mesure et leur environnement, instruments dont la technique est exposée dans la section suivante, un signal d'une forme (plus ou moins) connue, lié au passage d'un train d'ondes. De ce point de vue les deux types de sources et signaux cibles se trouvent dans des situations différentes.

1. Pour la fusion des systèmes binaires, les signaux (les « chirps ») sont à l'heure actuelle bien modélisés. Certes, ce sont des modèles approchés, car on ne sait pas résoudre de manière exacte les équations d'Einstein, même dans le cas d'un système à deux corps. Mais ces modèles sont suffisamment conformes et robustes pour que l'on puisse les utiliser comme des « calques » des signaux attendus ; savoir détecter des corrélations entre le signal observé et de tels calques, et reconnaître ainsi dans le bruit de fond la présence des trains d'ondes recherchés.

2. Pour les événements de type effondrements gravitationnels de supernovae, les solutions sont moins avancées. La physique de ces effondrements est très riche (intervention de phénomènes de convection, de turbulence . . .), si bien qu'ils sont très difficiles à modéliser et à simuler. On dispose seulement depuis peu de modèles relativistes en trois dimensions de la dynamique de ces phénomènes. Les simulations qu'ils permettent donnent des ordres de grandeurs de durée typiques, d'amplitudes typiques, de bande passante. Mais on ne dispose pas de matrices de signaux aussi « standards » que dans le cas précédent : la forme des signaux émis reste encore largement inconnue.

(21) La première publication, déjà citée, concernant l'interprétation relativiste de cette décroissance, celle de Taylor et Weisberg [12] date de 1982 ; depuis, d'autres publications ont continué à l'analyser, cf. par exemple Weisberg et Taylor 2005 [13].

3. Des détecteurs actuels (2016) et de la course à la sensibilité

La difficulté de détection de signaux gravitationnels réside dans leur amplitude extrêmement faible. L'ordre de grandeur des amplitudes des signaux que l'on espère pouvoir capturer, savoir $h \approx 10^{-21}$, a un sens très concret : c'est la variation relative de la distance lumière entre deux objets, deux miroirs par exemple dans un interféromètre, induite par le passage de l'onde. Autrement dit, sur une distance de 100 km, il faut pouvoir mesurer une différence de 10^{-7} nanomètre ! Seuls des interféromètres sont capables d'atteindre de telles performances.

Pour que le signal puisse être extrait du bruit de fond avec un degré de confiance suffisant, il faut que ce bruit de fond ait une amplitude inférieure. Et ce, sur la totalité de la bande de fréquence des ondes gravitationnelles cibles des instruments, savoir ici de la dizaine de Hz jusqu'au delà de 1000 Hz. C'est le challenge auquel les détecteurs actuels, notamment VIRGO et LIGO, se sont attaqués.

3.1 Le principe : un interféromètre de Michelson

La figure 3 rappelle le schéma des interféromètres de Michelson utilisés dans les détecteurs. Une source laser (longueur d'onde λ) injecte dans le dispositif une puissance P_{in} . A la sortie du dispositif une photodiode reçoit une puissance P_{det} . Une séparatrice M_{bs} réfléchit une partie de l'énergie lumineuse vers le miroir M_2 et transmet par transparence l'autre partie vers le miroir M_1 . En retour, une partie de l'énergie réfléchie par M_2 parvient à la photodiode par transmission directe à travers la séparatrice, et une partie de l'énergie réfléchie par M_1 parvient de même à la photodiode par réflexion sur la séparatrice. L'énergie lumineuse parvenant à la photodiode résulte ainsi de la superposition de deux trains d'ondes lumineuses ayant suivis deux chemins optiques différents, soit :

$$\begin{aligned} \text{laser} &\rightarrow M_{bs} \rightarrow M_2 \rightarrow \text{photodiode} \\ \text{laser} &\rightarrow M_1 \rightarrow M_{bs} \rightarrow \text{photodiode} \end{aligned}$$

correspondant à une différence de marche valant :

$$\Delta L = 2 [M_{bs} \rightarrow M_1] - 2 [M_{bs} \rightarrow M_2] \quad (11)$$

Il en résulte à la sortie du dispositif un déphasage $\Delta \phi_{opt} = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda}$.

En supposant la séparatrice parfaitement équilibrée (1/2, 1/2) entre réflexion et transmission directe, et les deux miroirs parfaitement réfléchissants, la puissance détectée par la photodiode est $P_{det} = \frac{P_{in}}{2} (1 + \cos(\Delta \phi_{opt}))$ égale à P_{in} lorsque les deux ondes arrivent en phase et nulle lorsqu'elles sont en opposition de phase.

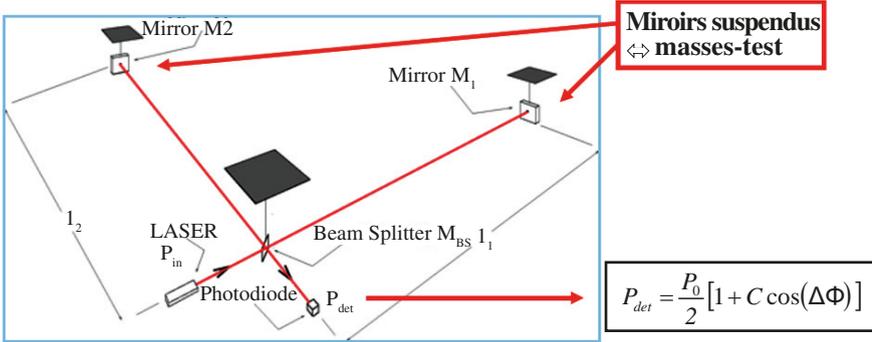


Figure 3. Schéma de l'interféromètre de Michelson ; le coefficient C intervenant dans la valeur de la puissance détectée est fonction du degré de perfection des miroirs et de la séparatrice.

Lors du passage d'une onde gravitationnelle, la différence entre les deux chemins optiques va être modifiée d'une quantité proportionnelle à l'amplitude $h(t)$ de l'onde reçue à chaque instant, proportionnelle également aux dimensions de l'instrument de mesure L (combinaison des longueurs des deux bras L_1 et L_2). La fonction $h(t)$ dépend quant à elle de l'état de polarisation de l'onde et de son orientation par rapport au plan de l'instrument. Un (petit) déphasage supplémentaire $\delta\phi_{gw}(t)$, est de ce fait introduit, relié aux grandeurs précédentes par la formule :

$$\delta\phi_{gw}(t) = \frac{4\pi}{\lambda} Lh(t) \quad (12)$$

La puissance détectée en sortie devient, dans les mêmes conditions de qualité de la séparatrice et des miroirs :

$$P_{det} = \frac{P_{in}}{2} (1 + \cos(\Delta\phi_{opt} + \delta\phi_{gw}(t))) \quad (13)$$

3.2 La chasse au bruit : l'exemple de VIRGO

Le déphasage total est constamment soumis à des bruits de diverses origines ; ces divers bruits se combinent pour former un bruit global qu'il faut contrôler : le signal utile est le déphasage gravitationnel $\delta\phi_{gw}(t)$. Il s'agit au bout du compte d'avoir un rapport signal utile sur bruit le plus grand possible.

3.2.1 Des notions utiles : densité spectrale d'un bruit et sensibilité

La « puissance » d'un bruit particulier est mesurée²² par la variance σ_x^2 , au cours du temps, de la valeur $X(t)$ du signal qui le définit. Mais ce bruit n'est pas nécessairement « blanc » : chaque fréquence, à l'intérieur d'une certaine bande passante, apporte sa propre contribution. Aussi bien la puissance du bruit est elle l'intégrale sur cette bande passante d'une grandeur, que nous noterons ici $\tilde{h}_x^2(f)$, appelée « densité spectrale de puissance » ayant la dimension de la variance σ_x^2 par Hz. L'instrument de mesure, du point de vue du bruit X considéré, est alors caractérisé par cette fonction $\tilde{h}_x^2(f)$, ou encore par sa racine carré $\tilde{h}_x(f)$, également appelée densité spectrale ou sensibilité et qui a cette fois ci la dimension d'un écart-type par $\sqrt{\text{Hz}}$. Dans le cas présent, il est naturel d'exprimer le bruit dans ses conséquences sur l'estimation de l'amplitude des ondes gravitationnelles que l'on cherche à détecter. La densité spectrale ou sensibilité est alors exprimée en $1/\sqrt{\text{Hz}}$.

3.2.2 Le VIRGO design

L'amplitude des ondes gravitationnelles cibles des détecteurs terrestres tels que VIRGO est - on l'a vu - de l'ordre de 10^{-21} . Les fréquences de ces ondes cibles, quant à elles, se situent dans une bande allant de quelques Hz à quelques kHz. Pour que le rapport signal sur bruit soit acceptable, il faut viser une densité spectrale de bruit total, sur cette même bande de fréquence, autour de $\tilde{h}_{tot} \approx 10^{-23}$. Nous verrons comment cette sensibilité globale a été approchée, au cours de temps, depuis le démarrage du projet.

Examinons quelques uns des principaux bruits auxquels les détecteurs interférométriques doivent faire face, ainsi que les solutions apportées par VIRGO. Savoir, parmi d'autres, le bruit de comptage des photons, le bruit sismique et le bruit thermique. C'est le bruit sismique et les difficultés à le contrôler qui ont imposé à VIRGO sa limite basse dans la bande de fréquence. Les bruits thermiques sont prépondérants dans la plage intermédiaire 10 Hz – 500 Hz, le bruit de photon dominant au delà²³.

3.2.3 Le bruit de comptage des photons

Ce bruit incontournable affecte directement la précision de la mesure du déphasage. Son ordre de grandeur (en densité spectrale) est donné (cf. [1], 2.1.2 Détecteur interférométrique et sensibilité, page 37, équation 2.31) par :

$$\tilde{h}_{shot}(f) = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{P_{in}}} \quad (14)$$

(22) Sous certaines conditions toutefois : le bruit doit être *stationnaire* - ses propriétés ne dépendent pas du temps - et *ergodique* - les dites propriétés peuvent être estimées par de simples prises de moyenne sur un certain laps de temps.

(23) A titre de complément pour cette dernière partie, cf. par exemple la thèse de Nicolas Arnaud [1], publiée numériquement par le Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire de l'IN2P3, partie « Description de Virgo, bruits du détecteur », ou encore le mémoire d'habilitation à diriger des recherches de Damir Buskulic [3], partie « Bruit de photon et conséquence sur la configuration optique » et « Amélioration de la sensibilité ».

où λ et ω sont respectivement la longueur d'onde et la pulsation de la source laser. L'intensité de ce bruit est donc d'autant plus petite que la longueur d'onde du laser est courte (grande fréquence d'arrivée des photons) ; cette longueur d'onde étant fixée, l'intensité est également d'autant plus petite que seront grandes 1) les longueurs L des bras de l'interféromètre et 2) la puissance délivrée par le laser source de cette lumière. De là, l'emploi de techniques optiques pour « replier les trajets lumineux » au sein de bras ayant une longueur apparente de 3 km seulement et atteindre des longueurs effectives de l'ordre de la centaine de km. De là également d'autres techniques visant à augmenter par « recyclage » de la lumière, la puissance lumineuse P_m incidente au niveau de la séparatrice, à partir d'une même source laser. Cette dernière puissance pourra ainsi être de 1000 watts ou plus, à partir d'une source d'une vingtaine de watts seulement.

La figure 4 montre la mise en œuvre des techniques de repliement et de recyclage au sein du « design optique » de VIRGO, qui apporte certaines modifications notables à la figure de l'interféromètre de Michelson « classique » de la figure 3. Ces techniques sont toutes deux basées sur le fonctionnement des cavités Fabry-Perot. Une telle cavité, rappelons-le, est formée dans son principe de deux miroirs parallèles semi-réfléchissants, un miroir d'entrée et un miroir d'extrémité, caractérisés chacun par des taux de réflexion et des taux de transmission spécifiques. En utilisant une image très simplifiée, disons que les photons traversant le miroir d'entrée se trouvent momentanément « piégés » dans la cavité en effectuant un certain nombre d'aller-retours avant de sortir de la cavité, soit en revenant vers la source ou bien en franchissant le miroir d'extrémité. La cavité fonctionne ainsi comme un outil de stockage de la lumière, et le gain associé à la cavité est défini comme le rapport entre la puissance stockée dans la cavité et la puissance incidente.

Ce gain dépend des taux de transmission et de réflexion respectifs des deux miroirs, de la distance qui les sépare et de la longueur d'onde de la lumière. Il est maximal lorsque les allers et retours des ondes lumineuses entre les deux miroirs sont en résonance, c.-à-d. quand le rapport entre la distance et la longueur d'onde vaut $\frac{\pi}{2} + k\pi$

L'augmentation de la longueur des bras est obtenue en plaçant à l'entrée de chacun d'eux, en aval de la séparatrice, un miroir de réflectivité plus faible que le miroir de fond associé, lequel a un taux de transmission nul. Ce miroir d'entrée forme avec le miroir de fond une cavité de Fabry-Perot, entraînant ainsi les photons à effectuer à l'intérieur de la cavité un nombre d'aller-retours fonction d'un paramètre de finesse, et multipliant ainsi virtuellement d'autant la longueur physique du bras.

L'amplification de puissance est obtenue en plaçant en amont de la séparatrice un miroir fortement réfléchissant, qui recycle en grande partie la lumière en retour de la séparatrice vers cette dernière et qui transforme donc en cavité Fabry-Perot l'ensemble du détecteur. La puissance évaluée au niveau de la séparatrice est alors de l'ordre du kWatt, comme l'indique la figure 4.

3.2.4 Le bruit sismique ; s'isoler du sol

Le sol vibre en permanence, et ces vibrations constituent le bruit sismique. La densité spectrale, évaluée à partir de l'écart-type des oscillations mesurées en mètres, est, (site VIRGO de

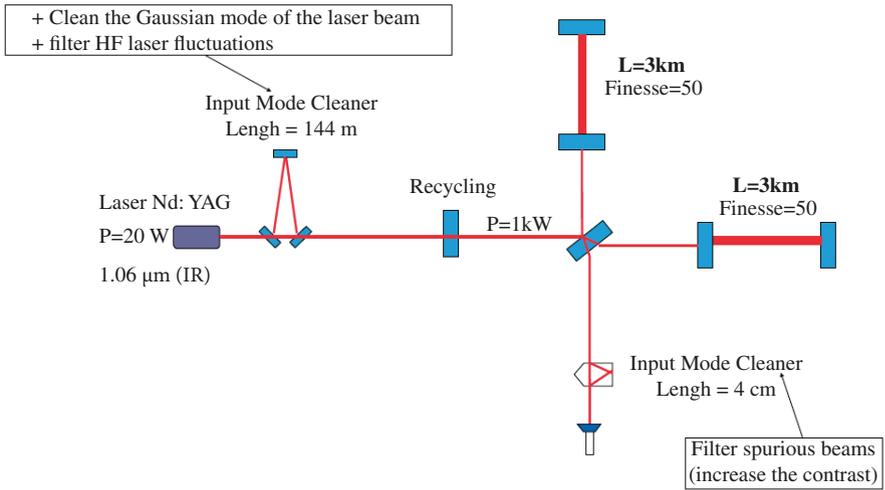


Figure 4. Design optique de VIRGO ; modification du schéma de principe de l'interféromètre de Michelson : mise en œuvre de techniques de repliement et de recyclage.

Cascina), donnée par $\tilde{x}(f) \approx \frac{10^{-6}}{f^2} m / \sqrt{\text{Hz}}$. Convertie en amplitude d'onde gravitationnelle sans dimension, cela donne une sensibilité $\tilde{h}_{\text{sim}}(f)$ de l'ordre de $\frac{10^{-9}}{f^2} / \sqrt{\text{Hz}}$ (cf. [1], 2.2.1.

Bruits du détecteur, page 42, équation 2.41). Cette sensibilité est donc supérieure de plusieurs ordres de grandeurs à la sensibilité espérée (10^{-23} , rappelons-le), même pour des fréquences d'ondes gravitationnelles de 1000 Hz, et à fortiori pour des fréquences plus faibles. Il faut donc absolument s'en affranchir. Donc atténuer fortement les bruits sismiques sur la bande de fréquence cible de VIRGO, en acceptant de renoncer à toute recherche de détection en deçà de 4 ou 5 Hz. L'idée est de suspendre les miroirs à des super-atténuateurs - en fait une chaîne de plusieurs atténuateurs - capables d'agir à la fois sur les mouvements verticaux et les mouvements horizontaux du bruit sismique. Ces atténuateurs fonctionnent comme des filtres passe-bas, il faudrait d'ailleurs mieux dire ici filtres coupe-haut, puisqu'ils ont pour objectif de rendre complètement négligeable l'impact du bruit au delà d'une fréquence de 10 Hz. D'une façon simplifiée, ce sont des ressorts, ou des pendules pour les mouvements de rotation : soumis à des oscillations de fréquences bien supérieures à leur fréquence propre f_0 , ils n'ont pas le temps de transmettre ces oscillations aux objets dont ils ont la charge, et de ce fait les amortissent.

La figure 5 montre un schéma et une photographie partielle d'un de ces super-atténuateurs, dont la masse est de plus d'une tonne. Formellement ils se décrivent comme des oscillateurs dont la fréquence de résonance f_0 recherchée est la plus basse possible, de façon à ce que la fonction de transfert (rapport signal de sortie du filtre sur signal d'entrée) soit quasiment nulle au delà de la borne inférieure de fréquence souhaitée. Les performances atteintes correspondent à des fonctions de transfert de l'ordre de f^{-12} voire f^{-14} (mouvements horizontaux) à partir de $f = 1$ Hz. Cependant, c'est bien les difficultés à contrôler le bruit sismique qui ont imposé à VIRGO sa limite basse dans la bande de fréquence.

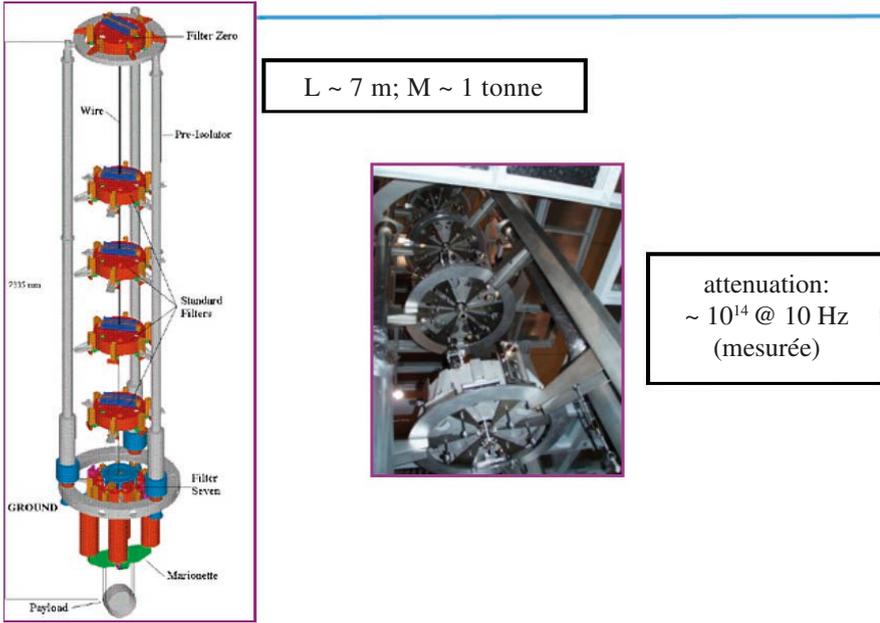


Figure 5. S'isoler du sol : le super atténuateur de VIRGO.

3.2.5 Le bruit thermique

Le bruit thermique correspond aux mouvements browniens affectant les degrés de liberté des composants mécaniques du détecteur, mouvements aléatoires dont l'ampleur dépend de la température.

Ces composants mécaniques peuvent être modélisés par des oscillateurs harmoniques soumis à des frottements ou des forces de viscosité, en équilibre thermique avec leur environnement. On montre dans ces conditions (théorème de fluctuation-dissipation) que la densité spectrale du bruit est donnée (cf. [1], 2.2.1. Bruits du détecteur, page 46, équation 2.44) par :

$$\tilde{x}_{ther}(f) = \left[\frac{k_B T f_0}{2\pi^3 m Q} \frac{1}{f (f^2 - f_0^2)^2 + f_0^4 / Q^2} \right]^{1/2} \quad (15)$$

formule dans laquelle T est la température, f_0 la fréquence propre de l'oscillateur, m sa masse, et Q un « facteur de qualité ».

Deux types de bruits thermiques interviennent : ceux liés aux vibrations des substrats des miroirs, et ceux liés aux vibrations des suspensions. Ils sont à l'origine de pics de bruits autour de fréquences égales aux fréquences de résonances de ces différentes vibrations. La hauteur et l'étroitesse de ces pics de bruits sont fonction du facteur de qualité : pour une fréquence de

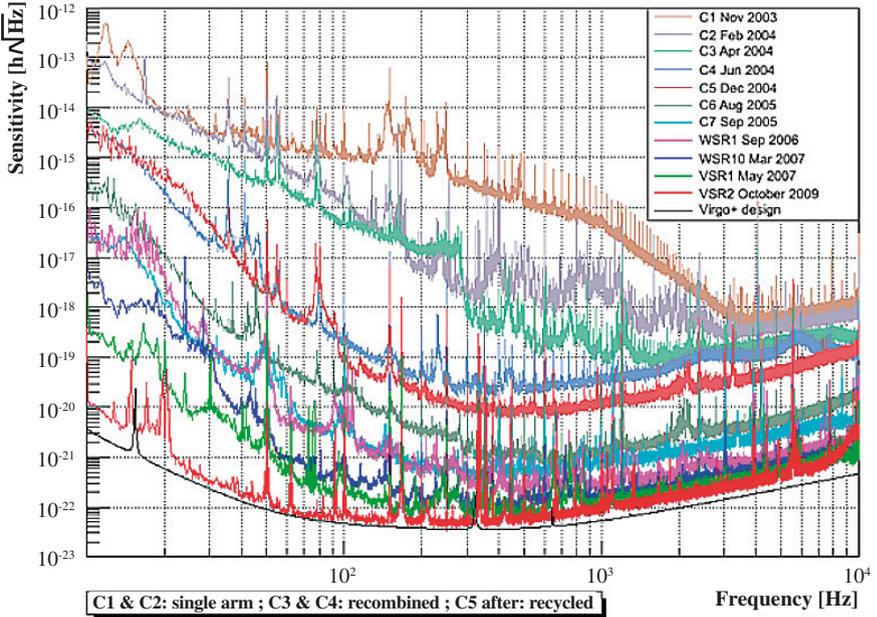


Figure 6. Courbes de sensibilité effective aux différentes étapes ; progression vers la courbe de sensibilité objectif.

résonance donnée, le pic est d'autant plus haut et plus étroit que le facteur de qualité est plus élevé. Ces pics viennent donc interrompre à certaines fréquences précises une décroissance de fond de la densité spectrale en $f^{-5/2}$.

Dans la bande de fréquences cible de VIRGO, un premier pic apparaît ainsi autour de 7 Hz ; une série de pics, eux aussi liés aux suspensions, s'échelonnent à partir de quelques 300 Hz. Enfin deux pics liés aux substrats des miroirs se font jour entre 5500 et 6000 Hz.

3.2.6 La course à la sensibilité minimale

Le souci constant d'abaisser la sensibilité a été au centre de VIRGO, comme il l'a été également pour les autres projets tels que LIGO. La figure 6 montre ainsi quels ont été les progrès effectués pour abaisser la courbe $\tilde{h}_{tot}(f)$ du bruit total, pour la rapprocher de la courbe objectif initial du projet (Virgo design). Entre les années 2003 et 2009, pour $f = 70$ Hz par exemple, la densité spectrale du bruit total s'abaisse de 10^{-15} à 10^{-22} , atteignant quasiment la courbe objectif. La même figure montre par ailleurs l'évolution de la sensibilité minimale, qui se situe sur la courbe objectif vers 300 Hz, juste avant le pic thermique dont il a été question précédemment. Comme on peut le voir, cette sensibilité minimale est encore limitée, puisqu'au dessus de 10^{-23} ; il est prévu de gagner un ordre de grandeur. C'est de fait cette sensibilité de 10^{-23} qui est d'ores et déjà atteinte chez LIGO, sur une plage s'étalant entre 100 et 500 Hz environ, qui a rendu possible la détection du 14 septembre 2015.

Références

- [1] N. Arnaud. *Contrôle Global de la partie centrale du détecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO. Recherche de signaux impulsions : application aux coïncidences entre interféromètres*. PhD thesis, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay, mars 2002.
- [2] L. Blanchet. Introduction à la relativité générale. Cours, Universités Paris VII et Paris XI, 1996-1997.
- [3] D. Buskulic. *Préparation à l'analyse de données dans VIRGO : aspects de techniques informatiques et de techniques d'analyse pour la recherche de coalescence de binaires*. Mémoire d'habilitation, Université de Savoie. Laboratoire d'Annecy le Vieux de Physique des Particules, mars 2006.
- [4] F. Cavalier and P. Hello. Virgo et la quête des ondes gravitationnelles.
- [5] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167., 1918.
- [6] S. Fairhurst, G. M. Guidi, P. Hello, J. T. Whelan et G. Woan. Current status of gravitational wave observations. *General Relativity and Gravitation*, **43** :387–407, Feb. 2011.
- [7] E. Gourgoulhon. Relativité générale. Cours, Observatoire de Paris, Universités Paris VI, Paris VII et Paris XI, 2010-2011.
- [8] P. Hajicék. *An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation*. Lecture Notes in Physics 750. Springer, 2008.
- [9] R. A. Hulse and H. J. Taylor. Discovery of a Pulsar in a Close Binary System. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 6 of *Bulletin of The American Astronomical Society*, page 453, Sept. 1974.
- [10] G. Lagache, J.-L. Puget et H. Dole. Dusty Infrared Galaxies : Sources of the Cosmic Infrared Background. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **43** :727–768, Sept. 2005.
- [11] P. Peter et J.-P. Uzan. *Cosmologie primordiale*. Echelles. Belin, Paris, 2005.
- [12] J. H. Taylor et J. M. Weisberg. A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16. *Astrophysical Journal*, **253** :908–920, Feb. 1982.
- [13] J. M. Weisberg et J. H. Taylor. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis. In F. A. Rasio and I. H. Stairs, editors, *Binary Radio Pulsars*, volume **328** of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 25, July 2005.

2

Génération d'ondes gravitationnelles par les systèmes binaires compacts

Jean-Pierre Treuil

A.E.I.S

Résumé

Le présent chapitre concerne à nouveau les ondes gravitationnelles. Il est, comme le précédent, consacré à l'état de l'art, tel qu'existant lors de la première détection directe ; il est cependant plus spécifiquement focalisé sur les systèmes binaires compacts. Ainsi, après un rappel des enseignements consécutifs à la découverte du pulsar binaire PSR 1913+16, il dresse un tableau des types de systèmes binaires dont les émissions sont susceptibles d'être détectées par les détecteurs actuels ou en projet ; il aborde, pour ces différents types, les méthodes d'estimation du nombre de systèmes concernés et des taux d'occurrence de leur coalescence, ainsi que certains résultats obtenus par ces méthodes. La dernière partie présente dans ses principes, la théorie de l'émission gravitationnelle d'une source isolée : méthodes de traitement des non-linéarités des équations d'Einstein à même de permettre le calcul, aux degrés d'approximation requis, de la forme des signaux et de la dynamique de la source ; applications aux systèmes binaires compacts avec références aux progrès accomplis ces dernières années dans le degré de précision atteint.

Abstract

Generation of gravitational waves by compact binary systems

Again, the present chapter concerns the gravitational waves. Like the previous chapter, it is devoted to the state of art at the time of the first direct detection; it is still more specifically focused on compact binary systems. So, after recalling the teachings issued from the discovery of the binary pulsar PSR 1913+16, he draws a table of the types of binary systems whose emissions could be detected by present, or in planning stage, detectors; for these different types, he addresses the methods of estimation of the number of concerned systems and the occurrence rate of their coalescence, as well as some thus obtainable results. The last part shows, within its principles, the theory of the gravitational emission of an isolated source: methods to process the nonlinearities of Einstein equations enabling - within the required level of approximation - to compute the shape of the signals and the source dynamics; applications to binary compact systems with references to progresses accomplished in the past few years within the achieved level of precision.

Note

Ce chapitre a été rédigé à partir de la conférence de Luc Blanchet et relu par le conférencier. Le détail de cette transcription n'engage cependant que la responsabilité du rédacteur.

I. Introduction

La détection directe du rayonnement gravitationnel en provenance de sources cosmiques par les réseaux de détecteurs interférométriques au sol (LIGO, VIRGO, . . .) et plus tard dans l'espace (eLISA), ouvre une nouvelle fenêtre d'observations de l'Univers, venant s'adjoindre, par le biais d'un phénomène physique tout à fait différent, à celle déjà ouverte par les ondes électromagnétiques ; d'où l'émergence d'une nouvelle Astronomie avec un très fort potentiel de surprises et de découvertes.

De nouveaux moyens pour tester les théories. Pour donner des exemples de ces potentialités, considérons les projets orientés vers les ondes gravitationnelles de basses fréquences, comme eLISA. Les chercheurs concernés se sont attachés à cerner les enseignements que l'on peut en attendre en cosmologie [30] sur des questions touchant la relativité générale et la gravitation, la nature et la structure des trous noirs, pour confirmer les théories existantes, en ajuster les paramètres, ou tester les théories alternatives.

La puissance de détection d'eLISA permet ainsi d'envisager de tester - en plaçant des contraintes indépendantes d'autres méthodes - les valeurs des paramètres du modèle standard de la cosmologie : valeur des densités (rapportées à la densité critique) Ω_M et Ω_Λ relatives respectivement à la matière (baryonique et noire) et à l'énergie sombre, valeur du paramètre w de l'équation d'état de l'énergie sombre. Le principe d'un tel test réside

dans la possibilité d'évaluer la distance D (la distance luminosité en l'occurrence) de la source, à partir des seules informations fournies par l'onde gravitationnelle détectée ; supposons en effet que cette évaluation de la distance soit associée à une mesure du redshift z , mesure faite à partir du rayonnement électromagnétique de la source (information « multi-messagère ») : la fonction $D(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda, w)$ reliant, dans le modèle standard, la distance au redshift et aux paramètres cosmologiques pose les contraintes exploitables dans le test. Un autre exemple concerne la théorie des trous noirs. Parmi les sources dont les émissions seront détectables par eLISA figurent les « EMRI », pour *Extreme Mass Ratio Inspirals*¹ ; il s'agit de systèmes binaires formés de deux corps de masses très différentes : une étoile à neutron ou un trou noir stellaire en orbite relativiste autour d'un trou noir supermassif. Les caractéristiques des ondes gravitationnelles détectées permettront de voir si le trou noir supermassif peut être décrit par la seule donnée de sa masse et de son moment cinétique, comme le prévoient les conceptions actuelles, ou bien au contraire s'il comporte un moment quadrupolaire anormal. Et donc, encore une fois fournir un test de la relativité générale.

Plan du chapitre. Le chapitre précédent a dressé une typologie des signaux gravitationnels, en distinguant signaux ponctuels, signaux continus et signaux stochastiques. Le présent chapitre est spécifiquement consacré aux signaux ponctuels générés lors de la phase spiralante puis de la fusion de systèmes binaires d'objets compacts, soit des étoiles à neutrons soit des trous noirs. Une première section rappelle brièvement les enseignements consécutifs à la découverte du pulsar binaire PSR 1913+16. Une seconde section dresse un tableau des types de systèmes binaires dont les émissions sont susceptibles d'être détectées par les détecteurs actuels ou en projet ; elle aborde, pour ces différents types, les méthodes d'estimation du nombre de systèmes concernés et des taux d'occurrence de leur coalescence, ainsi que certains résultats obtenus par ces méthodes. Une dernière section présente dans ses principes, la théorie de l'émission gravitationnelle d'une source isolée : méthodes de traitement des non-linéarités des équations d'Einstein à même de permettre le calcul, aux degrés d'approximation requis, de la forme des signaux et de la dynamique de la source ; applications aux systèmes binaires compacts avec références aux progrès accomplis ces dernières années dans le degré de précision atteint.

2. Aux origines : le pulsar binaire PSR 1913+16

Le rayonnement gravitationnel a été mis en évidence pour la première fois, de façon indirecte, par Russell Hulse et Joseph Taylor (prix Nobel 1993), en observant un système binaire constitué d'un pulsar et d'un compagnon (une autre étoile à neutron), le pulsar binaire PSR 1913+16, et la décroissance de sa période orbitale. La perte d'énergie du système était interprétée, par le biais des équations de la Relativité générale, comme conséquence de l'émission d'un flux d'ondes gravitationnelles reçues à l'infini².

(1) Cf. [30] déjà cité, page 52 et suivantes, *Tests of black-hole structure using EMRIs*.

(2) En fait on avait déjà des indications qualitatives de l'existence des ondes gravitationnelles grâce à l'observation en X et UV de certains systèmes d'étoiles binaires constitués d'une étoile normale en fin de vie, en orbite autour d'une naine blanche.

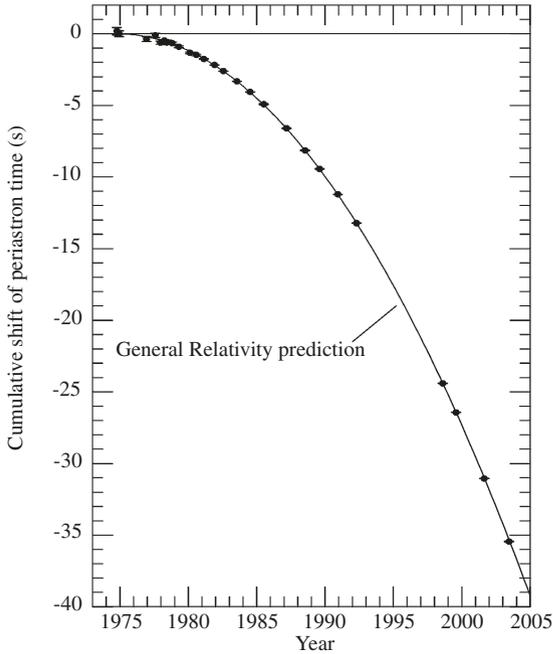


Figure 1. Rythme de décroissance de la période orbitale (mesuré par la dérive du temps de passage au périastre) et ajustement à la prédiction de la relativité générale. Reproduit de Weisberg et Taylor 2005 [46].

2.1 Un historique rapide

Les premières évaluations des paramètres orbitaux képlériens du système binaire PSR 1913+16 ont été présentées lors de la publication de sa découverte, en 1974 [31]. Les variations observées de l'intervalle entre deux impulsions radio ont été interprétées comme résultant, par effet Doppler, de variations de la vitesse radiale de l'objet émetteur, orbitant avec un compagnon autour de leur centre de masse commun. Ont ainsi été estimées la période orbitale P (27 908 secondes soit 7 h 45 m), l'excentricité de l'orbite ($e \approx 0.615$) et la valeur projetée du demi-grand axe ($a \sin i \approx 1R_{\odot}$) [32].

Ces estimations ont été rapidement améliorées et complétées dès 1976 [43] en ajustant les paramètres orbitaux à la succession des instants d'arrivée des impulsions, au sein d'un modèle élaboré par R. Blandford et S.A. Teukolsky [16]. En 1982, disposant de plus de six années d'observations, J.H. Taylor et J.M. Weisberg [44] ont pu réévaluer à nouveau les caractéristiques orbitales képlériennes et inclure l'estimation de paramètres liés à des effets relativistes. Citons la précession du périastre $\dot{\omega}$ (en degrés par an), la part variable γ d'une certaine combinaison du décalage gravitationnel et de l'effet Doppler du second ordre (décalage sur les instants d'arrivée des impulsions, en secondes) et enfin le rythme de décroissance de la période orbitale $\dot{P} = dP/dt$.

Enfin, en 2005, les mêmes auteurs dressaient le bilan de trente années d'observations du même pulsar binaire [46]. Le modèle d'analyse des temps d'arrivée ayant conduit aux dernières évaluations était cette fois ci celui de Damour et Deruelle [19, 20]. L'écart relatif entre le rythme la décroissance de la période orbitale observée entre 1975 et 2005, et le rythme prédit par la relativité générale (cf. figure 1) est de l'ordre de 0.13 %.

2.2 Des observations à la confirmation de l'émission d'ondes gravitationnelles

La méthode suivie a consisté à faire confiance aux équations de la relativité générale, sur les phénomènes où elles avaient déjà montré leur efficacité, pour expliquer la valeur ou la dynamique de grandeurs liées aux effets relativistes. En premier lieu, les mesures des paramètres relativistes de précession $\dot{\alpha}$ et de décalage fréquentiel γ , jointes à celles des paramètres képlériens d'excentricité et de période orbitale, permettent de calculer les masses respectives du pulsar (m_p) et de son compagnon invisible (m_c). Les équations liant les deux paramètres relativistes à la période orbitale P , l'excentricité e et les masses m_p et m_c du pulsar et de son compagnon sont en effet [44] :

$$\dot{\omega} = 3G^{2/3}c^{-2}(P/2\pi)^{-5/3}(1-e)^{-1}(m_p + m_c)^{2/3} \quad (1)$$

$$\gamma = G^{2/3}c^{-2}e(P/2\pi)^{1/3}m_c(m_p + 2m_c)(m_p + m_c)^{-4/3} \quad (2)$$

Après prise en compte des valeurs adoptées pour les paramètres képlériens, $P = 27906.98161$ secondes et $e = 0.617139$ les calculs aboutissent aux deux contraintes suivantes sur les masses des deux corps :

$$\dot{\omega} = 2.11353 \left(\frac{m_p + m_c}{M_\odot} \right)^{2/3} \text{ deg/an}, \quad (3)$$

$$\gamma = 0.00293696 \left(\frac{m_c}{M_\odot} \right) \left(\frac{m_p + 2m_c}{M_\odot} \right) \left(\frac{m_p + m_c}{M_\odot} \right)^{-4/3} \text{ s} \quad (4)$$

Les valeurs des masses m_p et m_c déduites de ce système d'équations, $1.42 M_\odot$ (masse solaire) pour le pulsar, $1.41 M_\odot$ pour le compagnon, sont ensuite utilisées pour calculer d'autres grandeurs, telles l'inclinaison de l'orbite et la valeur du demi-grand axe.

Il est également possible de prédire le rythme de décroissance de la période orbitale auquel conduirait selon la relativité générale une émission d'onde gravitationnelle. L'équation liant ce rythme \dot{P} à la période orbitale actuelle, à l'excentricité et aux masses,

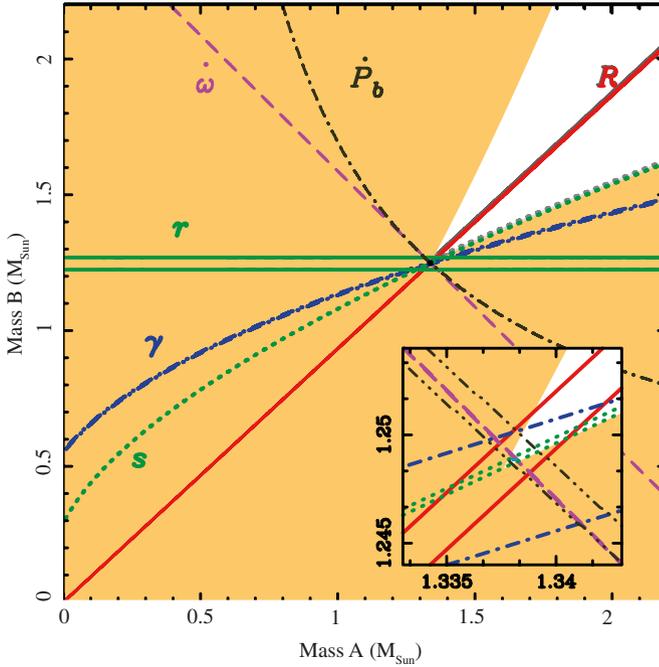


Figure 2. Estimation des masses des deux partenaires du pulsar binaire PSR J0737-3039 ; figure reproduite de [17].

est établie à partir de la formule du quadrupôle d'Einstein [24], appliquée au cas d'un système de deux masses ponctuelles [40, 45, 26] :

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{c^5} \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}}. \quad (5)$$

Le dernier facteur, dépendant de l'excentricité, est appelé *fonction d'amplification* de Peters et Mathews [40] ; il augmente de plus de dix fois la valeur numérique de \dot{P} . Compte tenu des valeurs des masses, le rythme de décroissance calculé est $\dot{P} = -2.4 \cdot 10^{-12}$, en excellent accord avec la valeur observée qui était en 1982 de $-2.3 \cdot 10^{-12}$.

La figure 2 illustre cette très bonne cohérence entre théorie et observations, pour un autre pulsar double découvert en 2003 par Burgay et al [17], le pulsar PSR J0737-3039. S'y trouvent reportées, dans le plan des masses du pulsar et du compagnon $[m_p, m_c]$ les trois courbes traduisant les équations (3)–(4) et (5), lorsque \dot{P} , γ et \dot{P} sont les valeurs observées. Sont reportées également les courbes relatives aux paramètres r et s de l'effet Shapiro qui est un effet de retard du temps d'arrivée de l'impulsion radio

lorsque celle-ci a traversé le champ gravitationnel généré par le compagnon. Ces cinq courbes se coupent dans une très petite région de ce plan $[m_p, m_c]$, autour du point $m_p \approx 1.338 M_\odot, m_c \approx 1.249 M_\odot$, donnant ainsi une estimation précise des deux masses.

3. Evènements et taux de détection attendus

La présente section aborde les différents types d'évènements attendus, les méthodes utilisées pour l'estimation de leur taux d'occurrence volumétrique et des taux de détection espérés. Mais les évènements qui seront observés dépendent des caractéristiques des détecteurs utilisés ; notamment bande de fréquence, contrôlant la nature de ces évènements, et sensibilité, fixant la distance limite d'observation. Rappelons donc brièvement ce qu'il en est sur ce plan des détecteurs en place ou en projet.

3.1 Bandes de fréquence et sensibilités

Les détecteurs actuellement opérationnels, sur le point de l'être, ou en projet dans un avenir proche, sont des détecteurs au sol. Ils constitueront un réseau mondial d'observation, composé aux Etats-Unis des deux détecteurs LIGO (Hanford et Livingston, bras de 4 km), en Europe de VIRGO (Cascina, Italie, bras de 3 km) et de GEO (Sarstedt, Allemagne, bras de 600 m), en Asie de KAGRA (Japon, bras de 3 km, opérationnel en 2018), auxquels s'ajoutera peut-être LIGO India (Indigo), dont le principe a été approuvé par le gouvernement indien en février 2016.

Ces détecteurs terrestres ont pour cibles des ondes gravitationnelles dans des bandes de fréquences allant de 10 Hz à 1000 Hz³, ondes émises lors de la coalescence de systèmes binaires comportant des étoiles à neutrons ou des trous noirs stellaires ; c.-à-d. lors d'évènements mobilisant des objets dont la masse est de l'ordre de une à vingt masses solaires. La courbe de densité spectrale (du bruit)⁴ de ces instruments doit assurer un nombre raisonnable d'observations par an avec un rapport signal sur bruit satisfaisant. Par exemple (figure 3), la densité spectrale de LIGO II est inférieure à 10^{-23} Hz^{-1/2} autour de 300 Hz, ce qui permet la détection de la coalescence de deux trous noirs stellaires de masse inférieure à $2 M_\odot$ à une distance de 20 Mpc, ou encore de deux trous noirs de masses comprises entre deux et dix masses solaires à une distance de 200 Mpc.

Un projet de détecteur spatial est actuellement en cours d'élaboration, Il s'agit de eLISA, *Evolved Laser Interferometer Space Antenna*, projet conduit par l'Agence Spatiale Européenne, concrétisant une matrice initiale, le projet LISA. eLISA consiste en une constellation de trois satellites formant un triangle équilatéral, avec des cotés long d'un million de km. Ces satellites sont placés sur des orbites garantissant la stabilité de cette configuration au cours des révolutions successives autour de la Terre. Après franchissement de toutes les étapes financières et techniques, ce dispositif devrait être lancé en 2030.

(3) De 1 à 10⁴ Hz en comptant large.

(4) Ou courbe de sensibilité.

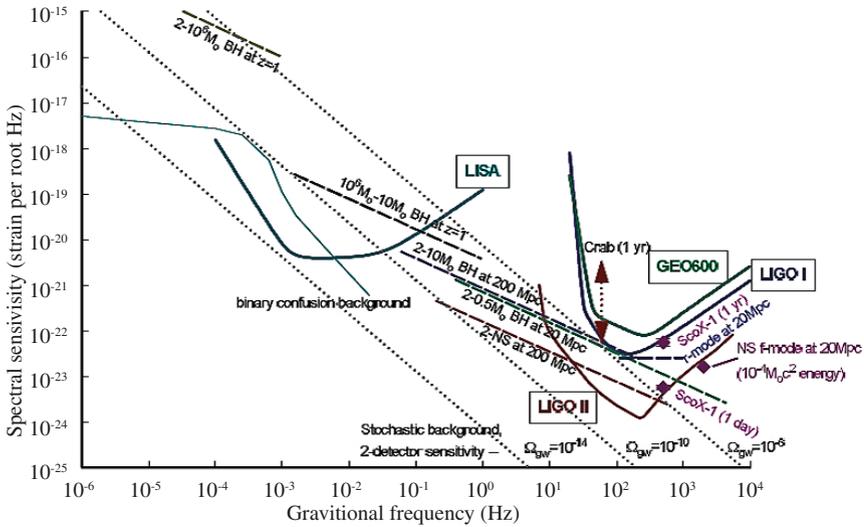


Figure 3. Courbes de sensibilité pour différents détecteurs.

Les fréquences visées s'étagent entre 10^{-4} Hz et 1 Hz ; mais la courbe de densité spectrale atteint son plateau minimal entre 10^{-3} Hz et 10^{-1} Hz, plage sur laquelle elle se stabilise autour de 10^{-20} Hz $^{-1/2}$. Les événements visés sont - entre autres - les coalescences d'objets de très grandes masses, comme les trous noirs supermassifs existant au centre de nombreuses galaxies, avec des masses de l'ordre de $10^5 M_{\odot}$ à $10^8 M_{\odot}$.

3.2 Estimation des taux de détection espérés

L'estimation des taux de détection d'ondes gravitationnelles générées par des fusions de systèmes binaires, a fait l'objet depuis les années 1990 de nombreux travaux (cf. [1]). Ces estimations étaient en effet importantes pour déterminer les spécifications des détecteurs terrestres. Le lecteur gardera à l'esprit que ce chapitre reflète, sur ce sujet, l'état de l'art le jour même de l'annonce de la première détection de ce type d'événements. La confrontation de ces estimations anciennes avec les données fournies par les premières détections effectives d'ondes gravitationnelles va être rétrospectivement d'un grand intérêt.

Le principe de telles estimations procède en deux volets :

- I. calcul des taux d'occurrence des coalescences de systèmes binaires, dans des galaxies telles que la nôtre, ou dans un certain volume ; ce, *indépendamment des possibilités de détection* ;

2. prise en compte des sensibilités aux différentes fréquences des instruments envisagés, et donc de la distance d'observation qu'ils peuvent atteindre, pour en déduire les taux de détection espérés.

La mise en pratique de cette démarche varie selon les types de coalescences considérées : coalescences mettant en jeu une étoile à neutrons couplée avec une autre étoile à neutrons ou bien avec un trou noir stellaire (NS-NS, NS-BH), ou encore un couple de trous noirs stellaires (BH-BH), enfin coalescences de couples présentant de fortes dissymétries de masses (IMRI, Intermediate Mass Ratio Inspirals et EMRI, Extreme Mass Ratio Inspirals). Deux grandes méthodes distinctes sont ainsi mises en œuvre. Les premières sont basées sur une extrapolation statistique du décompte de pulsars binaires observés et de leur stade d'évolution. Les secondes mobilisent des *modèles de synthèse de population*, où l'on simule l'évolution d'une population d'étoiles pour obtenir des taux de formation de couples d'objets compacts susceptibles de fusionner.

3.2.1 Extrapolation des décomptes de pulsars binaires observés

La méthode est présentée de façon détaillée dans un article publié en 2003 [39]. Elle part d'hypothèses sur la structure de la population des pulsars binaires peuplant notre galaxie. Sont ainsi proposés différents modèles possibles de répartition de cette population dans l'espace galactique et sur une échelle de luminosités. Le calcul des taux de détection espérés s'effectue ensuite en trois étapes.

Estimation du nombre de pulsars binaires dans la Galaxie. Pour un modèle de répartition⁵ X et un nombre total d'objets⁶ N_{tot} fixés, la méthode commence par évaluer⁷ une distribution des probabilités $P(N_{obs}; N_{tot}, X)$: probabilités de détecter, en utilisant les capacités des systèmes actuels de recensement des radio-pulsars⁸, un échantillon de taille N_{obs} . La connaissance de ces distributions $P(N_{obs}; N_{tot}, X)$ permet d'obtenir, pour différentes valeurs de N_{tot} , la probabilité que le nombre potentiel d'observations N_{obs} soit égal au nombre N_{det} d'observations *effectivement réalisées* des objets étudiés. L'application du théorème de Bayes permet alors de remonter de ces dernières probabilités $P(N_{det}; N_{tot}, X)$ aux probabilités $P(N_{tot}; N_{det}, X)$; c'est-à-dire, pour le modèle de répartition X choisi, aux vraisemblances des différentes valeurs possibles du nombre total d'objets dans la Galaxie, *compte tenu des données d'observation existantes*.

Estimation du taux galactique annuel de coalescences. Il faut alors passer de cette distribution de vraisemblance $P(N_{tot}; N_{det}, X)$ du nombre total d'objets, à celle, $P(R; N_{det}, X)$, du taux annuel R de coalescences de pulsars binaires dans la galaxie. Ce passage prend en compte le temps de vie τ_{life} estimé des pulsars binaires observés, temps séparant leur formation de la coalescence finale : pour un même nombre d'objets

(5) Donné par une fonction de densité de probabilité - de présence d'un pulsar binaire - au voisinage de telle position dans la galaxie et autour de telle valeur de luminosité.

(6) C.-à-d. de systèmes binaires (susceptibles de « coalescer ») théoriquement observables dans la Galaxie, avec un faisceau de rayonnement radio orienté vers la terre.

(7) En générant aléatoirement (méthode de Monte Carlo) une multitude de réalisations d'une population de taille N_{tot} conforme au modèle X choisi.

(8) Capacités modélisées par un seuil de détection, un rapport signal sur bruit limite comparé au rapport signal sur bruit calculé pour chacun des pulsars binaires de la population simulée ; le calcul de ce dernier rapport prend en compte la position de la Terre dans la Galaxie.

présents en moyenne dans la galaxie, plus le temps de vie est court, plus les évènements manifestant leur disparition par coalescence seront fréquents. Il intègre également le rapport f_b estimé entre le nombre réel de pulsars binaires et le nombre de ceux dont le faisceau radio est dirigé vers la Terre et qui sont donc les seuls à pouvoir être observés. L'expression du taux de coalescence, pour un effectif N_{tot} , est alors :

$$R = \frac{f_b N_{tot}}{\tau_{life}} \quad (6)$$

ce qui conduit à

$$P(R; N_{det}, X) = P(N_{tot}; N_{det}, X) \frac{\tau_{life}}{f_b} \quad (7)$$

Estimation des taux de détection espérés. La distribution de vraisemblance des taux de coalescence dans la Galaxie une fois connue, reste à extrapoler ce taux au volume correspondant à la distance limite de détection de l'instrument considéré. Par exemple pour LIGO, dans sa première version *initial LIGO*, cette distance limite était de ≈ 20 Mpc, alors que pour *advanced LIGO* cette limite est portée à ≈ 350 Mpc [39], ce qui multiplie le volume couvert par un facteur supérieur à 10^3 . Différentes méthodes sont proposées pour estimer le *facteur d'échelle* utilisable pour cette extrapolation. Les méthodes citées par exemple dans [38] s'appuient sur l'hypothèse que le taux de coalescence des systèmes binaires d'étoiles à neutrons est proportionnel au taux de formation des étoiles massives, et qu'il n'y a pas statistiquement, du point de vue de la structure des populations stellaires, de différence majeure entre les galaxies de l'espace détectable et notre Galaxie ; un corrélat observable du taux de formation d'étoiles, tel la densité de luminosité sur la bande bleue du spectre, est alors utilisé pour calculer le facteur d'échelle.

Exemples de résultats. Dans l'article [39] déjà cité, les calculs sont menés séparément pour chacun des deux pulsars binaires alors disponibles⁹, ces deux pulsars étant considérés comme représentatifs de deux populations de caractéristiques différentes¹⁰. Pour le modèle de population pris pour référence, les nombres N_{tot} estimés les plus vraisemblables sont, pour la Galaxie, de ≈ 390 et ≈ 350 pulsars respectivement pour le premier et pour le second type. Le taux de coalescence galactique *global* le plus vraisemblable, pour l'ensemble des deux populations, est alors, d'environ 8 évènements par million d'années, avec [0.4 – 40] comme intervalle de confiance à 99 %. Ces évaluations sont revues dès 2004 [37] pour intégrer un troisième système binaire¹¹. Les taux de coalescence sont sensiblement augmentés, mais il y a toujours une grande marge d'incertitude et les estimations fluctuent d'un modèle de population à l'autre, voire d'une publication à l'autre.

En 2007, après intégration de nouvelles données, le taux de coalescence galactique le plus vraisemblable est estimé par Kalogera et al. [36] à 71 évènements par million d'années

(9) Savoir PSR B1913+16 et B1534+12.

(10) Les calculs prennent alors dans chacun des deux cas $N_{det} = 1$.

(11) Référencé J0737-3039.

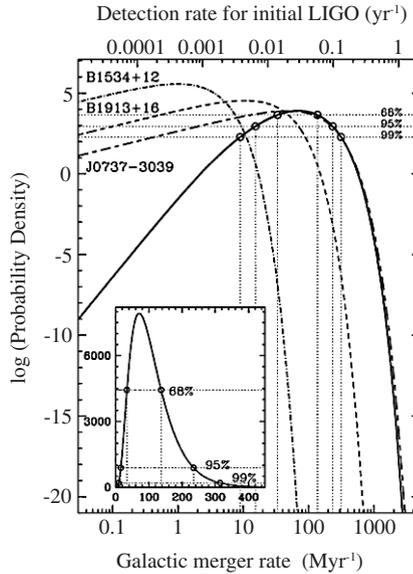


Figure 4. Distribution de probabilité des taux de fusion impliquant des couples d'étoiles à neutrons, par million d'années dans l'ensemble de la galaxie. L'intervalle de confiance à 99 pour cent se situant entre 9 et 120 fusions par millions d'années. Figure reproduite de Kalogera et al. [36], figure 9.

(figure 4). Le taux de détection espéré est de l'ordre de un événement tous les trente ans pour *initial LIGO*, et un événement tous les deux jours pour *advanced LIGO* (cf. [36], page 30).

3.2.2 Modèles de synthèse de populations

Concernant les systèmes binaires de trous noirs stellaires (BH-BH), les données d'observation manquent, de part la nature de ces objets, et les modèles de synthèse de populations sont alors un recours. Simulant la dynamique de formation des systèmes binaires d'objets compacts, ils ont été utilisés également pour les couples NS-NS ou encore les couples mixtes NS-BH. Dans la littérature consacrée à ces approches, figurent, par exemple, les travaux de Belczynski et al 2002 [5] détaillant la structure de leur modèle, 2007 [7] consacré plus spécifiquement aux couples BH-BH, 2008 [6] présentant une nouvelle version du code informatique, 2010 [4] orienté vers les capacités attendues du détecteur spatial LISA.

Les modèles intègrent des hypothèses concernant la structure de la population d'étoiles au sein de la Galaxie, les processus d'évolution, la proportion de systèmes binaires et les interactions ayant lieu en leur sein. Les codes informatiques partent d'une population simulée de systèmes binaires, formés d'étoiles caractérisées par un âge, une masse, une

métallicité initiales ; ils font évoluer ces étoiles jusqu'à un état final d'objet compact stable, et dressent alors des statistiques concernant la nature des objets (naines blanches, étoiles à neutrons, trous noirs) et leur masses, les paramètres orbitaux des systèmes binaires subsistants et leur temps de vie avant coalescence.

Aperçu des processus modélisés. Ces modèles comportent deux composantes [5]. La première composante s'attache à la dynamique propre des étoiles isolées. L'histoire d'une étoile est décrite par une succession de différents stades, succession spécifique à la masse et la métallicité initiale. Des formules permettent de calculer l'état de l'astre (rayon, masse totale et luminosité, masse du cœur, composition) à la fin de chacun des stades. Des processus continus tels les pertes de masse consécutives à l'émission de vents stellaires sont pris en compte, ainsi que des événements comme les explosions (formation de géantes rouges, de supernovae), contractions, rebonds en fin de vie. La seconde composante s'attache *aux interactions en œuvre dans les systèmes binaires*. Elle est exploitée dans des simulations faisant évoluer simultanément les deux compagnons et les paramètres orbitaux du système. Le pas de temps de ces simulations est déterminé de manière à rester inférieur à la durée théorique du stade dans lequel se trouve le compagnon évoluant le plus rapidement. Ainsi est-on assuré d'intégrer correctement les conséquences des interactions sur la vie propre des deux étoiles. Divers processus sont pris en compte, notamment transferts de masses conservatifs, pertes de masse et de moment angulaire consécutives à certains transferts *non conservatifs*, conséquences de l'effondrement du cœur de l'une des étoiles et de son explosion en supernova, notamment impulsion supplémentaire donnée à l'étoile en cause lors d'une explosion asymétrique (*kick velocity*) et la rupture du couple qui peut en résulter, formation, dynamique et rôles des enveloppes de gaz entourant le système binaire, et *in fine*, perte d'énergie due au rayonnement gravitationnel.

Exemples de résultats. Les modèles de synthèse de population intègrent donc la physique complexe présidant à la formation de couples d'objets compacts. Mais la connaissance des processus est incomplète (cf. [36], 5) ; les valeurs des paramètres de leur modélisation sont entachées d'incertitudes qui se transmettent aux résultats : ainsi les taux de coalescence estimés peuvent-ils varier de un à deux ordres de grandeurs, voire plus. Aussi bien a-t-on cherché à contraindre ces modèles en les confrontant aux estimations empiriques, lorsque possible ; par exemple avec le nombre de systèmes NS-NS, ou encore avec la fréquence des supernovae dans un périmètre donné. On a également cherché à identifier différents scénarios d'évolution, des configurations de paramètres plausibles, et décliné les modèles en plusieurs variantes particulières. Au delà des différences entre ces variantes, les prédictions obtenues concernant les couples de trous noirs stellaires se situent toutes en dessous de la limite de fréquence établie à partir de l'absence d'observations constatées sur les premières versions des instruments LIGO et VIRGO. Pour reprendre les estimations publiées dans [7], table 2, le taux de coalescence galactique le plus vraisemblable, pour les couples BH-BH, s'établit environ à 0,025 événements par million d'années dans la variante de référence, contre 15 événements par million d'années pour le taux NS-NS. Le taux correspondant de détection espéré pour les ondes émises par les fusions de trous noirs stellaires est alors autour de 2 événements par an pour la version avancée de LIGO.

3.2.3 Trous noirs supermassifs

Les coalescences de trous noirs supermassifs résultent de la collision de deux galaxies possédant ces trous noirs en leurs centres respectifs. La question de « jusqu'à quelle distance faut-il observer ? » pour avoir un taux annuel raisonnable d'évènements, se pose avec moins d'acuité. La puissance de l'instrument eLISA envisagé, et les caractéristiques des phénomènes concernés, assurent en effet un rapport signal sur bruit (*SNR*) suffisant jusqu'à des distances cosmologiques [3], atteignant par exemple des redshifts de 10 voire 15, redshifts correspondant à la période de ré-ionisation de l'univers, à une époque où les étoiles et les galaxies ont commencé à se former. Ainsi, pour des systèmes de l'ordre de 100.000 masses solaires et pour un redshift égal à 15 le rapport signal sur bruit attendu est de 50 ([3], figure 16). Pour un redshift fixé, ce rapport *SNR* décroît lorsqu'augmente l'asymétrie¹² du couple de trous noirs ; mais pour un redshift de 4 et un *mass ratio* inférieur à un dixième, le rapport signal sur bruit attendu est encore de 20 ([3], figure 17).

4. Emission d'ondes gravitationnelles par une source isolée

La nature des ondes gravitationnelles est d'être des perturbations de l'Espace-Temps. Leur approche théorique s'est donc appuyée initialement sur une linéarisation des équations d'Einstein, dans l'hypothèse d'une métrique s'écartant peu de la métrique de l'Espace-Temps plat de Minkowski.

Une telle linéarisation est suffisante pour comprendre en première approximation la génération des ondes, leur propagation et leurs effets sur la matière traversée. Elle s'avère cependant inadaptée pour modéliser le signal émis lors de la coalescence d'un système binaire. Pour être détectée, c.-à-d. être extraite du bruit de fond, et exploitée pour remonter aux propriétés de la source, la forme de ce signal (voir schéma figure 5), notamment la loi contrôlant l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude, doit être connue avec une grande précision. Cette nécessité a été reconnue dès l'initiation des projets LIGO et VIRGO [18].

Le chapitre précédent a rappelé le principe du calcul conduisant des équations d'Einstein à leur linéarisation, puis après choix adéquats de jauge, aux formules donnant l'amplitude et la puissance rayonnée en fonction des caractéristiques du système source. Ce calcul et les formules dites du quadripôle auxquelles il aboutit sont valides sous réserve de la vérification par le système source de certaines conditions : sur le champ gravitationnel engendré par la source, qui doit être suffisamment faible - caractéristique mesurée par un facteur de compacité - et sur la dynamique de ce champ, qui doit être suffisamment lente, ou « faiblement relativiste ». Les développements abordés ici se situent toujours dans les mêmes conditions, mais de façon moins stricte, en allant au delà de l'approximation linéaire et en intégrant l'effet

(12) Mesurée par le paramètre q , *mass ratio*, rapport de masse entre les deux trous noirs, par construction inférieur ou égal à 1 ; l'asymétrie croît quand le rapport de masse q décroît.

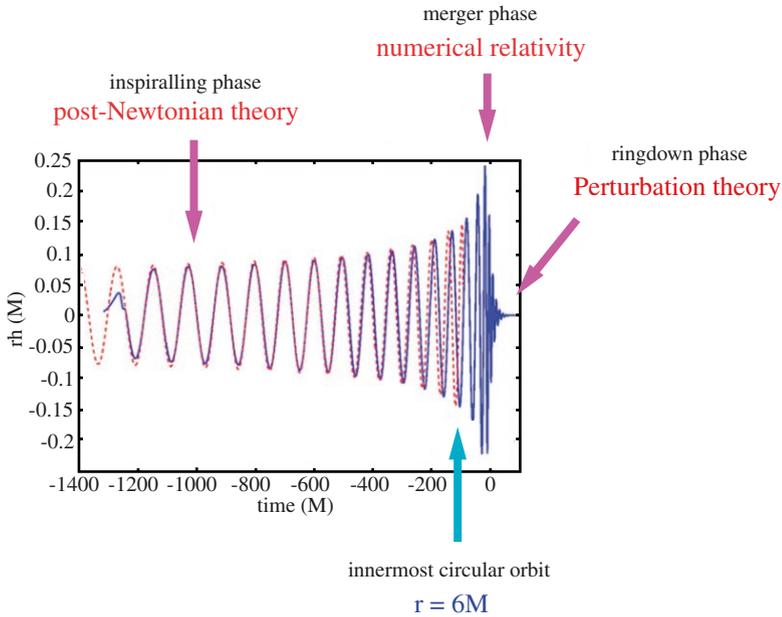


Figure 5. Schéma de la forme du signal gravitationnel émis lors la coalescence d'un système binaire : segmentation du processus en différentes phases et approches de modélisation associées.

de non-linéarités d'ordre plus ou moins élevé. L'objectif recherché dans ces développements est d'ajuster l'ordre des approximations aux exigences requises par le problème traité, ce dans le cadre d'un même formalisme.

4.1 La prise en compte des non-linéarités

Dans le contexte des ondes gravitationnelles, le traitement des non-linéarités dans les équations d'Einstein part d'une reformulation mobilisant une métrique dite *gothique*, dont le lien avec la métrique habituelle, dans un référentiel donné, a pour expression :

$$g^{\alpha\beta} = \sqrt{-\det(g)}g^{\alpha\beta} \quad (8)$$

L'écart - appelé potentiel - entre le champ gravitationnel existant et celui d'un espace plat de Minkowski est alors représenté par¹³ :

(13) Cette définition mobilise bien la différence entre deux grandeurs du même type, la matrice représentant la métrique inverse de Minkowski, dont le déterminant est -1 , pouvant être vue elle-même comme gothique.

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \quad (9)$$

Les équations d'Einstein sont alors réécrites en fonction de h ; cette réécriture fait intervenir la condition de jauge $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ (dite jauge harmonique) et une équation d'onde¹⁴,

$$\square h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} \quad (10)$$

$$\text{avec } \tau^{\mu\nu} = -\det(g)T^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G}\Lambda^{\mu\nu} \quad (11)$$

Dans cette réécriture, les non-linéarités des équations d'Einstein sont prises en compte dans les termes $\Lambda^{\mu\nu}$ se combinant à celles du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ de la source pour former les composantes $\tau^{\mu\nu}$. Les calculs conduisent à exprimer $\Lambda^{\mu\nu}$ comme une somme infinie de termes dans lesquels h et ses dérivées partielles successives interviennent dans des produits d'ordre croissant. Son expression s'écrit symboliquement¹⁵.

$$\Lambda^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}(h, h) + M^{\mu\nu}(h, h, h) + L^{\mu\nu}(h, h, h, h) + \dots \quad (12)$$

Lorsque la perturbation h est suffisamment petite, $N(h, h)$ est négligeable, et à sa suite tous les autres termes de la somme infinie : $\Lambda^{\mu\nu}$ disparaît, $\det(g) \approx \det(\eta)$ et l'on retrouve une équation linéaire. Mais dès que l'on ne peut plus les négliger, les non-linéarités inscrites dans les termes $\Lambda^{\mu\nu}$, sont sources d'importantes difficultés mathématiques. En premier lieu parce que, contrairement au cas de l'équation d'onde linéaire, la perturbation h intervient *des deux côtés de l'équation*. En second lieu parce que le domaine de définition de $\Lambda^{\mu\nu}$ s'étend sur tout l'espace, même si sa valeur tend vers 0 lorsqu'on s'éloigne infiniment de la source : le pseudo-tenseur $\tau^{\mu\nu}$, contrairement au tenseur d'Énergie-Impulsion $T^{\mu\nu}$ capturant le contenu matériel de la source et sa dynamique, *n'a pas de support spatialement borné*.

De nombreux travaux ont été donc consacrés à résoudre ces difficultés, pour trouver et justifier les meilleures approximations possibles. Les techniques d'approximations adoptées consistent à substituer dans l'équation d'onde II, à la valeur exacte de la perturbation, un développement en série que l'on limite à un ordre suffisant pour la question posée, puis

(14) La forme de cette équation d'onde est liée à la reformulation introduisant la métrique gothique. Cette dernière permet d'écrire les équations non-linéaires contrôlant la perturbation $h^{\mu\nu}$ de manière à conserver dans la partie gauche l'opérateur $\square = \eta^\alpha \eta^\beta \partial_\alpha \partial_\beta$, ou $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ opérateur d'Alembertien « plat » basé sur la métrique de Minkowski et non sur la métrique perturbée. Le calcul de la perturbation, appliquant l'inverse de cet opérateur, s'en trouve facilité.

(15) Cf. [13] qui donne l'expression complète des trois premiers termes N , M et L en fonction des composantes de h et de ses dérivées partielles.

à calculer les termes retenus dans ce développement. Plusieurs types de développement sont utilisés.

Le développement post-Minkowskien. Il consiste à développer $h^{\mu\nu}$ en une série infinie de puissances de G , la constante gravitationnelle ; soit :

$$h^{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{m=\infty} G^m h_{(m)}^{\mu\nu} \quad (13)$$

Faire tendre G vers 0 équivaut à s'approcher d'un Espace-Temps plat de Minkowski sans gravitation : la valeur de la perturbation h tend bien alors vers 0 sur tout évènement. L'approche post-Minkowskienne est valide pour toute source « faiblement auto-gravitante », lorsque $\gamma_{PM} \equiv \frac{GM}{c^2 r_{ext}} \ll 1$ avec M masse totale de la source et r_{ext} rayon de son extension spatiale¹⁶. La troncature du développement à l'ordre m_u donne le degré d'approximation adopté. Le choix de cet ordre dépend de la valeur du champ gravitationnel que la source développe en son sein.

Le développement post-Newtonien. Il consiste à développer $h^{\mu\nu}$ en une série infinie de puissance de $1/c$, c vitesse de la lumière ; soit

$$h^{\mu\nu} = \sum_n \frac{1}{c^n} h_n^{\mu\nu} \quad (14)$$

L'usage est d'indiquer l'ordre du développement en puissances fractionnaires de $1/c^2$: une expansion jusqu'à l'ordre $1/c^2$ est ainsi en *1PN*, jusqu'à l'ordre $1/c^5$ en *2,5PN*, etc. L'approche post-Newtonienne est valide pour toute source faiblement auto-gravitante et dont la dynamique est lente par rapport à la vitesse de la lumière. Typiquement pour un petit rapport v/c , où v désigne une vitesse significative de la dynamique de la source ; la condition de dynamique lente s'exprime aussi par la faiblesse du rapport sensiblement équivalent r_{ext}/λ où r_{ext} est la dimension spatiale de la source et λ la longueur d'onde du rayonnement gravitationnel émis¹⁷.

Un théorème, démontré dans le cadre de l'approche *MPM-PN* combinant formalisme post-Minkowskien et post-Newtonien [12], conduit à adopter pour le développement post-Newtonien la structure générale suivante, basée sur deux indices n et p :

$$h^{\mu\nu} = \sum_{n,p} \frac{[\ln(c)]^p}{c^n} h_{n,p}^{\mu\nu} \quad (15)$$

(16) Pour les systèmes binaires, la faiblesse de γ_{PM} est aussi celle de $\epsilon_{PN}^2 \approx v^2/c^2$ où v est une vitesse significative du mouvement orbital : dans ce cas, une source faiblement autogravitante est aussi de *dynamique lente*, condition exigée pour la validité de l'expansion post-Newtonienne.

(17) Une dynamique lente implique, *par définition*, que la durée r_{ext}/c nécessaire à la lumière pour traverser la source soit petite comparée à la période du mouvement de cette source, de l'ordre de r_{ext}/v ; et donc petite également comparée à la période de l'onde gravitationnelle λ/c : nous avons donc $r_{ext}/c \ll \lambda/c$ soit $r_{ext}/\lambda \ll 1$.

Le développement multipolaire. Le développement multipolaire d'une fonction associant, dans un espace à trois dimensions, une valeur $V(x) \equiv V(r, n^1, n^2, n^3)$ à tout point x repéré - dans un référentiel cartésien - par la distance à l'origine des coordonnées r et les trois composantes n^1, n^2, n^3 du vecteur unitaire n pris sur la direction $O \rightarrow x$, est une série infinie de la forme¹⁸ (cf. [12], annexes) :

$$V(r, \mathbf{n}) = \hat{f}(r) + \hat{f}_{i_1}(r)\hat{n}^{i_1} + \hat{f}_{i_1 i_2}(r)\hat{n}^{i_1 i_2} + \hat{f}_{i_1 i_2 i_3}(r)\hat{n}^{i_1 i_2 i_3} + \dots \quad (16)$$

Dans cette série, \hat{n}^{i_1} est égal à la composante n^{i_1} du vecteur n ; les valeurs $\hat{n}^{i_1 i_2}, \hat{n}^{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{K}$ sont formées respectivement à partir des produits binaires $n^{i_1} n^{i_2}$, ternaires $n^{i_1} n^{i_2} n^{i_3}$, etc., des mêmes composantes. Par exemple, avec $i_1 = 1, i_2 = 2$, nous avons $\hat{n}^{i_1 i_2} = n^1 n^2$; cependant une correction¹⁹ intervient dès que deux indices i_m et i_n ont une valeur commune quelconque i ; cette correction est appliquée de manière à ce que la somme sur toutes les valeurs possibles de i , somme notée²⁰ $\delta_{i_m i_n} \hat{n}^{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots}$, soit nulle : par exemple, si $i_1 = i_2 = i$, la correction appliquée donne $\hat{n}^{i i} = n^i n^i - 1/3$: nous avons bien alors $\delta_{i i} \hat{n}^{i i} = \sum_i (n^i n^i - 1/3) = 0$.

Ce développement sur les tenseurs $\hat{n}^{i_1 i_2 \mathbf{K} \dots i_l}$, notés \hat{n}^L d'une façon plus compacte, est équivalent à l'expansion en harmoniques sphériques [12]. En pratique, il s'avère utile de poser

$$\hat{f}_L(r) = \frac{(2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots \hat{C}_L(r)}{4\pi l! r^{l+1}} \quad (17)$$

Cette écriture permet de relier simplement les coefficients du développement 16 aux moments multipolaires $\hat{M}_L(V)$ - dans leur forme symétrique sans trace - de la fonction $V(x)$ vu par exemple comme un champ de potentiel. Le calcul montre en effet (en posant $\hat{x}^L = r^L \hat{n}^L$) que :

$$\hat{C}_L(r) = \int_{S(r)} \hat{x}^L V(x) ds \quad (18)$$

l'intégrale étant prise sur la sphère de rayon r , ce qui entraîne :

$$\int_{r=0}^{r=\infty} \hat{C}_L(r) dr = \int \hat{x}^L V(x) ds dr = \int \hat{x}^L V(x) d^3x \equiv \hat{M}_L(V) \quad (19)$$

(18) En utilisant les conventions d'Einstein de sommation implicite des indices.

(19) Ainsi les tenseurs $\hat{n}^{i_1 i_2}, \hat{n}^{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{K}$ sont à la fois symétriques et *sans trace*, *trace free*. Le signe $\hat{}$ affectant les symboles marque la vérification de cette propriété, dite STF.

(20) Utilisation du symbole de Kronecker $\delta_{i_m i_n}$, non nul uniquement si $i_m = i_n$.

4.2 Le formalisme MPM-PN

Historiquement, l'approche des non-linéarités s'est construite autour des expansions post-Newtoniennes, à partir de la formulation standard des équations d'Einstein, et sans lien avec l'approche post-Minkowskienne (cf. [41], chapitre 8). Cependant, cette « version classique » a montré ses limites, dès lors que le degré d'approximation requis exigeait de développer l'expansion à un ordre élevé (cf. [42], introduction, [10], p. 37). Deux sortes de difficultés apparaissent en effet ; difficultés techniques, liées aux intégrales mises en œuvre dans les calculs et à leur possible divergence ; difficultés intrinsèques, liées à l'incapacité du formalisme à prendre en compte les conditions aux limites à l'infini²¹. Aussi bien la « version moderne » commence-t-elle par construire deux développements de la perturbation gravitationnelle, chacun d'eux ciblant une zone particulière de l'espace :

1. le premier part d'un développement post-Minkowskien du potentiel $h^{\mu\nu}$ sur une zone dite *zone extérieure*, à une distance r du centre de gravité de la source supérieure au rayon r_{ext} de la région que cette source occupe ;
2. le second part d'un développement post-Newtonien du potentiel $h^{\mu\nu}$ sur une zone dite *zone proche*, à une distance r du centre de gravité de la source inférieur à une certaine distance r_{in} vérifiant $r_{in} \ll \lambda$, avec λ longueur d'onde du rayonnement gravitationnel émis.

Les conditions vérifiées par une source dite *post-Newtonienne* - d'être faiblement auto-gravitante et d'avoir une dynamique lente - assurent l'inégalité $r_{ext} < r_{in}$. Zone extérieure et zone proche se recouvrent donc dans une *zone de raccordement*, $r_{ext} \leq r \leq r_{in}$. Cette zone commune permet de coupler les deux développements et résoudre par là même les indéterminations subsistant dans chacun d'eux construits séparément : pour le premier développement, prise en compte de l'existence de la source, de sa distribution spatiale et de sa dynamique ; pour le second développement, prise en compte du caractère compact et isolé de la source, prise en compte de la réaction sur la source de la perturbation générée dans la zone extérieure et de l'absence d'autres perturbations incidentes.

Cette approche combinée *MPM-PN formalism*²² (voir par exemple [12, 9, 42, 11]) conduit à deux expressions - sous forme de séries formelles infinies - de la solution des équations d'Einstein pour $h^{\mu\nu}$, valides respectivement dans la zone extérieure et dans la zone proche ; ces expressions fondent la construction itérative d'approximations d'ordre quelconque, qui prendront *in fine* des formes post-Newtoniennes. *A titre d'exemple*, nous décrivons succinctement en annexe, à la fin de ce chapitre, le principe de la construction de la solution pour la zone extérieure.

(21) Le fait que la source est bien isolée, qu'il n'y a pas - et qu'il n'y a pas eu - d'autres émissions d'ondes gravitationnelles (absence d'ondes ré-entrantes), qu'antérieurement à un certain instant du passé, cette source n'émettait pas.

(22) Pour Multipolar Minkowskian - Post Newtonian.

4.3 Applications aux systèmes binaires compacts

Les approches purement post-Newtoniennes, puis les approches combinées *MPM-PN* ont été appliquées aux systèmes binaires compacts et à la dynamique du rayonnement gravitationnel qu'ils émettent dans la phase de coalescence ; ce avant la phase finale, celle des tous derniers moments du processus, phase finale dans laquelle les degrés d'approximation nécessaires deviennent si élevés que l'on abandonne toute recherche d'expression analytique pour passer à des simulations numériques (raccord avec la *relativité numérique*)²³.

Le passage des théories du rayonnement gravitationnel émis par une source post-Newtonienne quelconque à l'analyse d'une source formée d'un système binaire ont cependant posés des problèmes difficiles. Les théories des sources isolées modélisent en effet ces dernières comme des distributions continues, et plus précisément *régulières*, du tenseur d'Energie-Impulsion $T^{\mu\nu}$ sur une région d'étendue limitée. Cette propriété n'est pas vérifiée a priori dans un modèle de système binaire où chaque partenaire est vu comme une *particule ponctuelle*, avec une densité de masse $\rho(x)$ infinie (fonction de Dirac) sur la position de chaque particule. Une technique de régularisation est donc mise en œuvre, dite *régularisation dimensionnelle*²⁴, associée à des procédures de renormalisation.

Deux types de résultats retiennent l'attention ; le premier concerne les équations de mouvement du système, au delà de l'approximation newtonienne, et le second l'expression du flux d'énergie et des composantes de l'amplitude, au delà des formules du quadrupole d'Einstein.

4.3.1 Les équations du mouvement

Dans la version Newtonienne (*0PN*), l'accélération de la particule i due à l'attraction de la particule j vaut $-\frac{Gm_j}{r^2}\mathbf{n}_{ij}$, où r est la distance qui sépare les deux particules et \mathbf{n}_{ij} est le vecteur unitaire de la direction $i \rightarrow j$. Un terme complémentaire en *1PN* (donc pondéré par $1/c^2$) a été présenté²⁵ en 1938 dans un article d'Einstein, Infeld et Hoffmann [25]. L'accélération de la particule i prend la forme :

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{Gm_j}{r^2}\mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{c^2} \left(\left[\frac{5G^2m_i m_j}{r^3} + \frac{4G^2m_j^2}{r^3} + \dots \right] \mathbf{n}_{ij} + \dots \right) \quad (20)$$

Le terme en *1PN* fait intervenir la masse de la particule attirée m_i , et au delà (. . .), la vitesse des deux particules et l'accélération de la particule j . Des travaux, utilisant différentes approches, dont les publications s'étagent à partir de la fin des années 1990 ont

(23) Dans cette phase finale, la source n'est plus vraiment post-Newtonienne ; les comparaisons avec les simulations construites sur la relativité numérique montrent cependant que les résultats analytiques restent longtemps valides, avec un très bon « raccord », quasiment jusqu'aux tous derniers cycles.

(24) Cette technique a été introduite initialement en 1972 par différents auteurs (t'Hooft and Veltman, Bollini and Giambiagi, ...) dans le contexte de la théorie quantique des champs.

(25) Dans le contexte plus général d'un système à N corps ; le problème avait déjà été abordé dès 1917 par Lorentz et Droste.

poursuivi les approximations jusqu'à l'ordre 3PN [34, 21, 13, 23, 33, 29] intégrant ainsi une première composante de la réaction du rayonnement sur les équations de mouvement à 2,5PN. Le degré d'approximation a été poussé récemment [35, 22, 8] jusqu'à l'ordre 4PN, complétant donc la formule 20 par des termes en $1/c^4, 1/c^5, \dots 1/c^8$.

4.3.2 Le flux d'énergie et la forme du signal gravitationnel

La forme du signal gravitationnel à l'approche de la coalescence, avec l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude consécutive, est liée à la perte d'énergie du système binaire au cours de cette étape, et donc à la luminosité gravitationnelle, c.-à-d. au flux d'énergie du rayonnement, grandeurs qu'il faut donc évaluer avec la meilleure précision. La formule du quadrupôle, appliquée au cas d'un système binaire d'orbite quasi circulaire de vitesse angulaire orbitale ω , donnait une expression approchée [40] au premier ordre, égale à

$$\mathcal{F}^{GW} = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \nu^2 x^5 \quad (21)$$

$$\text{avec } \nu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \text{ et } x = \frac{[G(m_1 + m_2)\omega]^{2/3}}{c^2} \quad (22)$$

Les formules étendues (cf. par exemple [14]) corrigent cette expression ; le membre droit de l'équation 21 est affecté du facteur post-Newtonien

$$1 + \left[-\frac{1247}{336} - \frac{35}{12}\nu \right] x + 4\pi x^{3/2} + \left[-\frac{44711}{9072} + \frac{9271}{504}\nu + \frac{65}{18}\nu^2 \right] x^2 \quad (23)$$

$$+ [\dots] x^{5/2} + [\dots] x^3 + [\dots] x^{7/2} + \mathcal{O}(x^4)$$

de degré 3,5PN dans lequel les coefficients dépendent, pour certains d'entre eux, du coefficient sans dimension ν traduisant l'équilibre plus ou moins prononcé des deux masses. Ce flux d'énergie transmise par les ondes gravitationnelles à l'infini est puisé dans la perte d'énergie dE/dt du système binaire, qui voit son rayon se contracter et sa vitesse s'accroître.

Les calculs conduisent ensuite à l'expression des composantes de la perturbation $h^{\mu\nu}(t)$ à une distance R de la source, et au bout du compte, à la valeur de l'amplitude perçue par un détecteur, compte tenu de l'angle de la ligne de visée avec le plan orbital de la source. Au premier ordre, en application des formules du quadrupôle aux systèmes binaires, la composante $h^{22}(t)$ vaut par exemple

$$h^{22}(R, t) = \frac{8GM\nu x}{Rc^2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \exp(-2i\psi(t))$$

Dans les travaux de Faye et al 2012 [28] elle est corrigée jusqu'à 3,5PN d'un facteur $1 + \sum_{ij} f_{ij} x^{k/2}$, $k = 2, \dots, 7$, dépendant également de l'équilibre des masses ν .

Mais cette correction n'épuise pas les effets relativistes, qui se manifestent également dans une modulation post-Newtonnienne de la phase $\psi(t)$.

Enfin, la dynamique de la vitesse angulaire, donc celle de la fréquence de l'onde, fait-elle même l'objet de corrections post-Newtonniennes. Ainsi la variation relative de cette vitesse, soit $\dot{\omega}/\omega$, égale au premier ordre [27] à $\omega \frac{96}{5} vx^{\frac{5}{2}}$ fait-elle l'objet de plusieurs modulations, mobilisant toujours des développements en puissance de x . Les premières concernent des systèmes binaires dont aucun des membres ne possède de mouvement propre de rotation (*non-spin binaries*). Mais l'impact de la présence de ces mouvements de rotation, dans ses différents effets (interactions *spin-orbit* et *spin-spin*) a également été pris en compte, actuellement jusqu'à 4PN.

Au bout du compte, la modélisation de la dynamique du signal gravitationnel à l'approche de la coalescence combine toutes ces approximations post-Newtonniennes, sur la perturbation de la métrique h , sur la vitesse angulaire ω , la phase ψ , et leur conséquence sur le coefficient x lui-même. La confiance dans la validité de ces calculs, prenant en compte à des degrés divers les non-linéarités des équations d'Einstein, permet de confronter leurs résultats aux mesures effectuées lors de la détection effective d'ondes gravitationnelles, ouvrant ainsi la voie à de nouveaux tests de la Relativité Générale (cf. [2]).

Annexe : solution pour la zone extérieure

Deux articles de référence [9, 11] nous permettent de donner un aperçu des raisonnements mobilisés dans la construction de cette solution. Dans la zone extérieure, l'équation d'onde s'écrit $\square h^{\mu\nu}(x,t) = \Lambda^{\mu\nu}(x,t)$, avec la condition de jauge $\partial_\nu h^{\mu\nu}(x,t) = 0$. Cette équation contrôle le comportement des ondes gravitationnelles loin de la source. Dans cette zone, on cherche à exprimer $h^{\mu\nu}$ par un développement infini noté $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$, et, parallèlement, à exprimer $\Lambda^{\mu\nu}$ par un second développement infini noté $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})$. Ces développements infinis doivent donc être liés par :

$$\square \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu}) \quad \partial_\nu \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = 0. \quad (24)$$

Zone extérieure : Structure générale des solutions

Au départ du raisonnement, $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ et $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})$ se voient attribuer une structure post-Minkowskienne :

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \sum_{m=1}^{m=\infty} G^m h_{(m)}^{\mu\nu} \quad \mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu}) = \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$$

Compte tenu de la structure de $\Lambda^{\mu\nu}$ (équation 12), les équations 24 se décomposent en une suite infinie d'équations sur $h_{(m)}^{\mu\nu}$ et $\Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$.

$$\square h_{(1)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(1)}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\nu h_{(1)}^{\mu\nu} = 0 \quad (25)$$

$$\square h_{(m)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}(h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)}) \quad \partial_\nu h_{(m)}^{\mu\nu} = 0 \quad m \geq 2 \quad (26)$$

Cette hiérarchie suggère de chercher à construire les $h_{(m)}^{\mu\nu}$ jusqu'à un ordre post-Minkowskien p quelconque, par itération à partir d'une « graine » $h_{(1)}^{\mu\nu}$ vérifiant 25. Il s'avère qu'une telle construction itérative est possible. Dans cette construction, $h_{(m)}^{\mu\nu}$ prend la forme $u_{(m)}^{\mu\nu} + v_{(m)}^{\mu\nu}$, chacun des termes de cette somme dépendant de la graine $h_{(1)}$ choisie. Le terme $u_{(m)}^{\mu\nu}$ se calcule par²⁶ :

$$u_{(m)}^{\mu\nu} = \mathcal{FP} \square_R^{-1} \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}(h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)}) \quad (28)$$

Quant au terme $v_{(m)}^{\mu\nu}$ il est pris (cf. [11], section 2.3) parmi les solutions²⁷ du couple d'équations

$$\square v_{(m)}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\nu v_{(m)}^{\mu\nu} = -\partial_\nu u_{(m)}^{\mu\nu} \quad (29)$$

afin que $h_{(m)}^{\mu\nu}$ satisfasse bien les deux équations 26.

Cette construction itérative conduit, en pondérant par G^m et en sommant sur m jusqu'à l'infini, à poser :

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = Gh_{(1)}^{\mu\nu} + \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m u_{(m)}^{\mu\nu} + \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m v_{(m)}^{\mu\nu} \quad (30)$$

forme dans laquelle on reconnaît la solution de l'équation linéaire dans le vide ($Gh_{(1)}^{\mu\nu}$) complétée par des termes post-Minkowskiens d'ordre ≥ 2 encapsulant les non-linéarités. Cette solution est (en principe) calculable à un ordre post-Minkowskien quelconque p dès lors que la graine $h_{(1)}$ est connue. Bien qu'elle puisse apparaître comme particulière, on

(26) L'opération *Finite Part* s'appliquant à l'opérateur \square_R^{-1} est une procédure mathématique éliminant ici la divergence de $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)})$ au voisinage de la source, lorsque $|x| \rightarrow 0$ (cf. [11], section 2.3 pour définition et notation précises). L'opérateur \square_R^{-1} (d'Alembertien inverse retardé), a pour expression :

$$[\square_R^{-1} F](x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 y}{|x-y|} F(y, t - \frac{|x-y|}{c}) \quad (27)$$

mobilisant une intégrale de la fonction F prise sur le cône de lumière passé du point (x, t) .

(27) La solution du système d'équations 29 n'est en effet pas unique. L'important est de choisir une procédure de calcul qui soit la même pour tous les niveaux post-Minkowskien m . Une telle procédure conduit à spécifier (pour chaque couple d'indices $\mu\nu$) une fonctionnelle $v^{\mu\nu} : -\partial_\nu u_{(m)}^{\mu\nu} \rightarrow v_{(m)}^{\mu\nu}$, fonctionnelle linéaire indépendante de m , et qui par conséquent répond également à $v^{\mu\nu} : -\partial_\nu [\sum_m G^m u_{(m)}^{\mu\nu}] \rightarrow [\sum_m G^m v_{(m)}^{\mu\nu}]$.

montre que sa forme (équation 30) donne la structure générale des solutions des équations 24 avec le degré de liberté lié au choix de la graine (cf. [11], section 2.4).

Contraintes sur la graine de l'itération

La première des équations 25, jointe aux conditions aux limites à l'infini²⁸ (antérieurement à une certaine date, le champ gravitationnel $h^{\mu\nu}$ ne dépend pas du temps), impose à $h_{(1)}^{\mu\nu}$ de prendre la forme²⁹ d'ondes multipolaires retardées :

$$h_{(1)}^{\mu\nu}(x, t) = \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\partial_L \frac{\hat{K}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c)}{|x|} \right] \quad (32)$$

$$= \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\hat{n}^L \frac{(-1)^l}{|x|} \sum_{i=0}^{i=l} \frac{(l+i)!}{2^i i! (l-i)!} \frac{\hat{K}_L^{(l-i)}(t - |x|/c)}{c^{l-i} |x|^i} \right] \quad (33)$$

$h_{(1)}^{\mu\nu}$ s'exprime donc par un développement multipolaire ; il en est de même, par induction, de tous les coefficients $h_{(m)}^{\mu\nu}$ et in fine de $M(h^{\mu\nu})$ ³⁰. Mais la pratique de la construction des solutions approchées implique de limiter le développement de $h_{(1)}^{\mu\nu}$ à un certain ordre l_{\max} fini, suffisant pour la précision que l'on veut atteindre.

Le tenseur $h_{(1)}^{\mu\nu}$ étant symétrique n'a que dix composantes indépendantes ; on pourrait donc s'attendre à ce qu'il soit spécifié par dix développements multipolaires. Mais la seconde des équations 25 (condition de jauge harmonique) restreint ce nombre de composantes indépendantes. On montre qu'il suffit de spécifier six ensembles de fonctions³¹, désignés dans la littérature citée par :

$$I_L(u), J_L(u), W_L(u), X_L(u), Y_L(u), Z_L(u), \quad l = 0, 1, 2, \dots, l_{\max} \quad u = t - |x|/c$$

pour déterminer complètement toutes les composantes de $h_{(1)}^{\mu\nu}$ dans leur valeur en un point quelconque (x, t) . Ce sont ces fonctions qu'il est nécessaire de connaître, pour les insérer dans l'expression des $h_{(1)}^{\mu\nu}$ au départ de l'itération et déterminer de façon unique les $h_{(m)}^{\mu\nu}$ ³² jusqu'au degré p voulu.

(28) Celle d'une source isolée émettant depuis un temps fini.

(29) Cf. [15] pour l'équivalence entre les expressions 32 et 33. $\hat{K}^{(l-i)}$ est la dérivée d'ordre $l-i$ de \hat{K} par rapport au temps. Si l'on se limite, dans les coefficients de ce développement multipolaire, aux termes en $1/|x|$, ce qui est suffisant, à grande distance, dans le calcul du signal, $h_{(1)}^{\mu\nu}$ prend la forme

simple « post-Newtonienne » : $\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(-1)^l}{|x|c^l} \left[\hat{n}^L \hat{K}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c) \right]$ Mais n'oublions pas que dans toutes

ces expressions, les termes entre crochets sont eux même des sommes, mettant en jeu les différentes valeurs possibles des indices $i_1 \dots i_l$ formant L .

(30) D'où le nom du formalisme, *multipolar post-Minkowskian expansion*.

(31) *Multipole functions*, cf. [11], section 2.2 et théorème 1.

(32) Qui sont donc eux même, par induction, dépendant des I_L, J_L, \dots

Lien avec la source

L'équation 30 donne la structure générale des solutions pour le champ gravitationnel extérieur³³ ; le lien avec les caractéristiques physiques de la source (répartition spatiale des densités et sa dynamique) qui fixe la solution de façon unique, réside dans la graine $h_{(1)}^{\mu\nu}$ et ses composantes I_L, J_L, \dots jusqu'ici considérés comme indéterminés³⁴.

Ce lien avec la source (solution de *wave generation problem*) mobilise deux points : les lois de conservation (énergie, moment cinétique, ...) se traduisant par $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, et le caractère post-Newtonien de la source. Les calculs s'appuient sur le fait que, *dans la zone extérieure*, $h^{\mu\nu}$ peut être remplacé par son développement multipolaire post-Minkowskien $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ et, *dans la zone proche*, par son développement post-Newtonien $\bar{h}^{\mu\nu}$. Ils s'appuient corrélativement sur la structure commune³⁵ des développements asymptotiques de $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ et de $\bar{h}^{\mu\nu}$, respectivement lorsque la distance à la source tend vers 0 pour le premier et vers ∞ pour le second.

L'équation 30 donne le point de départ du calcul de $h_{(1)}^{\mu\nu}$

$$Gh_{(1)}^{\mu\nu} = \left[\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \right] - \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m v_{(m)}^{\mu\nu} \quad (34)$$

La condition de jauge harmonique $\partial_\nu h_{(1)}^{\mu\nu} = 0$ permet par ailleurs d'écrire :

$$\partial_\nu \left[\sum_{m=2}^{m=\infty} G^m v_{(m)}^{\mu\nu} \right] = \partial_\nu \left[\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \right] \quad (35)$$

La détermination de $h_{(1)}^{\mu\nu}$ s'appuie sur la possibilité d'exprimer la différence $\Delta^{\mu\nu} = \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum G^m u_{(m)}^{\mu\nu}$ en fonction des caractéristiques de la source, *indépendamment de toute hypothèse explicite sur la graine d'itération*. Cette différence $\Delta^{\mu\nu}$ une fois connue, la résolution de l'équation 35 pour obtenir $\sum G^m v_{(m)}^{\mu\nu}$ termine le calcul.

Nous avons, sur la zone extérieure³⁶ :

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(x, t) &\equiv \left[\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \right] (x, t) \\ &= \left[h^{\mu\nu} - \mathcal{F}\mathcal{P}\square_R^{-1} \mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu}) \right] (x, t) \\ &= \left[\mathcal{F}\mathcal{P}\square_R^{-1} \left(\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} - \mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu}) \right) \right] (x, t) \end{aligned} \quad (36)$$

(33) Donc, dans le vide, et aussi à l'infini ; elle résout ainsi *l'asymptotic problem*.

(34) En pratique, seules les deux séries $I_L(u)$ et $J_L(u)$ reflèteront ces propriétés physiques, les quatre autres séries $W_L(u), \dots$ paramétrisant des transformations de jauge.

(35) Structure commune qui assure l'effectivité des opérations *Finite Part* éliminant la divergence des intégrales sur $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(y, u)$ à l'intérieur de la source et celle des intégrales sur $\bar{\tau}^{\mu\nu}(y, u)$ (développement post-Newtonien de $\bar{\tau}$) à l'extérieur de la zone proche.

(36) Cf. [9], Annexe A puis section IV.

Le calcul passe par différentes étapes et mobilise le fait que, sous l'intégrale spatiale $\int dy^3$ intervenant dans $\mathcal{FP}\square_R^{-1}$, on peut remplacer :

1. pour y à l'extérieur de la source, $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(y,u)$ par $\frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\mu\nu}(y,u)$, l'argument de $\mathcal{FP}\square_R^{-1}$ étant alors nul. La valeur de $\Delta^{\mu\nu}(x,t)$ ne dépendra donc que de l'état des choses dans la zone occupée par la source.

2. pour y à l'intérieur de la source, $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(y,u)$ par son expansion asymptotique lorsque $|y| \rightarrow 0$, et, parallèlement, $\tau^{\mu\nu}(y,u)$ par son développement post-Newtonien $\bar{\tau}^{\mu\nu}(y,u)$.

Au terme de ces étapes, on obtient $\Delta^{\mu\nu}(x,t)$ sous la multipolaire :

$$\mathcal{M}(\Delta^{\mu\nu})(x,t) = -\frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{-1^l}{l!} \left[\partial_L \frac{\hat{F}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c)}{|x|} \right] \quad (37)$$

où les fonctions $\hat{F}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c)$ sont des fonctionnelles du développement post-Newtonien $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ et possèdent la structure de moments multipolaires liés à la source³⁷. Elles intègrent donc, à des degrés de précision l de plus en plus fins, la distribution de matière et d'énergie de la source et son évolution dans le temps, ce avec des retards $|x|/c$ dus à la distance.

La résolution de l'équation 35, pour obtenir $\sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$, est possible puisque le membre de droite de l'équation 35, $\partial_\nu \Delta^{\mu\nu}$, est désormais accessible à travers le développement multipolaire de $\Delta^{\mu\nu}$. La procédure de résolution, $\mathcal{U}^{\mu\nu} : \partial_\nu \Delta^{\mu\nu} \rightarrow \sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$, s'interprétant aussi³⁸ comme $\mathcal{U}^{\mu\nu} : -\partial_\nu \sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu} \rightarrow \sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$, définit celle, $\mathcal{U}^{\mu\nu} : -\partial_\nu \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$, que l'on doit utiliser dans l'itération à chaque niveau post-Minkowskien m . Le calcul aboutit à exprimer $\sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$ sous forme de développements multipolaires faisant intervenir également des fonctionnelles sur $\bar{\tau}^{\mu\nu}$.

L'équation 34, réécrite $Gh_{(1)}^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu} - \sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$, donne enfin l'expression de la graine et l'on peut poursuivre les calculs (cf. [9], section IV et V, ou encore [11], théorème 6) jusqu'à l'expression des $I_L(u), J_L(u), \dots$, en fonction du développement post-Newtonien $\bar{\tau}^{\mu\nu}$, jusqu'au degré de précision l voulu.

(37) Pour complétude, leur expression est $\hat{F}_L^{\mu\nu}(u) = \mathcal{FP} \int \dot{y}^L \left[\int_{z=-1}^{z=+1} \bar{\tau}^{\mu\nu}(y, u + z|y|/c) \delta_l(z) dz \right] d^3y$ où $\delta_l(z)$ est une fonction de pondération tendant vers 0 lorsque $|z| \rightarrow 1$. L'opération *Finite Part* contrôle cette fois ci la divergence de l'intégrale lorsque $|y| \rightarrow \infty$. $\hat{F}_L^{\mu\nu}$ est le moment (STF) multipolaire d'ordre l du champ défini par l'intégrale mise entre crochets.

(38) Car $\partial_\nu \Delta^{\mu\nu} = -\partial_\nu \sum G^m \mathcal{U}_{(m)}^{\mu\nu}$, l'itération étant construite afin que $\partial_\nu \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = 0$

Références

- [1] J. Abadie, B. P. Abbott, R. Abbott, M. Abernathy, T. Accadia, F. Acernese, C. Adams, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, and et al. TOPICAL REVIEW : Predictions for the rates of compact binary coalescences observable by ground-based gravitational-wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, **27**(17) :173001, Sept. 2010.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, and et al. Tests of General Relativity with GW150914. *Physical Review Letters*, **116**(22) :221101, June 2016.
- [3] P. Amaro-Seoane, S. Aoudia, S. Babak, P. Binétruy, E. Berti, A. Bohé, C. Caprini, M. Colpi, N. J. Cornish, K. Danzmann, J.-F. Dufaux, J. Gair, I. Hinder, O. Jennrich, P. Jetzer, A. Klein, R. N. Lang, A. Lobo, T. Littenberg, S. T. Mc-Williams, G. Nelemans, A. Petiteau, E. K. Porter, B. F. Schutz, A. Sesana, R. Stebbins, T. Sumner, M. Vallisneri, S. Vitale, M. Volonteri, H. Ward, and B. Wardell. eLISA : Astrophysics and cosmology in the millihertz regime. *GW Notes*, vol. **6**, p. 4-110, 6 :4-110, May 2013.
- [4] K. Belczynski, M. Benacquista, and T. Bulik. Double Compact Objects as Low-frequency Gravitational Wave Sources. *Astrophysical Journal*, **725** :816- 823, Dec. 2010.
- [5] K. Belczynski, V. Kalogera, and T. Bulik. A Comprehensive Study of Binary Compact Objects as Gravitational Wave Sources : Evolutionary Channels, Rates, and Physical Properties. *Astrophysical Journal*, **572** :407-431, June 2002.
- [6] K. Belczynski, V. Kalogera, F. A. Rasio, R. E. Taam, A. Zezas, T. Bulik, T. J. Maccarone, and N. Ivanova. Compact Object Modeling with the StarTrack Population Synthesis Code. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **174** :223- 260, Jan. 2008.
- [7] K. Belczynski, R. E. Taam, V. Kalogera, F. A. Rasio, and T. Bulik. On the Rarity of Double Black Hole Binaries : Consequences for Gravitational Wave Detection. *Astrophysical Journal*, **662** :504-511, June 2007.
- [8] L. Bernard, L. Blanchet, A. Bohé, G. Faye, and S. Marsat. Fokker action of nonspinning compact binaries at the fourth post-Newtonian approximation. *Physical Review D*, **93**(8) :084037, Apr. 2016.
- [9] L. Blanchet. On the multipole expansion of the gravitational field. *Classical and Quantum Gravity*, **15** :1971-1999, July 1998.
- [10] L. Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, **9**, June 2006.
- [11] L. Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, **17** :2, Dec. 2014.

- [12] L. Blanchet and T. Damour. Radiative gravitational fields in general relativity. I - General structure of the field outside the source. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **320** :379–430, Dec. 1986.
- [13] L. Blanchet and G. Faye. General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order. *Physical Review D*, **63**(6) :062005, Mar. 2001.
- [14] L. Blanchet, G. Faye, B. R. Iyer, and B. Joguet. Gravitational-wave inspiral of compact binary systems to 7/2 post-Newtonian order. *Physical Review D*, **65**(6) :061501, Mar. 2002.
- [15] L. Blanchet, G. Faye, and S. Nisanke. Structure of the post-Newtonian expansion in general relativity. *Physical Review D*, **72**(4) :044024, Aug. 2005.
- [16] R. Blandford and S. A. Teukolsky. Arrival-time analysis for a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal*, **205** :580–591, Apr. 1976.
- [17] M. Burgay, N. D'Amico, A. Possenti, R. N. Manchester, A. G. Lyne, B. C. Joshi, M. A. McLaughlin, M. Kramer, J. M. Sarkissian, F. Camilo, V. Kalogera, C. Kim, and D. R. Lorimer. An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system. *Nature*, **426** :531–533, Dec. 2003.
- [18] C. Cutler, T. Apostolatos, L. Bildsten, L. Finn, E. Flanagan, D. Kennefick, D. Markovic, A. Ori, E. Poisson, G. Sussman, and K. Thorne. The last three minutes : Issues in gravitational-wave measurements of coalescing compact binaries. *Phys. Rev. Lett.*, **70** :2984–2987, 1993.
- [19] T. Damour and N. Deruelle. General relativistic celestial mechanics of binary systems i. the post-newtonian motion. *Annales Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **43** :107–132, 1985.
- [20] T. Damour and N. Deruelle. General relativistic celestial mechanics of binary systems ii. the post-newtonian timing formula. *Annales Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **44** :263–292, 1986.
- [21] T. Damour, P. Jaranowski, and G. Schäfer. Equivalence between the ADM- Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post- Newtonian dynamics of compact binaries. *Physical Review D*, **63**(4) :044021, Feb. 2001.
- [22] T. Damour, P. Jaranowski, and G. Schäfer. Nonlocal-in-time action for the fourth post-Newtonian conservative dynamics of two-body systems. *Physical Review D*, **89**(6) :064058, Mar. 2014.
- [23] V. C. de Andrade, L. Blanchet, and G. Faye. Third post-Newtonian dynamics of compact binaries : Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms. *Classical and Quantum Gravity*, **18** :753–778, Mar. 2001.
- [24] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167, 1918.

- [25] A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann. The Gravitational Equations and the Problem of Motion. *Annals of Mathematics*, **39** :65–100, Jan. 1938.
- [26] L. W. Esposito and E. R. Harrison. Properties of the Hulse-Taylor binary pulsar system. *Astrophysical Journal Letters*, **196** :L1, Feb. 1975.
- [27] G. Faye, L. Blanchet, and A. Buonanno. Third Post-Newtonian Spin-orbit Effect in the Gravitational Radiation Flux of Compact Binaries. In G. Auger, P. Binétruy, and E. Plagnol, editors, *9th LISA Symposium*, volume **467** of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 215, Jan. 2013.
- [28] G. Faye, S. Marsat, L. Blanchet, and B. R. Iyer. The third and a half-post-Newtonian gravitational wave quadrupole mode for quasi-circular inspiralling compact binaries. *Classical and Quantum Gravity*, **29**(17) :175004, Sept. 2012.
- [29] S. Foffa and R. Sturani. Effective field theory calculation of conservative binary dynamics at third post-Newtonian order. *Physical Review D*, **84**(4) :044031, Aug. 2011.
- [30] J. R. Gair, M. Vallisneri, S. L. Larson, and J. G. Baker. Testing General Relativity with Low-Frequency, Space-Based Gravitational-Wave Detectors. *Living Reviews in Relativity*, **16**, Sept. 2013.
- [31] R. A. Hulse and H. J. Taylor. Discovery of a Pulsar in a Close Binary System. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume **6** of *Bulletin of The American Astronomical Society*, page 453, Sept. 1974.
- [32] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal Letters*, **195** :L51–L53, Jan. 1975.
- [33] Y. Itoh and T. Futamase. New derivation of a third post-Newtonian equation of motion for relativistic compact binaries without ambiguity. *Physical Review D*, **68**(12) :121501, Dec. 2003.
- [34] P. Jaranowski and G. Schäfer. Binary black-hole problem at the third post-Newtonian approximation in the orbital motion : Static part. *Physical Review D*, **60**(12) :124003, Dec. 1999.
- [35] P. Jaranowski and G. Schäfer. Dimensional regularization of local singularities in the fourth post-Newtonian two-point-mass Hamiltonian. *Physical Review D*, **87**(8) :081503, Apr. 2013.
- [36] V. Kalogera, K. Belczynski, C. Kim, R. O’Shaughnessy, and B. Willems. Formation of double compact objects. *Physics Reports*, **442** :75–108, Apr. 2007.
- [37] V. Kalogera, C. Kim, D. R. Lorimer, M. Burgay, N. D’Amico, A. Possenti, R. N. Manchester, A. G. Lyne, B. C. Joshi, M. A. McLaughlin, M. Kramer, J. M. Sarkissian, and F. Camilo. The Cosmic Coalescence Rates for Double Neutron Star Binaries. *Astrophysical Journal Letters*, **601** :L179–L182, Feb. 2004.
- [38] V. Kalogera, R. Narayan, D. N. Spergel, and J. H. Taylor. The Coalescence Rate of Double Neutron Star Systems. *Astrophysical Journal*, **556** :340–356, July 2001.

- [39] C. Kim, V. Kalogera, and D. R. Lorimer. The Probability Distribution of Binary Pulsar Coalescence Rates. I. Double Neutron Star Systems in the Galactic Field. *Astrophysical Journal*, **584** :985–995, Feb. 2003.
- [40] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit. *Physical Review*, **131** :435–440, July 1963.
- [41] E. Poisson and C. Will. GRAVITY, *Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [42] O. Poujade and L. Blanchet. Post-Newtonian approximation for isolated systems calculated by matched asymptotic expansions. *Physical Review D*, **65**(12) :124020, June 2002.
- [43] J. H. Taylor, R. A. Hulse, L. A. Fowler, G. E. Gullahorn, and J. M. Rankin. Further observations of the binary pulsar PSR 1913+16. *Astrophysical Journal Letters*, **206** :L53–L58, May 1976.
- [44] J. H. Taylor and J. M. Weisberg. A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16. *Astrophysical Journal*, **253** :908–920, Feb. 1982.
- [45] R. V. Wagoner. Test for the existence of gravitational radiation. *Astrophysical Journal Letters*, **196** :L63–L65, Mar. 1975.
- [46] J. M. Weisberg and J. H. Taylor. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis. In F. A. Rasio and I. H. Stairs, editors, *Binary Radio Pulsars*, volume **328** of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 25, July 2005.

3

La première détection d'ondes gravitationnelles

Patrice Hello

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay, CNRS,
IN2P3 et Université de Paris Sud, France

Conférence transcrite par Jean Pierre Treuil, A.E.I.S

Résumé

Le présent chapitre est le dernier de cet ouvrage consacré aux ondes gravitationnelles. Il rappelle le contexte et les circonstances de la première détection des ondes gravitationnelles, le 14 septembre 2015. Il présente les méthodes ayant permis de s'assurer du caractère significatif des signaux perçus. Il dresse un tableau des caractéristiques de l'objet émetteur, le système binaire de trous noirs GW150914 ; il présente enfin quelques enseignements ou questions que ces caractéristiques plutôt inattendues ont d'emblée posés, et évoque les deux autres événements du même type détectés lors de la première période d'observation d'*Advanced LIGO*.

Abstract

Gravitational waves first detection

The present chapter is the last one of this book which is dedicated to gravitational waves. It addresses the context and the circumstances of the first detection of gravitational waves on September 14 2015. It addresses the methods enabling to ensure the significant character of perceived signals. He draws a table of the characteristics of the emitting object, the binary system of black holes GW150914; finally, it presents some teachings or questions which these rather unexpected characteristics have straightaway raised, and it alludes the two other events of the same type which were detected during Advanced LIGO's first period of observation.

1. Le 14 septembre 2015...

Il était 11h 50 heure de Paris. Tout de suite on a su que c'était un évènement important. La figure 1 montre le signal reçu, sur les deux interféromètres LIGO d'Hanford et de Livingston. En moins de 28 centièmes de seconde un signal de 30 Hz se détachait du bruit de fond, croissant en fréquence et en amplitude pour atteindre en 7 cycles un pic d'amplitude de $\approx 10^{-21}$ sur une fréquence de 275 Hz (cf. figure 1). Cette détection a eu lieu durant la première période d'observations ouverte pour d'*Advanced LIGO*, qui s'est achevée le 12 janvier 2016. Dans le réseau mondial des détecteurs d'ondes gravitationnelles, seuls les deux détecteurs LIGO étaient alors en capacité opérationnelle de détection : aucune triangulation, seule à même de déterminer précisément la localisation angulaire de l'émetteur, n'était possible. Cependant, la différence entre les temps d'arrivée des signaux sur les deux détecteurs (distants de 1000 km environ) et la configuration des lobes d'antennes associés à ces détecteurs permettent de situer l'émetteur dans une zone d'environ 600 deg^2 .

L'évènement était d'emblée jugé intéressant eu égard à la fréquence atteinte et sa dynamique : la fréquence moyenne observée de $f = 150 \text{ Hz}$ correspond en effet à une fréquence orbitale du système moitié moindre, soit 75 Hz . Par le seul jeu de la troisième loi de Képler, cette fréquence orbitale donnait l'ordre de grandeur de la distance entre les deux compagnons. Par ailleurs l'équation, issue de la relativité générale, reliant la fréquence observée et sa dynamique $\dot{f} = df/dt$ d'une part, aux masses du système binaire en jeu d'autre part, savoir :

$$\frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left[\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right]^{3/5}$$

imposait une masse totale du système $\geq 70 M_\odot$, et bien plus grande encore en cas de déséquilibre important entre les masses des deux compagnons ; ces seules données sélectionnaient un couple de trous noirs binaires comme le seul système d'objets compacts pouvant orbiter sans se toucher à la fréquence de 75 Hz .

2. Extraction et validation du signal

Bien sûr, l'annonce d'un tel évènement scientifique et de son interprétation se devait d'être entourée de toutes les garanties : il fallait vérifier que le signal reçu ne pouvait être mis en relation avec aucune cause surgie dans l'environnement des détecteurs et qui aurait été repérée ; il fallait également que le signal ne puisse être attribué raisonnablement à un effet de hasard surgissant du bruit de fond des détecteurs. Pour ce faire plusieurs techniques ont été mises en œuvre.

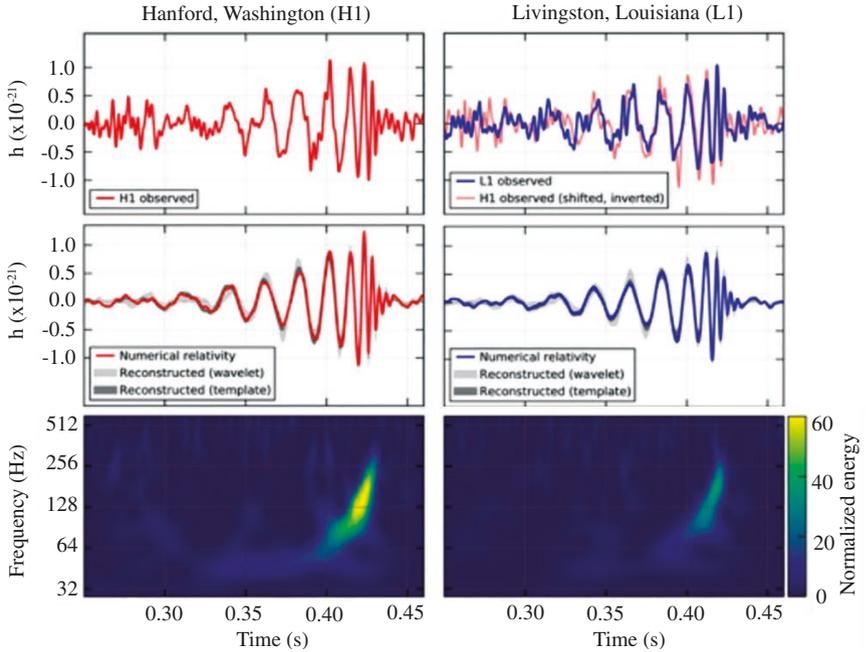


Figure 1. Signaux reçus par les détecteurs LIGO, le 14/09/2015, à 9 h 50 UTC. De haut en bas : signaux bruts ; ajustements par ondelettes et aux calques théoriques ; fréquence en fonction du temps. Figure partiellement reproduite de Abbott et al. [4]

2.1 Élimination de causes externes

Les sites d'Hanford et de Livingston sont équipés d'instruments spécialisés dans le repérage et la mesure de perturbations pouvant être confondues, dans leurs conséquences sur les détecteurs, avec les signaux recherchés : perturbations magnétiques, électromagnétiques (fréquences radio), acoustiques et autres phénomènes vibratoires ; la conclusion a été que si la séquence du signal observée, dans sa forme et son amplitude, avait été causée par l'une de ces perturbations externes, ces instruments de mesures l'auraient obligatoirement détectée. Ce qui n'a pas été le cas. De même que n'a été détectée aucune corrélation entre les données fournies par les instruments des deux sites.

2.2 La recherche de coïncidences

Le principe repose sur la notion d'*événement candidat*. Un tel événement est identifié au repérage d'une corrélation entre les signaux reçus respectivement sur Hanford et sur Livingston, avec un décalage éventuel compatible avec le temps de propagation d'une onde gravitationnelle d'un site à l'autre, temps de propagation de l'ordre de 10 ms. Des contraintes supplémentaires sont cependant imposées, venant filtrer la forme des

séquences de signaux susceptibles d'être examinées. Dans cette idée, deux méthodes sont parallèlement mises en œuvre :

1. Dans la première (*generic transient search*), ces contraintes sont minimales et se résument à la coïncidence - avec le décalage inter-site autorisé - d'un excès momentané de puissance du signal sur une certaine bande de fréquence.
2. Dans la seconde (*Binary coalescence search*), les séquences sont filtrées par des modèles (*templates*), des *calques*, conformes aux prédictions de la relativité générale quand aux signaux gravitationnels émis lors de la coalescence de systèmes binaires.

Dans les deux cas, un indice d'évidence (ou de netteté) de l'évènement - s'apparentant à un rapport signal sur bruit - est calculé sur une échelle commune (*detection statistic*), indice η_c pour la première méthode, $\hat{\rho}_c$ pour la seconde ; le caractère significatif de l'évènement candidat est ensuite apprécié par la fréquence à laquelle le bruit de fond peut produire des évènements - des *fausses alarmes* - ayant un indice de valeur égale ou supérieure. Lorsque cette fréquence est élevée, l'évènement candidat sera peu significatif, car il a toute chance d'être une fausse alarme. Lorsque cette fréquence est très faible (lorsque le taux de fausses alarmes atteignant au moins cet indice est très faible), l'évènement candidat sera retenu comme significatif. Il s'agit là d'un schéma général, décliné en différentes variantes destinées à renforcer la confiance dans le ou les évènements retenus (cf. [4] déjà cité).

2.3 Evaluation de l'évènement GW150914

Les deux approches - *generic transient search* et *Binary coalescence search* - ont été utilisées lors de la détection de GW150914 et ont fourni des résultats très proches. La seconde approche est elle-même implémentée dans deux enchaînements d'algorithmes temps réel, deux *pipelines* indépendants, respectivement dénommés PyCBC et Gst-LAL [3, 2]. Ces deux *pipelines* partagent un même ensemble de calques.

2.3.1 La construction des calques

Les calques de signaux gravitationnels théoriques, mis en corrélation avec les signaux reçus sont construits en associant trois approches : développements analytiques post-Newtonniens, pour la phase spiralante du processus (*inspiralling phase*), « relativité numérique », pour les derniers cycles et la fusion proprement dite (*merger phase*), enfin applications de la théorie des perturbations, en fin de séquence (*ringdown phase*). De gros progrès ont été faits, notamment en relativité numérique, et les configurations de signaux produits par ces trois approches se raccordent très bien. Naturellement il faut disposer d'une population de calques reflétant bien la diversité des systèmes émetteurs. C'est ainsi que pour couvrir l'espace des paramètres concernés, quelques 250 000 calques ont été utilisés.

2.3.2 Les algorithmes

Abordons brièvement la structure et le fonctionnement du *pipeline* PyCBC (cf. [6]). Le signal recueilli dans chaque détecteur est une série discrète $s(t_j)$. Le pas de l'échantillonnage est de 1/4096 secondes. A chaque instant t_j , pour chaque calque et chaque détecteur, est calculé un rapport signal sur bruit (SNR) $\rho(t_j)$. Ce calcul - basé sur la transformée de Fourier rapide - intègre les valeurs du signal prise sur une fenêtre rétrospective de 256 secondes, ainsi que la densité spectrale du calque considéré. La densité spectrale du bruit du détecteur, qui intervient également dans le calcul, est réévaluée périodiquement. Diverses procédures d'élimination, d'application de seuils et de repérages de maxima, isolent alors des événements potentiels, ou *triggers*, liés à des instants où un signal significatif peut être présent. Mais ces *triggers* ne sont pas encore des *événements candidats* ; pour en être ils doivent passer un certain test de χ^2 évaluant de façon plus précise leur conformité aux calques auxquels ils sont associés ; ils doivent ensuite satisfaire le test de coïncidence, savoir l'existence de leur correspondant exact (mêmes calques avec les mêmes valeurs de paramètres) dans l'autre détecteur, dans un intervalle de temps d'au plus 10 ms. Si tous ces tests sont positifs, la paire de *triggers* co-incidents est alors retenue comme événement candidat et se voit attribuer un SNR définitif $\hat{\rho}_c$ combinant les SNR initiaux sur chacun des détecteurs, atténués respectivement, s'il y a lieu, d'un facteur correctif lié aux résultats des tests du χ^2 . C'est ce SNR définitif qui, mit en rapport avec l'estimation du taux de fausses alarmes pour une valeur $\hat{\rho}_c$ donnée, détermine si l'événement candidat doit être effectivement considéré comme significatif du passage d'un train d'ondes gravitationnelles.

2.3.3 Estimation du taux de fausses alarmes

Les fausses alarmes sont des configurations de signaux qui - de par leur puissance - pourraient être interprétées comme la manifestation du passage d'ondes gravitationnelles, alors qu'elles ne sont que la production aléatoire du bruit des détecteurs. Lorsque les propriétés de ce bruit sont stables dans le temps et connues, par exemple - un bruit stationnaire gaussien - il est possible de calculer les taux de fausses alarmes en fonction de l'excès de puissance qui leur est associé. Et donc de calculer la probabilité que tel événement observé soit une fausse alarme. Mais le bruit des détecteurs n'est ni stationnaire ni gaussien. Il n'est par ailleurs pas possible de séparer, *a priori*, le bruit de fond d'un détecteur d'éventuels signaux gravitationnels. Il faut donc procéder empiriquement. La méthode adoptée dans le *pipeline* PyCBC consiste, dans son principe, à décaler la séquence des *triggers* identifiés sur l'un des détecteurs d'un intervalle de temps choisi aléatoirement, mais bien supérieur à 10 ms, et ensuite à dresser la statistique des co-incidences avec les *triggers* identifiés sur l'autre détecteur. De telles co-incidences - *background events* - ne peuvent être bien sûr que le fruit du hasard. Reproduire cette procédure un grand nombre de fois revient à simuler une très longue durée d'observation de deux séries temporelles indépendantes et de pouvoir ainsi déterminer la fréquence de co-incidences fortuites en fonction du SNR qui leur correspond. Ainsi, lors des analyses liées à la détection de GW150914, cette durée d'observation simulée du bruit des deux détecteurs a été de 608 000 ans.

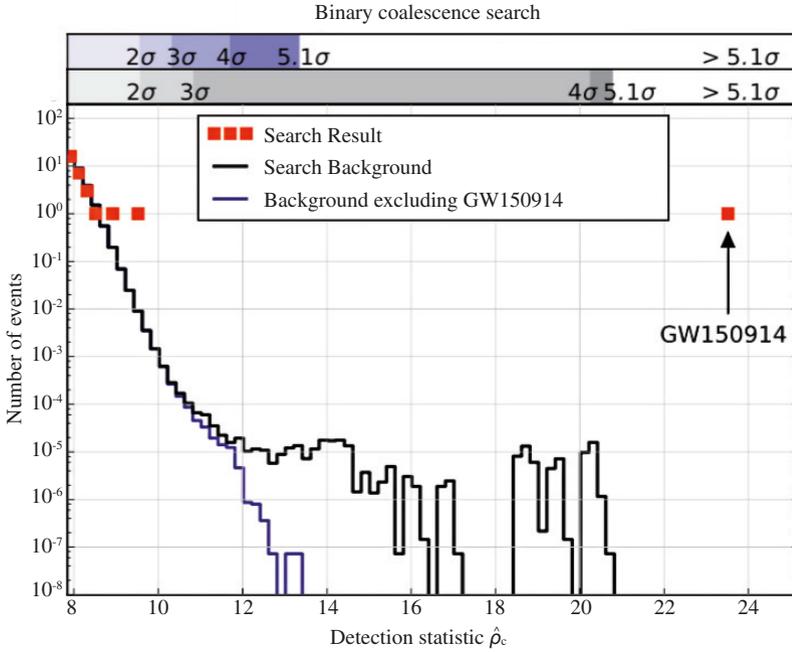


Figure 2. Positionnement de l'évènement GW150914 sur un diagramme de fréquence des fausses alarmes. Figure reproduite de Abbott et al. [4].

2.3.4 Résultats

La figure 2 présente les résultats obtenus par le *pipeline* PyCBC. La courbe noire¹ représente le nombre moyen de *background events* - calculé par la méthode empirique décrite précédemment - par tranche de valeurs du rapport signal sur bruit (*detection statistics* $\hat{\rho}_c$) associé, sur 16 jours de prises de données effectives. Les points de couleur orange représentent les évènements candidats identifiés par le *pipeline* - donc satisfaisant notamment à la condition de co-incidence : une dizaine d'évènements avec $\hat{\rho} \approx 8$, ... un évènement candidat avec $9 < \hat{\rho}_c < 10$, enfin l'évènement GW150914 se détachant loin sur la droite avec $\hat{\rho}_c = 23.6$, une valeur supérieure à tous les *background events* détectés sur la durée simulée. Avec ces résultats, cette valeur de $\hat{\rho}_c$ ne peut être celle d'une fausse alarme que moins d'une fois sur 203 000 ans (cf. [4]).

(1) La courbe bleue, quant à elle, représente la statistique des *background events* obtenue par la méthode utilisée pour la courbe noire, mais après que l'on ait éliminé, dans la série des *triggers*, ceux correspondant à l'évènement GW150914 ; ce dernier, reconnu comme significatif d'un évènement astrophysique, n'entre donc plus dans l'estimation du bruit de fond ; la probabilité que ce dernier puisse produire (par le fait du hasard) des *triggers* de fort rapport signal sur bruit s'en trouve donc naturellement fortement diminuée.

3. Données recueillies et premiers enseignements

L'annonce officielle de la première détection d'ondes gravitationnelles a été accompagnée - pratiquement le jour même du 11 février - de publications sur les données recueillies (cf. [4] déjà cité) et les premiers enseignements astrophysiques que l'on pouvait tirer de ces données [1].

3.1 Caractéristiques du système

Le calque attaché à l'évènement candidat retenu comme significatif, de part sa position dans l'espace des paramètres des 250 000 calques possibles, permet de remonter aux caractéristiques du système émetteur. C'est ainsi qu'ont pu être mesurées (cf. [4]) masses, distances et énergie rayonnée.

Masses. Les masses initiales des deux trous noirs - au début de la phase spiralante - sont respectivement égales à $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$ pour le trou noir le plus massif, et à $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$ pour son compagnon ; les barres d'erreurs sont donc de l'ordre de 14 % en plus ou en moins. La masse du trou noir final est de $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$ et son spin, $0.67_{-0.07}^{+0.05}$. Il s'agit donc un trou noir de Kerr de spin non maximal. Il existe par ailleurs des contraintes sur les valeurs des spins individuels, mais ces derniers n'ont pu être complètement déterminés. C'eût été possible si le détecteur *VIRGO* avait été opérationnel lors de l'évènement.

Distances. Le redshift du système est $z = 0.09_{-0.04}^{+0.03}$, correspondant à une distance luminosité de $410_{-180}^{+160} \text{ Mpc}$: une distance déjà grande, mais non encore « cosmologique ». En comparaison, la distance séparant les deux compagnons au début de la coalescence est infinitésimale : 990 km.

Energie rayonnée. La différence entre la somme des masses initiales et la masse finale, soit $3 M_{\odot}$ correspond à l'énergie totale transmise par le train d'ondes gravitationnelles. Rapportée à la durée de la coalescence dans le repère temporel des détecteurs, soit 0.28 s mesurée sur le train d'ondes à partir de la fréquence de 30 Hz, cette énergie est libérée dans un flash d'une puissance de 10^{55} erg/s , avec un pic de luminosité de l'ordre de $3.6 \cdot 10^{56} \text{ erg/s}$, ce qui en fait le phénomène le plus lumineux jamais observé.

3.2 Premiers enseignements

Les signaux et données recueillies sur GW150914 sont compatibles avec les équations d'Einstein de la relativité générale, les approximations analytiques post-Newtoniennes et les méthodes numériques mises en œuvre dans leur analyse ; ce avec les champs gravitationnels intenses régnant dans un système de deux trous noirs de quelques dizaines de masses solaires distants d'à peine 1000 km (cf. [5]). Cependant ces données ne sont pas sans apporter des surprises, et donc poser des questions, auxquelles les détections à venir apporteront peut-être des débuts de réponse.

La masse des trous noirs stellaires. L'évènement GW150914 peut être vu comme la première mise en évidence *directe* de l'existence de trous noirs stellaires. Cependant, cette existence était déjà établie, de façon indirecte, par l'analyse du comportement de systèmes binaires émetteurs de rayons X (les 22 *Black Hole X ray Binaries* identifiées de façon sûre, dans la galaxie et l'univers proche). Les masses des trous noirs en jeu dans de tels systèmes, lorsque connues avec certitude, se situent toutes dans une gamme de $5 - 10 M_{\odot}$ (cf. [1]). Les masses des trous noirs impliqués dans GW150914, qui se situent au delà de ces fourchettes, sont donc plutôt inattendues. Cette surprise va donc relancer toute la réflexion sur les processus générant les trous noirs stellaires, à partir de progéniteurs isolés ou composants de systèmes binaires, et l'influence que peut avoir sur l'issue de ces processus différents facteurs tels que la densité de l'environnement immédiat du progéniteur ou sa métallicité.

Le délai précédant la coalescence. L'évènement GW150914 fournit la preuve que la coalescence d'un système binaire de trous noirs stellaires peut se produire dans un temps fini, inférieur au *temps de Hubble*. Mais la distance à laquelle a lieu cette coalescence fait de GW150914 un évènement de l'univers relativement proche, donc un évènement relativement récent. Cette constatation laisse une grande marge quant au délai qui a pu s'écouler entre la formation même du système binaire et sa coalescence : quelles hypothèses doit-t-on privilégier : un délai court - de l'ordre de la dizaine ou de la centaine de millions d'années, ou bien un délai long, de l'ordre de la dizaine de milliard d'années. Ici encore, les conditions présidant à la formation du système (environnement, métallicité) semblent jouer un rôle important.

L'estimation des taux d'occurrence. De nombreux modèles - *population synthesis models*, cf. chapitre précédent - ont été élaborés pour estimer le taux de formation de systèmes binaires de trous noirs - BBH, *Binaries Black Holes* - puis le taux d'occurrence de leur coalescence et, *in fine* estimer les taux annuels de détection que l'on pouvait espérer. Ces modèles ont donné des résultats compatibles avec l'absence de détection constatée sur les anciennes versions des détecteurs LIGO, mais cependant très incertains et pour certains d'entre eux, plutôt pessimistes : la question de la survenance de tels évènements sur une durée correspondant à l'âge de l'Univers pouvait se poser (cf. [1]). L'évènement GW150914 change évidemment la donne, et fournit un premier point d'appui pour une estimation statistique des taux d'occurrences de tels évènements, comme on a pu le faire pour la coalescence de systèmes de pulsars binaires.

Et maintenant... L'histoire ne s'arrête pas à GW150914. Lors de la même période d'observation effective des détecteurs LIGO - *the first Advanced LIGO Observation Run*, du 12 septembre 2015 au 19 janvier 2016 [2] - déjà un autre évènement candidat a pu être associé de façon sûre (taux de fausse alarme annuel inférieur à $6.0 \cdot 10^{-7}$) à une coalescence de couples de trous noirs stellaires. Cet évènement, GW151226, a eu lieu le 26 décembre 2015. Un troisième évènement candidat, LVT151012, a été observé le 12 octobre 2015, ne présente pas, de loin, le même degré de confiance pour être interprété comme le passage d'un train d'ondes gravitationnelles. Il semble cependant que la probabilité pour qu'il en soit ainsi soit plus forte que celle d'un évènement aléatoire lié aux détecteurs ou à leur environnement. Aussi bien, pour cet évènement candidat, a-t-on également calculé les caractéristiques des deux trous noirs en jeu, si la nature astrophysique de l'évènement se trouvait bien confirmée.

Références

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari et al. Astrophysical Implications of the Binary Black-hole Merger GW150914. *Astrophysical Journal Letters*, **818**: L22, Feb. 2016.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari et al. Binary Black Hole Mergers in the First Advanced LIGO Observing Run. *Physical Review X*, **6**(4): 041015, Oct. 2016.
- [3] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari et al. GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO. *Physical Review D*, **93**(12): 122003, June 2016.
- [4] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, **116**(6): 061102, Feb. 2016.
- [5] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari et al. Tests of General Relativity with GW150914. *Physical Review Letters*, **116**(22): 221101, June 2016.
- [6] S. A. Usman, A. H. Nitz, I. W. Harry, C. M. Biwer, D. A. Brown, M. Cabero, C. D. Capano, T. Dal Canton, T. Dent, S. Fairhurst, M. S. Kehl, D. Keppel, B. Krishnan, A. Lenon, A. Lundgren, A. B. Nielsen, L. P. Pekowsky, H. P. Pfeiffer, P. R. Saulson, M. West et J. L. Willis. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence. *Classical and Quantum Gravity*, **33**(21): 215004, Nov. 2016.

4

Lentilles gravitationnelles faibles : applications en cosmologie

Jean-Pierre Treuil

A.E.I.S

Résumé

Les effets de lentilles gravitationnelles faibles modifient à la marge les *redshifts*, les positions angulaires et la forme des galaxies. Mais par le biais de ces modifications, ils apportent en même temps des informations sur le contenu matériel et la structure géométrique des espaces traversés. C'est ce second aspect que les astrophysiciens tentent d'exploiter, notamment pour accéder à la partie invisible de ce contenu, telle la matière noire, et en construire des cartographies. Ce chapitre rappelle d'abord, dans l'histoire récente de la cosmologie, l'attention de plus en plus forte portée au contenu matériel, ses multiples composantes et sa distribution dans l'Espace-Temps. Il introduit ensuite les outils d'analyse des effets de lentilles dans leur lien avec la Relativité Générale : équation des géodésiques, équation de déviation géodésique, matrice de Jacobi et distance angulaire, équation de Sachs, convergence et cisaillement. Il aborde enfin l'utilisation potentielle de ces outils sur trois questions : la question des lois reliant la distribution du contenu matériel à la structure du potentiel gravitationnel, dans le contexte d'un modèle d'univers Friedmann-Lemaître faiblement perturbé ; la question de l'isotropie de l'univers, à travers l'analyse de la structure du cisaillement dans un modèle d'univers non isotrope ; la question de la pertinence de modèles continus de répartition de la matière dans l'Espace-Temps, comparée à celle de modèles discontinus de cette répartition.

Abstract

Weak gravitational lensing: cosmological applications

Impacts of weak gravitational lensing modify the redshifts on margin, the angular positions and shape of galaxies. But through these modifications they bring at the same time information on the material contents and geometrical structure of traversed spaces. Astrophysicists try to make the most of this second aspect, particularly in order to reach the invisible part of universe content, such as dark matter, and to build cartographies. This chapter first recalls, in recent cosmological history, the more and more strong attention given to the material content, its multiple components and its distribution in the Time-Space continuum. Then, it introduces the tools of analysis of the effects of lenses in relation with General Relativity: geodesic equations, geodesic deviation equation, Jacobi matrix, and angular distance, Sachs equation, convergence and shear. Finally, it approaches the potential use of these tools for three questions: the question of the laws relating the distribution of the material content to the structure of the gravitational potential within the context of the model of a weakly disrupted Friedmann-Lemaître universe; the question of the isotropy of the universe through the analysis of the shear structure inside a non isotropic universe; the question of the relevance of continuous models of matter distribution in Time-Space compared to the relevance of discontinuous models of this distribution.

Note

Ce chapitre a été rédigé à partir de la conférence de Jean-Philippe Uzan et relu par le conférencier. Le détail de cette transcription n'engage cependant que la responsabilité du rédacteur.

I. Introduction

L'histoire de la cosmologie, l'histoire de notre relation avec l'Univers, est aussi longue que celle de notre conception du vide. Pour beaucoup cependant, la cosmologie scientifique commence avec la relativité générale [1]. C'est en effet la première théorie qui nous permette d'aborder la structure de l'Espace et du Temps et sa relation avec la matière : les équations d'Einstein relient la géométrie de l'Espace-Temps, exprimée par le tenseur d'Einstein G , fonction en chaque point du champ métrique g , au contenu matériel, exprimé par le tenseur Energie-Impulsion T :

$$G_{\mu\nu}(g) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

(1) En faisant ici abstraction du terme lié à la constante cosmologie Λ .

I.1 Une attention déportée vers le contenu matériel

Initialement, l'attention s'est portée sur les solutions aux équations d'Einstein, dans le vide ou dans le cas d'un univers homogène et isotrope ; cette attention s'est donc focalisée sur la géométrie de ces univers très « simples ». Mais les grandes avancées sont venues dès lors que l'on a commencé à s'intéresser à la nature du contenu et à sa distribution effective : on ne travaille plus alors sur un Univers vide, mais sur un Univers rempli de matière répartie de façon complexe.

Il n'est donc pas étonnant que les développements de la cosmologie aient été en phase avec ceux de la physique. Par exemple, le développement de la physique nucléaire a posé la question du comportement des populations de particules dans un univers en expansion ; on a pu comprendre ainsi les phénomènes de nucléosynthèse primordiale ou encore l'existence du fond diffus cosmologique ; autre exemple, les développements de la physique quantique ont amené la question du couplage des effets quantiques avec la géométrie de l'Espace-Temps, même sans aller jusqu'à la gravité quantique, simplement du point de vue de la théorie quantique des champs : de telles considérations sont à la base des théories de l'inflation ; dernier exemple, celui des neutrinos, pour lesquelles certaines indications montrent qu'ils sont massifs : nous sommes obligés d'inclure des neutrinos massifs dans notre cosmologie. A chaque fois qu'interviennent en Physique de nouveaux phénomènes, de nouvelles propriétés, les modèles cosmologiques se doivent d'inclure ces nouveaux éléments pour avoir une meilleure description de l'Univers, pour en obtenir une image qui soit la plus cohérente avec ce que la Physique locale nous apprend.

I.2 La construction de modèles d'Univers et ses difficultés

La construction de modèles d'Univers mobilise les équations d'Einstein (et les solutions approximatives que l'on peut en déduire), et un ensemble de connaissances sur le contenu matériel. Deux limitations apparaissent dans cette entreprise. La première, est que l'accès à la distribution de ce contenu est restreint à une section particulière de l'Espace-Temps. Ce contenu est en effet, pour l'essentiel, celui de notre cône de lumière passée ; en complément, celui que nous appréhendons directement sur notre propre ligne d'Univers, par exemple à travers les mesures d'abondance que nous pouvons effectuer sur Terre et dans le Système Solaire. Même si les informations obtenues par l'analyse des rayonnements électromagnétiques et les mesures d'abondance étaient complètes et parfaites, cela ne suffirait pas pour reconstruire la géométrie de notre Espace-Temps, car il peut y avoir plusieurs Espace-Temps ayant la même structure sur cette section particulière. La seconde limitation est que l'information parfaite n'existe pas : même sur cette section accessible, il y a toujours de la matière que l'on ne voit pas. Prenons l'exemple des galaxies et leur répartition sur une échelle de luminosité : plus on regarde loin vers les hauts *redshifts*, plus il y aura de galaxies trop peu lumineuses pour être encore vues à ces distances lointaines.

Le problème qu'il faut résoudre est classique mais particulièrement présent en Cosmologie : trouver la meilleure solution compatible avec ce que l'on connaît, avec toutes les incomplétudes et les incertitudes rencontrées.

I.3 Une information affectée par les milieux traversés

Une très grande part de notre information sur l'univers provient, on vient de le dire, de l'information apportée par la Lumière. Or ce vecteur d'information est affecté par les milieux traversés.

C'est déjà le cas en physique Newtonnienne. Certes, dans le vide, la lumière s'y propage en ligne droite, c'est un fait que l'on peut retrouver à partir des équations de Maxwell de propagation des ondes électromagnétiques, en prenant la « limite eikonale » de ces équations². Mais pour des milieux d'indice lentement variables, ces mêmes équations eikonales aboutissent à des rayons lumineux formant des lignes courbes, et rendent ainsi compte de phénomènes bien connus comme les mirages.

En relativité générale, on retrouve une situation analogue : l'électromagnétisme y est toujours décrit par les équations de Maxwell, équations dont on peut prendre la même limite eikonale pour se placer à l'échelle de l'optique géométrique. Les rayons lumineux sont alors des géodésiques de l'Espace-Temps, « courbées » par le champ gravitationnel³.

La figure 1 illustre le cas d'un rayon lumineux émanant d'une source lointaine et dévié par la présence d'un corps massif ponctuel. Ce rayon lumineux subit une *déviaton angulaire totale* a fonction de la masse du corps M et du *paramètre d'impact* b , distance à laquelle il passerait au plus près du corps en l'absence de déviation. En notant R la distance minimale *effective*, la déviation angulaire a est sous certaines conditions donnée par :

$$a = \frac{4GM}{c^2 R} \text{ avec } R \approx b \left(1 - \frac{GM}{bc} \right) \quad (2)$$

Ce que la figure 1 souligne dans ce contexte très simple, est que, dans la confrontation d'un modèle d'Univers avec les observations, il faut constamment garder à l'esprit le fait suivant, qui entraîne en pratique des difficultés techniques ayant nécessité, pour être surmontées, des années de recherche : pour induire, à partir des données observées, un modèle hypothétique de distribution de la matière dans l'Espace-Temps il faut tenir compte simultanément :

(2) La limite eikonale des équations de Maxwell se construit en faisant tendre vers 0 la longueur d'onde λ du rayonnement. Elle est valide lorsque λ est négligeable devant les longueurs caractéristiques des variations du milieu que les ondes traversent, par exemple lorsque l'indice de réfraction varie lentement d'un point à un autre. Cette limite permet le passage des notions d'ondes et de fronts d'onde, aux notions de rayons et de faisceaux lumineux, notions à la base de l'optique géométrique.

(3) Rappelons ici que dans une géométrie non-euclidienne, définir une ligne « droite » n'est pas simple. Une manière de le faire est de partir de la propriété de la droite euclidienne de pouvoir glisser sur elle même : la généralisation de cette propriété suppose de structurer l'espace considéré par une *connexion affine* ; les « lignes droites » sont alors les courbes *autoparallèles* de cette connexion. Une autre manière est de généraliser la propriété de la droite euclidienne de définir le plus court chemin entre deux points : la généralisation de cette propriété suppose d'introduire sur le même espace une *métrique* ; les « lignes droites » sont alors les courbes de plus courts chemins évalués selon cette métrique, les *géodésiques*. Ces deux procédés conduisent aux mêmes courbes, donc à la fois auto-parallèles et géodésiques, dès lors qu'en chaque point de l'espace les coefficients de la connexion affine sont choisis égaux à des coefficients déduits de la métrique et de ses dérivées partielles, les *symboles de Christoffel*.

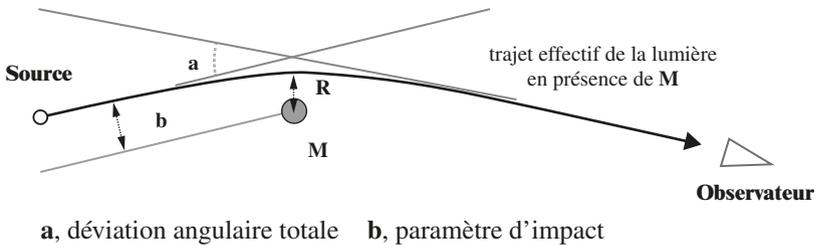


Figure 1. Schéma de la déviation d'un rayon lumineux par une masse ponctuelle, illustrant la relation entre la déviation angulaire totale a , la masse M du corps déviant et le paramètre d'impact b . Attention à la distorsion d'échelle : en réalité, la distance OS entre l'observateur et la source est très grande devant b : sources, corps déviant et observateur sont approximativement alignés. Figure construite à partir de celle fournie par le conférencier.

1. des contraintes que ce modèle hypothétique impose à la distribution effective de matière ;
2. des biais que, de par la distorsion relativiste des rayons lumineux, cette distribution entraîne dans l'information parvenant à l'observateur.

Cependant, et c'est ce que nous rappelons dans ce chapitre, ces effets de distorsion sont également un instrument de connaissance : dès lors qu'ils sont repérables et quantifiables, leur lien avec la distribution de la matière permet de remonter de leur mesure aux caractéristiques statistiques de cette distribution, et même à sa cartographie⁴. Parallèlement et indépendamment, leur lien avec la structure géométrique de l'Espace-Temps permet d'affiner le degré de certitude de certaines hypothèses, comme celle de l'isotropie de l'Univers.

2. Effets de lentilles gravitationnelles : bases de la théorie

Les mesures de positions et de distances des sources lumineuses, l'appréciation de leur forme sont donc tributaires des conditions dans lesquelles se propagent les rayons lumineux. Ces deux types d'effets (biais sur les mesures de positions et de distances, distorsions des formes) sont appréhendés respectivement par deux types d'équations : l'équation géodésique et l'équation de déviation géodésique.

(4) Y compris celle de la matière invisible, comme la matière noire.

2.1 L'équation géodésique

L'équation géodésique détermine la trajectoire dans l'Espace-Temps des photons émanant de la source et parvenant à l'observateur ; autrement dit la *ligne d'univers*, $x^\mu(v)$, $v_{em} \leq v \leq v_{rec}$, de ces photons, entre leur émission (coordonnées spatio-temporelles $x^\mu(v_{em})$) et leur réception (coordonnées spatio-temporelles $x^\mu(v_{rec})$). Les conditions imposées pour que cette ligne d'univers soit une géodésique, s'écrivent, pour tout point P de coordonnées $x^\mu(v)$ ⁵, sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre :

$$\frac{d^2}{dv^2}x^\mu + \{\mu_{\nu\rho}\} \frac{d}{dv}x^\nu \frac{d}{dv}x^\rho = 0 \quad (3)$$

où les coefficients $\{\mu_{\nu\rho}\}$ (symboles de Christoffel) se calculent à partir des composantes, prises sur P , de la métrique $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées partielles du premier ordre. C'est par leur intermédiaire, puis par les équations d'Einstein, que la ligne d'Univers des photons considérés dépend du contenu matériel des milieux traversés.

Mais il s'agit de photons, et non de particules massives en chute libre : la quantité $g_{\mu\nu} \frac{d}{dp}x^\mu \frac{d}{dp}x^\nu$, constante le long des géodésiques, a pour valeur 0 : c'est une géodésique nulle encore appelée géodésique *lumière*. Une autre façon de formuler l'équation géodésique est de poser $k^\mu = \frac{d}{dp}x^\mu$ (k^μ , quadri-vecteur d'onde) : l'équation devient :

$$\frac{d}{dp}k^\mu + \{\mu_{\nu\rho}\} k^\nu k^\rho = 0$$

la condition de géodésique nulle devenant de son coté $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$

2.2 L'équation de déviation géodésique

L'équation de déviation géodésique contrôle, dans l'Espace-Temps, l'évolution de l'écart quadri-vectorel entre deux géodésiques proches émanant de - ou convergeant sur - un même point. C'est le second contexte, celui de la convergence vers un observateur - qui nous intéresse particulièrement ici (cf. figure 2), le caractère proche des deux géodésiques s'inscrivant dans la petitesse de l'angle qu'elles forment lorsqu'elles se rencontrent sur l'observateur.

Pour poser cette équation, une des géodésiques est prise comme référence et ses positions successives P sont repérées par les valeurs v d'un paramètre affine ; l'écart

(5) L'écriture de l'équation géodésique sous sa forme 3 n'est toutefois valide que si la paramétrisation de la trajectoire (les fonctions $x^\mu(v)$ associant dans un référentiel donné une valeur du paramètre v à un point P de la trajectoire) est une paramétrisation *affine* ; c'est à dire possédant, en tout point P , la propriété suivante, déduite du principe d'équivalence : dans un référentiel x^μ *localement inertiel* en P , référentiel dans lequel, par définition, la matrice représentant la métrique au point P s'identifie à la matrice de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, l'équation de la trajectoire vérifie sur ce même point, $\frac{d^2}{dv^2}x^\mu = 0$. Dès lors que la paramétrisation est affine, l'écriture 3 de l'équation géodésique est valide pour tout système de référence.

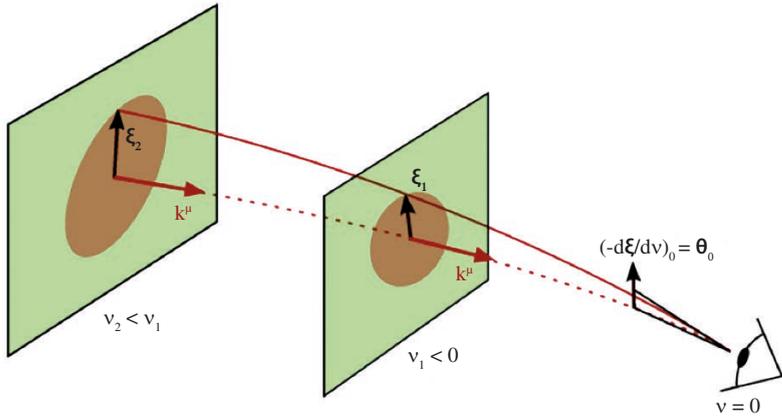


Figure 2. Schéma illustrant les grandeurs mobilisées dans l'équation de déviation géodésique. La ligne en pointillé représente la géodésique de référence ; celle en train pleine la seconde géodésique (un second rayon lumineux), dont on suit l'écart $\xi(v)$ d'avec la première. Figure fournie par le conférencier.

entre une position P et l'autre géodésique est un quadri-vecteur noté $\xi(v)$, quadri-vecteur que l'on considérera ici pris en P dans un plan orthogonal à la géodésique de référence⁶. L'équation de déviation géodésique s'écrit dans ces conditions :

$$\frac{d^2}{dv^2} \xi^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} k^\nu k^\alpha \xi^\beta \tag{4}$$

C'est un système d'équations différentielles du second ordre donnant l'accélération⁷ du quadri-vecteur $\xi(v)$, de coordonnées $\xi^\mu(v)$, $\mu \in [0, 1, 2, 3]$ dans le référentiel choisi. Sur chaque position P de la géodésique de référence, cette accélération $\frac{d^2}{dv^2} \xi^\mu$ dépend du quadri-vecteur $k^\mu(v)$ associé au rayon lumineux (lequel quadri-vecteur, inclut la direction spatiale k^i , $i = 1, 2, 3$ du rayon). Elle dépend également du *tenseur de courbure* de l'Espace-Temps existant en P ; à travers ce tenseur, elle se relie au contenu matériel de l'Univers au voisinage de P ⁸.

(6) On montre en effet que, sans perte de généralité, les quadri-vecteurs $\xi(v)$ peuvent être pris dans de tels plans.

(7) Accélération rapportée aux variations de la position v sur la géodésique de référence, assimilée à un temps. Cette accélération peut être positive ou négative.

(8) Pour passer de l'équation géodésique à l'équation de déviation géodésique, on restreint d'abord les degrés de liberté des écarts $\xi^\mu(v)$ en les contraignant à être orthogonaux à la géodésique de référence : $g_{\mu\nu} k^\nu \xi^\mu = 0$. On considère alors l'équation géodésique sur les points de coordonnées $x^\mu(v) + \xi^\mu(v)$, équation que l'on rapproche, par un développement limité, de celle sur les points de coordonnées x^μ . L'apparition du tenseur de courbure résulte pour partie, dans ce développement, de dérivations opérant sur les coefficients $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\}$. Ce tenseur d'ordre 4 apporte donc sur les variations locales de la métrique une information plus « profonde » - au sens d'un ordre de dérivation plus élevé - que celle apportée par les symboles de Cristoffel. La déviation géodésique, de par le fait qu'elle met en œuvre deux géodésiques proches et non une seule, permet donc d'accéder à une connaissance plus fine de la structure de l'Espace-Temps dans leur voisinage.

2.3 Structure d'un faisceau de rayons lumineux

Pour décrire dans l'Espace-Temps la structure d'un faisceau de rayons lumineux émanant d'une source lointaine et convergeant vers un observateur, une idée simple est de caractériser par quelques grandeurs les sections de ce faisceau dans des plans orthogonaux à une géodésique de référence. Des *plan-écrans* (cf. les plans de la figure 2), chacun d'eux repérés par une valeur de position v . Passer de l'image vue par l'observateur sur la voûte céleste aux propriétés géométriques de la section v du faisceau mobilise, en se limitant à l'ordre 2, une matrice de transfert $D(v)$, la *matrice de Jacobi*. L'équation contrôlant l'évolution de \mathcal{D} en fonction de v se calcule à partir de l'équation de déviation géodésique ; elle est connue comme l'*équation de Sachs*.

2.3.1 Matrice de Jacobi : définition et interprétation géométrique

Précisons la nature de la matrice de Jacobi. Identifions pour ce faire chaque rayon du faisceau par l'écart, constaté par l'observateur, entre la direction de ce rayon et celle du rayon de référence - cette dernière étant par exemple la direction observée du centre de l'objet (cf. figure 2). Représentons cet écart bi-dimensionnel, sur la voûte céleste, par un couple θ^a , $a \in [1, 2]$ de deux coordonnées angulaires⁹. Soit par ailleurs $\xi^a(v)$, $a \in [1, 2]$ le couple des deux composantes du quadri-vecteur $\xi(v)$ sur une certaine base, préalablement choisie, du plan-écran¹⁰. Il est clair qu'il existe pour v fixé, une relation entre les deux grandeurs bi-dimensionnelles $\xi^a(v)$ et θ^a . Cette relation, lorsque $\theta^a \rightarrow 0$ (faisceaux étroits), devient linéaire, et elle s'écrit donc dans cette limite (en utilisant les conventions d'Einstein de sommation des indices) :

$$\xi^a(v) = \mathcal{D}_b^a(v)\theta^b \quad a \in [1, 2], b \in [1, 2] \quad (5)$$

où les coefficients $\mathcal{D}_b^a(v)$ sont ceux d'une matrice $\mathcal{D}(v)$ 2×2 , la matrice de Jacobi.

Cette matrice $\mathcal{D}(v)$, si elle est connue, permet de reconstruire les propriétés géométriques d'un objet placé sur une position v d'une ligne de visée, à partir de l'image de cet objet vue par l'observateur. Elle corrige donc toutes les distorsions intervenant au cours du trajet et impactant cette image (cf. [7], annexe A.4) : effet de *cisaillement*, transformant par exemple un faisceau initialement de section circulaire en une image elliptique plus ou moins allongée, effet de *rotation* conduisant à ce qu'un objet asymétrique et son image n'ai pas la même orientation sur la voûte céleste ; effet de *convergence* - grossissement ou de réduction isotrope, modifiant la taille globale de l'image par rapport à ce qu'elle serait dans un univers vide ; enfin effet de distance, l'image étant d'autant plus réduite que l'objet est plus éloigné. La matrice de Jacobi peut être décomposée en un produit de trois facteurs représentant ces corrections :

(9) Par exemple une colatitude θ et une longitude ϕ , la direction observée de la géodésique de référence étant quant à elle 0, 0.

(10) La construction de cette base est précisée plus loin.

1. un premier facteur corrige le cisaillement, en appliquant une compression de l'image dans une certaine direction, et un étirement complémentaire sur la direction orthogonale pour ne pas changer la surface de l'image. Deux paramètres interviennent donc dans ce facteur matriciel, un paramètre γ déterminant la valeur de la compression, et un paramètre ϑ déterminant l'angle de la direction comprimée ;

2. un second facteur corrige la rotation, en appliquant une rotation inverse, paramétrée par un angle ψ ;

3. un troisième facteur corrige simultanément la convergence et l'effet de distance ; il multiplie la composition des deux premiers par une valeur D_A , qui est par définition la distance angulaire entre l'observateur et l'objet observé ;

4. le déterminant du produit des deux premiers facteurs est égal à 1 car ils ne modifient pas la surface de l'image. La distance angulaire D_A s'identifie donc à la racine carrée du déterminant de la matrice $D(v)$.

2.3.2 Equation de Sachs : son expression ; principe de son calcul

L'équation de Sachs se présente sous une forme analogue à celle de l'équation de déviation, donnant ainsi l'accélération - positive ou négative - de la matrice de Jacobi lorsqu'on s'éloigne de l'observateur pour aller vers la source. Elle contrôle les quatre coefficients de la matrice :

$$\frac{d^2}{dv^2} \mathcal{D}_b^a = \mathcal{R}_c^a \mathcal{D}_b^c \quad a \in [1, 2], b \in [1, 2], c \in [1, 2] \quad (6)$$

Dans cette équation, la matrice \mathcal{R} , matrice 2×2 , est appelée *matrice optique*. Sur chaque position v , elle se déduit du tenseur du courbure afférent à cette même position, après choix d'un référentiel sur le plan-écran correspondant, par une opération de projection qui en réduit la dimensionnalité.

Pour qu'une telle équation puisse être résolue de façon unique, pour une structure d'Espace-Temps, une géodésique de référence et une position de l'observateur déterminées, il faut y adjoindre des conditions initiales. Elles sont au nombre de 2 :

1. $\mathcal{D}_b^a|_{v=0} = 0$: les deux géodésiques convergeant vers l'observateur, par construction sur la position $v = 0$, les composantes $\xi^a(0)$ sont nulles et il en est de même des coefficients de la matrice de Jacobi sur cette position ;

2. $\frac{d}{dv} \mathcal{D}_b^a|_{v=0} = -\mathcal{I}_b^a$, où \mathcal{I} est la matrice unité. Cette seconde condition résulte de l'assimilation de l'écart bi-angulaire θ^a à la dérivée $\frac{d}{dv} \xi^a|_{v=0}$ dans la limite $\theta^a \rightarrow 0$.

La construction de l'équation de Sachs implique de choisir les référentiels des différents plans-écrans. Sur chaque plan-écran sont ainsi définis deux quadri-vecteurs orthogonaux $\eta_1(v)$ et $\eta_2(v)$ qui en forment une base, dans laquelle le quadri-vecteur $\xi(v)$ s'écrit $\xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2$ ¹¹. L'étape suivante consiste à projeter l'équation de déviation géodésique sur la base $\eta_1(v), \eta_2(v)$ et donc à la réécrire en fonction des composantes $\xi^a, a \in [1, 2]$. On obtient (en reprenant les conventions d'Einstein) :

$$\frac{d^2}{dv^2}\xi^a = \mathcal{R}^a_b \xi^b \quad a \in [1, 2], b \in [1, 2] \quad (7)$$

les coefficients de la matrice optique donnés par (projection du tenseur de courbure) :

$$\mathcal{R}_{ab} = R_{\mu\nu\alpha\beta} k^\nu k^\alpha \eta_a^\mu \eta_b^\beta \quad (8)$$

L'équation de Sachs s'en déduit en remplaçant dans 7 les ξ^a par leur développement $\mathcal{D}^a_b \theta^b$

2.3.3 L'intégration de l'équation de Sachs

Intégrer l'équation de Sachs, c'est calculer une expression explicite de la matrice $\mathcal{D}(v)$ en chaque point v de la ligne d'univers d'un photon reçu par l'observateur¹². Un tel calcul n'est possible, au moins d'une manière approchée, que si l'on dispose d'un *modèle d'Univers* précisant sa géométrie et son contenu. En cas de succès, les prédictions fournies par cette expression pourront être confrontées aux observations, et par là même permettront de tester la validité des modèles d'Univers sur lesquels elles ont été construites. Les sections suivantes traitent ainsi de plusieurs types de modèles :

1. modèles prenant en compte de petites perturbations *continues* de la métrique d'un Espace-Temps homogène et isotrope à grande échelle, l'Espace-Temps de Friedmann-Lemaître (abrégié par « FL »). Perturbations conséquence de la présence de variations (elles-mêmes continues) de densité et de pression affectant les champs correspondants ;

2. variantes des modèles précédents, variantes s'affranchissant selon certaines modalités soit de l'isotropie, soit de l'homogénéité. Le but étant de tester, à partir

(11) Pour définir les bases $\eta_1(v), \eta_2(v)$, on commence par choisir un référentiel local au niveau de l'observateur, en $v = 0$, en prenant pour base quatre quadri-vecteurs : le quadri-vecteur $k(0)$ tangent à la géodésique de référence, le quadri-vecteur $u(0)$ à la propre ligne d'univers de l'observateur, et enfin deux quadri-vecteurs orthogonaux *à la fois* à $k(0)$ et à $u(0)$, soit $\eta_1(0)$ et $\eta_2(0)$ qui définissent donc le plan-écran de l'observateur. Puis on transporte parallèlement cette base $[k(0), u(0), \eta_1(0), \eta_2(0)]$ sur chaque position v de la géodésique de référence, les quadri-vecteurs $\eta_1(v)$ et $\eta_2(v)$ obtenus par ce transport restant alors orthogonaux aux quadri-vecteurs $k(v)$ et $u(v)$.

(12) Par expression explicite, il faut entendre une expression de type $\mathcal{D}(v) = \mathcal{F}_{u=0}^{u=v}$ où $\mathcal{F}_{u=0}^{u=v}$ est une certaine fonctionnelle des propriétés de l'Espace-Temps (géométrie, contenu matériel) le long de cette ligne d'univers entre $u = 0$ (instant de la réception, voisinage spatial de l'observateur) et $u = v$.

des prédictions sur les effets de lentilles faibles, d'éventuelles dérogations à ces propriétés ;

3. modèles prenant en compte des hétérogénéités *discontinues*, représentant le contenu matériel sous forme de distributions de *grains* plus ou moins resserrés, dont on se donne la loi de répartition.

3. Cas d'un Espace-Temps FL faiblement perturbé

Commençons par étudier l'équation de Sachs dans un Univers régi par la métrique de Friedmann-Lemaître. Il s'agit dans ce contexte de donner l'expression de la matrice optique, d'intégrer Sachs et d'explicitier par cette intégration la matrice de Jacobi. La même démarche sera ensuite appliquée à un univers où cette métrique est affectée de petites perturbations, dont nous préciserons la nature et l'expression.

3.1 En l'absence de perturbations

Adoptons un référentiel basé sur des coordonnées sphériques, où un évènement est repéré par un quadri-vecteur $[x^0, x^1, x^2, x^3] = [ct, \chi, \theta, \varphi]$; t est l'instant de l'évènement dans le temps propre de l'observateur, χ la distance radiale co-mobile séparant l'observateur de l'évènement, enfin θ et φ la colatitude et la longitude de ce même évènement. Dans ce référentiel, la métrique FL est donnée sur cet évènement par $\mu \neq \nu \Rightarrow g_{\mu\nu} = 0$ complété par :

$$g_{00} = -1 \quad g_{11} = a^2(t) \quad g_{22} = a^2(t)f_K^2(\chi) \quad g_{33} = a^2(t)f_K^2(\chi)\sin^2\theta \tag{9}$$

où $a(t)$ est le facteur d'expansion à l'instant t et K la courbure spatiale¹³ ;

3.1.1 De la métrique à l'équation des géodésiques

Partant des formules 9, le calcul des symboles de Christoffel conduit à l'équation des géodésiques¹⁴. Son étude montre que toute ligne d'univers répondant à $ds/dv = 0$ (une ligne de longueur nulle) et $cdt/dv = c/a$, $d\chi/dv = c/a^2$, $d\theta/dv = 0$, $d\varphi/dv = 0$ (une ligne « droite ») en est une solution. Cette ligne d'univers est celle d'un photon parvenant à

(13) Dans un univers spatialement plat ($K = 0$), la fonction $f_K(\chi)$ se réduit à χ ; pour les autres valeurs de K , le lecteur se reportera par exemple à [9], chapitre 3.

(14) L'équation d'une géodésique radiale, donc avec $d\theta = d\varphi = 0$, s'écrit ainsi :

$$\frac{d^2x_0}{dv^2} + \frac{a}{c} \frac{dx_1}{dv} \frac{dx_1}{dv} = 0 \quad \frac{d^2x_1}{dv^2} + 2 \frac{a}{ac} \frac{dx_0}{dv} \frac{dx_1}{dv} = 0$$

l'observateur dans une certaine direction θ_0, φ_0 de la sphère céleste, vérifiant tout au long de sa trajectoire¹⁵

$$\chi(t) = \int_t^0 \frac{c}{a(\tau)} d\tau, \quad \theta(t) = \theta_0, \quad \varphi(t) = \varphi_0 \quad (10)$$

3.1.2 De la métrique à la matrice de Jacobi et à la distance angulaire

Le tenseur de Riemann se déduit également des formules 9. Son calcul conduit à l'équation de déviation géodésique, puis à la matrice optique et à l'équation de Sachs. L'intégration de cette dernière le long d'une géodésique d'équation 10 donne la matrice de Jacobi, et donc la distance angulaire, en fonction de χ .

L'homogénéité de l'Univers FL fait que la partie sans trace du tenseur de Riemann, appelée tenseur de Weyl, est nulle. Les effets de cisaillement, dont ce tenseur est responsable, sont absents. La matrice optique \mathcal{R} n'est fonction que des seules composantes du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$; la relation s'écrit $\mathcal{R} = [-1/2R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu]\mathcal{I}$: la matrice optique est donc égale à la matrice unité, à un facteur près. De plus, le facteur $-1/2R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$ ne dépend pas de la direction θ_0, φ_0 identifiant la géodésique centrale, comme le veut l'isotropie de l'Univers vu de l'observateur. Ce facteur, et à sa suite la matrice optique et celle de Jacobi, ne dépendent que de la position sur cette géodésique, repérée par χ , ou, alternativement, du *redshift* z ou du temps t associés à cette position¹⁶. La formule de la matrice de Jacobi, obtenue par intégration de l'équation de Sachs est alors :

$$\mathcal{D}(\chi) = a(\chi)f_k(\chi)\mathcal{I} \quad (11)$$

faisant apparaître la valeur de la distance angulaire (physique) associée à la position χ : $D_A(\chi) = a(\chi)f_k(\chi)$ ¹⁷

(15) Après élimination du paramètre affine et instant de la réception pris à $t = 0$.

(16) La formule de la matrice optique, résultant de tels calculs, peut être trouvée par exemple dans [4], 6.2.2. Adaptée à l'écriture de la métrique faite ici, la formule donnant \mathcal{R} devient :

$$\mathcal{R} = -\frac{\dot{a}^2 + c^2 K - a\ddot{a}}{a^4}\mathcal{I} = -\frac{4\pi G}{a^2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\mathcal{I}$$

, la seconde expression, homogène au gradient d'un potentiel, tirant son origine des équations de Friedmann liant dans cet univers la géométrie au contenu matériel.

(17) On pourrait s'étonner de ce résultat, dans un référentiel basé sur des coordonnées sphériques : l'écart $\xi(\chi)$ entre deux géodésiques identifiées au niveau de l'observateur respectivement par les directions θ_0, φ_0 et $\theta_0 + d\theta_0, \varphi_0$ reste, de par le choix du référentiel, constamment égal à lui-même : $\xi(\chi) = [0, 0, d\theta_0, 0]$; avec un tel raisonnement, la matrice de Jacobi devrait simplement être égale à \mathcal{I} . C'est oublier que cette matrice contrôle les composantes de $\xi(\chi)$ dans une base $\eta_1(\chi), \eta_2(\chi)$ qui « rapetisse » quand on s'éloigne de l'observateur, par suite des lois du transport parallèle valides dans la métrique considérée. Le vecteur $\eta_1(\chi)$ a en effet pour composantes $1/[a(\chi)f_k(\chi)][0, 0, 1, 0]$. La composante ξ^1 de $\xi(\chi)$ dans cette base vérifie bien $\xi^1 = a(\chi)f_k(\chi)d\theta_0$.

3.2 En présence de perturbations

En présence de perturbations modifiant la métrique FL, les géodésiques ne sont plus des « lignes droites » : la ligne d'univers d'un photon parvenant à l'observateur sur la direction θ_0, φ_0 sera décrite par des fonctions $\chi(t, \theta_0, \varphi_0), \theta(t, \theta_0, \varphi_0), \phi(t, \theta_0, \varphi_0)$ différentes de celles données en 10. L'intégration de l'équation de Sachs devrait se faire de façon rigoureuse avec les valeurs de la matrice optique prises le long de cette ligne. Mais, lorsque la faiblesse des perturbations permet de se limiter au premier ordre, on utilise l'*approximation de Born* ; cette dernière consiste à remplacer la ligne d'univers réellement suivie par le photon depuis son émission jusqu'à sa réception par l'observateur, par la ligne fictive qui serait suivie dans un univers non-perturbé.

Cette sous-section aborde en premier lieu la nature des perturbations pris en compte et la manière de les formaliser ; elle donne ensuite les formules établies au premier ordre pour la matrice optique et la matrice de Jacobi, et leur interprétation physique ; elle évoque enfin les applications de ces résultats théoriques en cosmologie.

3.2.1 La nature des perturbations ; leur lien avec le contenu matériel

Sous le vocable de perturbation de métrique il faut entendre une configuration d'écart, constatés sur un même référentiel, entre les composantes de la métrique réelle et celles de la métrique de Friedmann-Lemaître. Dans un référentiel où l'expression de cette métrique FL est celle des formules 9 cette perturbation peut affecter la composante temporelle g_{00} , les trois composantes spatiales $g_{\mu\mu}, \mu \in [1, 2, 3]$, voire introduire des couplages conduisant à ce que la matrice $g_{\mu\nu}$ perturbée ne soit plus diagonale. On conçoit qu'une perturbation de la métrique, selon les degrés de liberté que l'on s'autorise, puisse être de nature purement scalaire, ou encore vectorielle ou même pleinement tensorielle, et que dans sa forme la plus générale elle puisse être une combinaison de tous ces *modes*¹⁸.

La théorie montre que dans le cas d'un univers de Friedmann-Lemaître faiblement perturbé, seul le mode scalaire intervient de façon notable (au premier ordre) dans le calcul des matrices de Jacobi. Seront donc prises en compte uniquement les perturbations liées à ce mode ; avec un *choix de jauge* adéquat, elles se caractérisent par la donnée de deux champs de potentiel gravitationnel, les potentiels Φ et Ψ . Dans ces conditions, toujours dans un référentiel $ct, \chi, \theta, \varphi$, la métrique perturbée prise comme point de départ des calculs est de la forme (cf. [4], 5.2, [2], 3.2.2) :

(18) Modes désignés dans la littérature par modes S, V, T . La perturbation la plus générale mobilise 10 degrés de liberté - le nombre de composantes indépendantes de la métrique. On montre que ces 10 degrés de liberté se décomposent en 4 degrés de liberté liés au mode scalaire, 4 degrés de liberté liés au mode vectoriel et 2 degrés de liberté liés au mode tensoriel. Mais la liberté de choisir son référentiel mobilise de son côté 4 degrés de liberté - le nombre de dimensions de l'Espace-Temps. La définition d'une « vraie » perturbation, vraie au sens d'une réalité physique indépendante du référentiel, mobilise donc $10-4 = 6$ degrés de liberté. Un *choix de jauge* consiste à utiliser cette marge de manœuvre pour placer des contraintes sur les variables de perturbations, de manière à n'avoir *in fine* que six variables indépendantes.

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) & g_{11} &= a^2(t)\left(1 - \frac{2\Psi}{c^2}\right) \\
g_{22} &= a^2(t)\left(1 - \frac{2\Psi}{c^2}\right)f_K^2(\chi) & g_{33} &= a^2(t)\left(1 - \frac{2\Psi}{c^2}\right)f_K^2(\chi)\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{12}$$

les autres composantes restant nulles.

Dans les modèles d'Univers traités ici, le contenu matériel est modélisé comme un fluide se rapprochant d'un gaz plus ou moins parfait. Dans l'Univers non perturbé, ce fluide se répartit sur chaque section spatiale de l'Espace-Temps selon une distribution uniforme. Dans l'Univers perturbé prennent place - à certaines échelles - divers hétérogénéités et anisotropies : écarts (par rapport à la valeur uniforme) de densités et de pression, éventuelles anisotropies de pression, courants déplaçant les éléments de fluide.

Les potentiels gravitationnels Φ et Ψ sont fonction de ces écarts et anisotropies du contenu. Ψ est ainsi relié aux contrastes de densité, par une équation généralisant (dans un univers en expansion) l'équation de Poisson en Gravité Newtonnienne. La différence entre Φ et Ψ est liée de son coté aux éventuelles anisotropies de pression (cf. [9], 5.2.4). Dans les conditions actuelles de l'Univers, on considère que ces anisotropies sont négligeables, et qu'en conséquence $\Phi = \Psi$.

3.2.2 L'équation de Sachs et son intégration

La démarche est toujours la même : partant des formules 12, cette démarche conduit à l'expression du tenseur de Riemann, puis à celle de la matrice optique. Cette dernière se développe, sur une position χ de la ligne de référence¹⁹, en une somme de deux termes : le premier terme, \mathcal{R}^0 , est la matrice obtenue précédemment en l'absence de perturbations²⁰. Le second terme, \mathcal{R}^1 , est lié au tenseur de Weyl, qui en présence des perturbations scalaires n'est plus obligatoirement nul. Le calcul montre que cette seconde matrice est fonction de la manière dont les potentiels Φ et Ψ varient dans le plan-écran $\eta_1(\chi)$, $\eta_2(\chi)$ afférent à la position χ de la ligne de référence. Cette dépendance s'exprime par la proportionnalité à un double gradient, évoquant l'équation de Poisson, et annonçant donc la dépendance aux écarts de densité²¹. Sous la condition admise $\Phi = \Psi$, elle s'écrit :

$$\mathcal{R}_{ab}^1 = -\frac{2}{a^2 c^2} \partial_a \partial_b \Phi \quad a \in [1, 2], \quad b \in [1, 2] \tag{13}$$

(19) La géodésique lumière qui joindrait dans l'univers non-perturbé la source observée et l'observateur, ou encore, alternativement, la géodésique lumière qui, dans l'univers non perturbé, atteindrait l'observateur sur la direction dans laquelle il perçoit effectivement la source. C'est l'approximation de Born. Nous privilégions ici la seconde option.

(20) L'ordre 0, où la matrice est fonction des seules composantes du tenseur de Ricci.

(21) Dans l'équation 13, le potentiel Φ est vu comme une fonction des composantes ξ^1 , ξ^2 du vecteur ξ dans la base η_1 , η_2 , composantes prises en coordonnées co-mobiles. Les dérivées partielles $\partial_a = \frac{\partial}{\partial \xi^a}$, $a \in [1, 2]$ sont prises sur la ligne centrale, c.-à-d. au point $\xi^1 = \xi^2 = 0$.

La matrice de Jacobi \mathcal{D} est, parallèlement, décomposée sur chaque position χ en une somme, $\mathcal{D}^0(\chi) + \mathcal{D}^1(\chi)$, de deux termes : un terme à l'ordre 0, correspondant à la métrique non perturbée, et un terme d'ordre 1. L'expression de \mathcal{D}^1 obtenue par intégration de l'équation de Sachs tronquée au premier ordre²² est alors :

$$D_{ab}^1(\chi) = -a(\chi) \frac{2}{c^2} \int_{\chi'=0}^{\chi'=x} f_K(\chi') f_K(\chi - \chi') [\partial_a \partial_b \Phi(\chi')] d\chi' \quad (14)$$

3.2.3 Matrice d'amplification

L'équation 14 traduit une simple superposition d'effets de lentilles gravitationnelles infinement minces. Chacune d'elles, située à une distance co-mobile $f_K(\chi')$ de l'observateur et une distance co-mobile $f_K(\chi - \chi')$ du plan χ - exerce une action fonction de l'hétérogénéité de la distribution de matière dans son propre plan. Cette constatation est à la base d'une comparaison avec d'autres données disponibles sur les contrastes de densité. Donnons dans cette sous-section et la suivante les grandes étapes du raisonnement.

La matrice de Jacobi $\mathcal{D}(\chi_s) = \mathcal{D}^0(\chi_s) + \mathcal{D}^1(\chi_s)$ fait passer d'une image observée à l'étendue et la forme physiques d'une source qui serait située dans l'univers non perturbé à une distance angulaire $\bar{D}_A(\chi_s) = a(\chi_s) f_K(\chi_s)$. Elle corrige, on l'a vu, les effets de lentilles : cisaillement, rotation, convergence ; elle inclue également la correction de l'effet de distance. Pour accéder à la correction des seuls effets de lentilles, on en vient à diviser $\mathcal{D}(\chi_s)$ par $\bar{D}_A(\chi_s)$, cette dernière valeur étant considérée comme corrigeant le seul effet de distance. Cela amène à définir la *matrice d'amplification* \mathcal{A} par $\mathcal{A} = \mathcal{D}/\bar{D}_A$ soit²³

$$A_{ab}(\chi_s) = \delta_{ab} - \frac{2}{c^2} \int_{\chi=0}^{\chi=\chi_s} \frac{f_K(\chi) f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi_s)} [\partial_a \partial_b \Phi(\chi)] d\chi \quad (15)$$

La matrice d'amplification est symétrique et proche de la matrice unité. Elle se décompose en la somme de deux matrices :

1. une matrice diagonale $(1 - k)\mathcal{I}$ corrigeant l'effet de grossissement ou réduction isotrope ; k est le paramètre de *convergence* : lorsqu'il est positif, les effets de lentilles sont globalement grossissants ;
2. une matrice corrigeant l'effet de cisaillement. Elle est symétrique et la somme des deux termes diagonaux est nulle : elle dépend donc seulement de deux valeurs, un coefficient $0 \leq \gamma \leq 1$, contrôlant simultanément un étirement $(1/(1 - \gamma))$ sur un axe

(22) On néglige le produit du second ordre $\mathcal{R}^1 \mathcal{D}^1$.

(23) Il existe dans la littérature différentes conventions pour la définition de cette matrice ; certaines conventions font de \mathcal{A} une matrice de passage entre l'objet et l'image (cf. [4], 6.2.3) ; nous prenons ici la convention inverse, de l'image à l'objet, donc dans le même sens que \mathcal{D} ; par ailleurs, la définition rigoureuse de la matrice d'amplification est déduite d'un développement au premier ordre de \mathcal{D} , du type $\mathcal{D} = \mathcal{A}\bar{D}_A + \mathcal{O}(2)$ (cf. [7], A.4.2).

et une compression $(1/(1 - \gamma))$ sur l'axe orthogonal, et un angle ϑ donnant l'orientation de l'axe de l'étirement.

En rapprochant cette décomposition de l'expression 15, on obtient la valeur des coefficients k et γ . Le coefficient de convergence est ainsi donné par :

$$k(\chi_S) = \frac{1}{c^2} \int_{\chi=0}^{\chi=\chi_S} \frac{f_K(\chi)f_K(\chi_S - \chi)}{f_K(\chi_S)} [(\partial_a^2 + \partial_b^2)\Phi(\chi)] d\chi \quad (16)$$

3.2.4 Champ de convergence et contrastes de densités

Par 16, la convergence est donc relié aux laplaciens $\partial_a^2 + \partial_b^2$ des potentiels dans la succession des plans-écrans, depuis l'observateur jusqu'à la source. Cette présence du laplacien rappelle l'équation de Poisson, mobilisant cette fois un laplacien 3D, équation qui dans un univers en expansion s'écrit $\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta\rho$, où ρ représente la densité de l'univers non perturbé à un certain instant t , et $\delta\rho$ le *contraste de densité*, l'écart *relatif* existant au même instant sur la position spatiale considérée. La suite des calculs relie effectivement le champ de convergence k au contraste de densité δ_m sur la matière ; dans une direction d'observation quelconque donnée, nous aurons (cf. [9], 7.1.4, [4], 6.5) :

$$k(\chi_S) = \frac{3}{2} \Omega_{m0} \frac{H_0^2}{c^2} \int_{\chi=0}^{\chi=\chi_S} \frac{d\chi}{a(\chi)} \frac{f_K(\chi)f_K(\chi_S - \chi)}{f_K(\chi_S)} \delta_m(\chi) \quad (17)$$

Ainsi le champ de convergence²⁴ à une distance χ_S donnée est fonction d'un champ intégrant les contrastes de densité jusqu'à cette distance. Sa valeur moyenne dépend également des paramètres cosmologiques caractérisant l'univers actuel Ω_{m0} - densité de matière rapportée à la densité critique - et constante de Hubble. L'équation 17 pose donc des contraintes sur ces paramètres, contraintes exploitables si l'on dispose de mesures adéquates sur les caractéristiques des champs concernés.

Ces calculs ouvrent en outre une possibilité de vérification des lois physiques qu'ils mobilisent : le champ de convergence et le champ de densité répondent-ils aux équations attendues, rassemblées dans l'équation 17 ; les lois de la gravité, assurant le lien entre le potentiel gravitationnel et la matière sont elles toujours exactement vérifiées (cf. [12]) aux échelles des grandes structures de l'univers ?

La base de telles investigations est la comparaison de deux types d'observations indépendantes : l'équation 17 montre que s'il existe une corrélation entre deux valeurs de la convergence prises dans une même tranche de *redshift* sur deux directions proches θ, φ et $\theta + d\theta, \varphi + d\varphi$, il doit également exister une corrélation entre deux valeurs intégrées de densités dans les mêmes directions.

(24) Un champ de valeurs $k(\chi_S, \theta, \varphi)$ sur la sphère céleste ; la référence à la ligne de visée est implicite dans l'équation 17.

La corrélation sur la convergence n'est pas directement mesurable ; mais on y accède par le biais des corrélations de cisaillement, qui peuvent être déduites à partir de méthodes statistiques opérant sur les formes observées des galaxies²⁵. La corrélation des densités, qui inclue les densités de matière noire, est appréhendée par la corrélation de densité du nombre d'objets visibles, en l'occurrence du nombre de galaxies, corrélation classique en cosmologie observationnelle.

4. Tester l'isotropie de l'expansion de l'univers

L'équation 16 manifeste, dans un cas particulier, une relation générale entre la structure de l'Espace-Temps et celle des effets de lentilles gravitationnelles. Aussi bien peut-on envisager d'exploiter cette relation générale pour d'autres questions. Notamment la question de la validité de l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers. Cette hypothèse résulte d'un postulat, savoir que nous ne sommes pas des observateurs privilégiés ; elle n'est pas démentie par les observations, telles celles faites sur le fond diffus cosmologique. Ces observations tendent en effet à nous faire penser que notre Univers est « proche » d'un tel modèle, mais nous aimerions savoir à quel point on en est proche. Peut-t-on affirmer par exemple que l'écart à un Univers homogène et isotrope est inférieur à 10 %, à 1 %, ... ?

La présente section aborde plus spécifiquement la possibilité de tester de façon fine l'isotropie de l'expansion de l'Univers, par le biais d'une analyse des effets de lentilles gravitationnelles ; mais cette analyse ne peut porter ses fruits que si l'on connaît la signature de ces effets dans des modèles d'Univers ne vérifiant pas cette hypothèse. Nous commencerons donc par situer les modèles alternatifs pris en compte, avant d'introduire les éléments d'analyse discriminants.

4.1 Une classification de modèles simples d'Univers

L'homogénéité et l'isotropie de l'Espace-Temps Friedmann-Lemaître, caractérisent ses sections spatiales, c.-à-d. les Espaces pris à un instant t donné. Intuitivement ces deux propriétés signifient que la vision qu'un observateur a de la structure de l'Univers (γ compris en profondeur, dans le temps)²⁶ :

(25) Dans l'Univers FL faiblement perturbé, convergence et cisaillement sont corrélés, puisqu'ils dépendent tous du seul et même champ Φ par l'équation 15. Le lecteur pourra consulter sur ces corrélations les ouvrages déjà cités, et par exemple l'article de Bertelmann et Schneider 2001 [2], 6.6. L'article de van Waerbeke et al. 1999 [13] expose également cette approche comparative : reconstruction de deux cartes du champ de convergence, à partir respectivement d'une carte du champ de densité et d'une carte du champ de cisaillement, puis comparaison ; ce dans des univers simulés, pour évaluer l'impact de différentes valeurs des paramètres cosmologiques. Les mêmes auteurs ont publiés en 2000 [14], à partir des relevés du CFHT, de premières analyses mettant en évidence des corrélations de cisaillement, sur des échelles angulaires de quelques arc-minutes. Plus récemment, les relevés CFHTLenS (cf. [8]) ont fait depuis 2012 l'objet de plusieurs publications.

(26) Formellement, l'invariance à la base de ces propriétés est celle de l'expression de la métrique, lorsque l'observateur conserve d'une certaine manière son référentiel lors de changements de position.

1. ne changerait pas s'il se déplaçait instantanément d'un point quelconque de l'Espace à un autre (homogénéité) ;
2. ne changerait pas s'il tournait instantanément sur lui même autour d'un axe quelconque (isotropie).

Un déplacement mobilise, dans un espace à trois dimensions, trois degrés de liberté. Il en est de même pour une rotation (les deux composantes fixant la direction de l'axe et la troisième fixant l'angle). La pleine homogénéité et l'isométrie réunies se manifestent donc sur six degrés de liberté ($s = 3$ pour les déplacements et $q = 3$ pour les rotations). C'est à partir de décompte de tels degrés que peuvent être repérés différents modèles d'Univers, non homogènes et/ou non isotrope, les diverses combinaisons n'étant pas toutes géométriquement possibles. La famille des modèles d'Univers de *Bianchi*, par exemple, se range dans la catégorie $s = 3$ (univers homogène), q prenant les valeurs 1 ou 0 (anisotropie). Les modèles *Lemaître-Tolman-Bondi* sont basés sur une homogénéité et une isotropie réduite ($s = 2, q = 2$). Dans chaque cas, c'est la spécification de la métrique, dans un certain référentiel, qui détermine le classement. Ainsi, pour l'univers de *Bianchi I*, dans un référentiel où tout évènement est repéré par $[x^0, x^1, x^2, x^3] = [ct, x, y, z]$, la métrique est, dans une version simple, de la forme ([9], 3.6.2) :

$$g_{00} = -1, g_{11} = a^2(t)X^2(t), g_{22} = a^2(t)Y^2(t), g_{33} = a^2(t)Z^2(t) \quad (18)$$

Le taux d'expansion est différent dans les trois directions spatiales supposées orthogonales U_1, U_2, U_3 du référentiel ; l'isotropie n'est plus vérifiée²⁷. L'homogénéité à t fixé reste présente, du fait qu'aucune des composantes de la métrique ne dépend des coordonnées x, y, z . Nous avons pour ce modèle d'Univers, $s = 3, q = 0$, dès lors que les fonctions X, Y, Z sont deux à deux différentes.

4.2 Un élément discriminant : la présence d'un mode B et de ses corrélations

Pour évaluer de manière fine le degré d'isotropie de l'Univers, la structure de la matrice optique, évaluée sur chaque position ν d'une géodésique de référence, est de nouveau mobilisée. Cette matrice est, rappelons le, la somme de deux termes issus de la décomposition du tenseur de courbure sur la position ν en une partie liée au tenseur de Ricci et l'autre au tenseur de Weyl.

1. Le premier terme $\mathcal{R}_{ab} = [-1/2R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu]\delta_{ab}$, projection du tenseur de Ricci, est le seul présent dans les univers de Friedmann-Lemaître, dans lesquels il se réduit au simple effet de distance.

(27) Si l'observateur se tourne ainsi de $\pi/2$ autour de la direction U_3 , et « conserve » par rapport à lui même son référentiel, lequel devient donc $[V_1, V_2, V_3] = [U_2, -U_1, U_3]$, l'expression de la métrique dans ce référentiel est $g_{00} = -1, g_{11} = a^2(t)Y^2(t), g_{22} = a^2(t)X^2(t), g_{33} = a^2(t)Z^2(t)$, différente donc l'expression initiale que l'observateur s'attendrait à priori à retrouver.

2. Le second terme $\mathcal{W}_{ab} = C_{\mu\nu\rho\sigma} k^\nu k^\rho \eta_a^\mu \eta_b^\sigma$ est la projection du tenseur de Weyl. Dans les univers de Friedmann-Lemaître faiblement perturbés, ce second terme entre dans l'expression de la matrice R_{ab}^1 de l'équation 13, à travers la partie *sans trace* de cette matrice, fonction des seuls coefficients de cisaillement. *Mais il n'est alors pas encore dans sa forme la plus générale.* Il inclue en effet en projection seulement la part dite électrique du tenseur de Weyl, ou *mode E*, la partie *magnétique* ou *mode B* restant encore nulle.

Le repérage, dans l'observation des effets de lentilles, de la présence du *mode B* et de ses propriétés peut fournir des indices d'une éventuelle anisotropie. Cette possibilité est reliée :

1. à la possibilité d'établir des équations générales, *indépendantes de la structure de fond de l'Espace-Temps*, concernant les champs *E* et *B* se développant sur la sphère céleste ; puis de les appliquer à différentes structures d'Espace-Temps (homogène isotrope, homogène non isotrope, voire non homogène) et en déduire des *propriétés dominantes*, telles certaines relations entre les caractéristiques de ces champs.

2. à la possibilité, après choix d'un modèle à tester, de conclure, à partir de l'analyse des effets de cisaillement observés, si les propriétés dominantes sont bien celles attendues.

Abordons brièvement ces deux points.

4.2.1 Equations sur les champs *E* et *B*

Leur construction part de la matrice de Jacobi, avec son terme de convergence $k\delta_{ab}$, de rotation $V\epsilon_{ab}$ et de cisaillement γ_{ab} ; puis du développement en harmoniques sphériques²⁸ de ces paramètres et des composants Ricci, \mathcal{R} et Weyl, \mathcal{W} , donc aussi de la part électrique \mathcal{E} et magnétique \mathcal{B} de ce dernier ; enfin du remplacement, dans l'équation de Sachs, des termes initiaux par leurs développements respectifs.

Les calculs conduisent ainsi, pour chaque multipôle lm , à un système croisé d'équations différentielles du second ordre relatifs à chacun des paramètres de la matrice de Jacobi : E_{lm} (part électrique) et B_{lm} (part magnétique) pour le cisaillement, k_{lm} pour la convergence, V_{lm} pour la rotation ; à la manière de Sachs, les parties droites de ces équations sont des accélérations $d^2 E_{lm}/dv^2 = \dots$, $d^2 B_{lm}/dv^2 = \dots$, $d^2 k_{lm}/dv^2 = \dots$; les parties gauche sont des développements sur plusieurs multipôles $l'm'$ de l'ensemble des grandeurs impliquées²⁹. Leur lecture montre donc des corrélations possibles ; par exemple, dans l'accélération de E_{lm} , partie électrique du champ de cisaillement, interviennent des valeurs de $E_{l'm'}$, mais aussi de $B_{l'm'}$; les termes dominants dans ces développements multipolaires, qui détermineront les corrélations effectives, sont ceux affectés de forts coefficients, lesquels dépendent de la structure de l'Espace-Temps sous jacent et de la nature des perturbations. Toute cette

(28) Appelé aussi développement multipolaire.

(29) Cf. [11], C. pour leurs expressions complètes.

hiérarchie de systèmes se déduit de la seule équation de Sachs ; elle ne comporte aucune hypothèse sur la structure de l'Espace-Temps et est donc bien générale.

Cette théorie a été appliquée à l'Univers d'expansion anisotrope « Bianchi I » [11] [10]. L'analyse de l'équation des géodésiques montre que la lumière ne se propage pas en ligne droite, au sens où on l'entendait pour l'Univers FL dans les équations 10 ; un trajet lumineux subit une déviation dont la valeur angulaire cumulée α est reliée à la métrique de cet univers anisotrope³⁰. L'analyse des équations $d^2 E_{lm}/dv^2 = \dots, d^2 B_{lm}/dv^2 = \dots$ conduit à des corrélations entre valeurs des champs E et B (valeurs prises sur une même ligne de visée, mais éventuellement à des niveaux multipolaires différents). Ces corrélations sont exploitables pour calculer la valeur de la déviation α ³¹ dans différentes directions d'observations et au final en déduire les coefficients de la métrique anisotrope.

4.2.2 De l'observation du cisaillement au calcul des corrélations

Tout part encore du cisaillement, seul phénomène directement observable. Le calcul du champ de cisaillement s'appuie sur la cohérence des distorsions subies par les galaxies d'un même *redshift* situées dans le voisinage d'une direction θ_0, ϕ_0 donnée. Si les galaxies étaient intrinsèquement de forme sphérique, cette cohérence ferait apparaître nettement, sur les images du ciel, des « lignes de forces », un peu comme les lignes de forces dessinées par la limaille de fer dans un champ magnétique. Dans la réalité les galaxies sont plutôt aplaties, elliptiques et d'inclinaisons diverses par rapport à la ligne de visée. Le repérage du cisaillement et l'analyse de sa structure nécessite donc l'emploi de méthodes statistiques élaborées³².

A cet état de fait s'ajoute l'intervention éventuelle du mode B . Celui-ci, on l'a vu, est normalement absent si l'Espace-Temps de « fond » est celui de Friedmann-Lemaître, et si les perturbations qui l'affectent se limitent aux perturbations scalaires décrites par 12. Encore cela n'est-il vrai qu'au premier ordre. Mais si l'on veut tester l'isotropie de l'Univers, on doit le considérer comme potentiellement présent et il faut pouvoir séparer ses effets de ceux du mode E . La clé de cette séparation réside dans le fait que la cohérence des effets du mode B sur deux galaxies adjacentes G_1 et G_2 ne se manifeste pas de la même façon que celle du mode E ; pour retrouver visuellement cette dernière, il faut faire « tourner » chacune des deux galaxies G_1 et G_2 d'un angle de 45° .

Pour surmonter ces difficultés, il est nécessaire de disposer de relevés galactiques denses, couvrant des échelles angulaires les plus grandes possibles. Ceux du CHFTLS³³ font déjà l'objet de nombreux travaux³⁴ mais on attend beaucoup des relevés qui seront

(30) Dans les publications citées, la métrique est de la forme $g_{00} = -1, g_{ij} = a^2(t)(\delta_{ij} + 2\beta_{ij} \dots)$. La forme et l'intensité de l'anisotropie est fonction des coefficients de la matrice β_{ij} qui est symétrique et sans trace. L'approximation de Born n'est plus de mise : on ne peut plus faire comme si cette déviation α - qui dépend de la direction d'observation θ_0, ϕ_0 - n'existait pas.

(31) Le champ $\alpha(\theta_0, \phi_0)$ fait lui-même l'objet d'un développement multipolaire ; on utilise alors le lien entre les coefficients de ce développement et les valeurs des corrélations.

(32) Faisant par exemple certaines hypothèses sur la distribution de l'ellipticité des galaxies ; cf. à nouveau [13].

(33) Canada France Hawaii Telescope Legacy Survey.

(34) Voir par exemple la thèse de Joël Bergé [3], chapitre 4.

fournis par le projet Euclid³⁵ : par exemple, les barres d'erreur sur le mode B pourraient être de 10 à 40 fois plus petites que celles présentes dans CHFTLS.

5. Prise en compte d'hétérogénéités discontinues

Les questions abordées dans cette dernière section concernent les mesures de distances et leur exploitation dans les *diagrammes de Hubble*. Ces derniers relient les redshifts observés des objets aux distances séparant ces objets de l'observateur. L'ajustement des diagrammes de Hubble aux modèles cosmologiques permet de vérifier leur plausibilité et d'en estimer les paramètres.

La course à la précision des mesures de distances, qui permet d'espérer une estimation de plus en plus fine des paramètres cosmologiques, implique que l'on comprenne de mieux en mieux leurs déterminants : la négligence de certains phénomènes, acceptable quand on devait se contenter de mesures à 10 % près, ne peut plus être admise si l'on veut exploiter correctement une précision dix fois supérieure. Il est donc important de bien comprendre et évaluer l'impact, sur les mesures de distances, des effets de lentilles faibles dues à des hétérogénéités du contenu matériel se superposant à un Espace-Temps de fond supposé homogène et isotrope.

Les mesures de distances cosmologiques les plus précises s'appuient sur les « chandelles standards » que sont les supernovæ. Pour l'observateur, les images de ces objets très compacts (à ces échelles) et très lointains sont quasi-ponctuelles, de l'ordre d'une microseconde d'arc. Les faisceaux lumineux perçus par l'observateur restent très resserrés tout au long de leur parcours. Sur une grande part de leur trajet, à l'échelle de leur section spatiale, ils traversent du vide ; ils ne sont alors influencés que par les effets de marée exercés par la matière environnante, se concrétisant par le cisaillement. Mais pour une autre part, ils rencontrent effectivement des « grains » de matière, et subissent l'effet de convergence. Leur interaction avec la matière saurait-elle sans biais être modélisée par l'interaction avec un fluide continu, comme dans les modèles d'Univers précédents ? De quel ordre de grandeur est l'erreur faite en adoptant ces modèles ? Faut-il, et comment, prendre en compte le caractère discontinu - à une certaine échelle - de la distribution de matière dans l'Univers ?

5.1 Les leçons du « Fromage Suisse »

Ces questions sont importantes et ouvertes depuis longtemps. Des modèles d'Univers où la distribution de matière est représentée partiellement de façon discrète ont donc vu le jour. Tels les modèles dit « Fromage Suisse » imaginés par Einstein dès 1945. Un exemple d'application d'un tel modèle est donné dans les travaux de Pierre Fleury et

(35) Le projet Euclid, ESA' Dark Univers Mission, est principalement orienté sur deux types de données : effets de lentilles faibles, et oscillations baryoniques acoustiques.

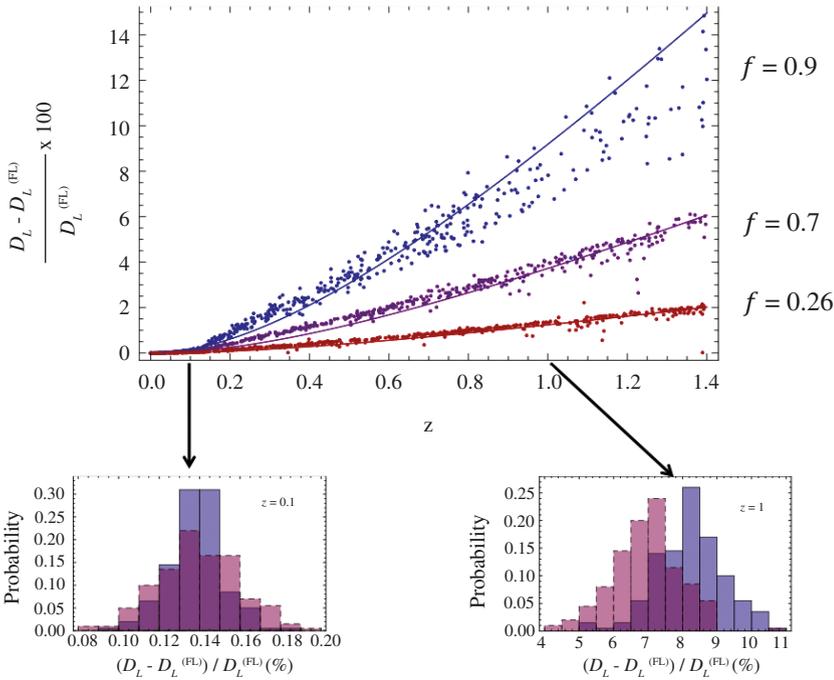


Figure 3. Distributions (simulées) des écarts relatifs entre la distance-luminosité d'un objet dans un univers Swiss-Cheese et de la distance-luminosité du même objet dans un univers FL pur. f représente la part de volume FL dans le volume total. Les valeurs portées en ordonnées sont des %. Reproduite à partir de [6], figures 16 et 24.

al. [6]³⁶. Conformément au *Swiss-Cheese model*, l'univers y est vu comme un Univers de Friedmann-Lemaître parsemé de « trous » rassemblant en leur centre ponctuel toute la masse qui s'y trouvait. Dans une telle configuration, les équations d'Einstein peuvent être résolues, et les paramètres cosmologiques fondamentaux calculés en fonction de la taille et de la densité des trous. Un diagramme de Hubble est ensuite simulé, à partir d'une population d'objets émetteurs et du calcul des géodésiques nulles les reliant à l'observateur. Le *redshift* z de chacun des objets est ainsi connu, de même que - par intégration de l'équation de Sachs sur les géodésiques - sa distance angulaire D_A^{SC} et sa distance-luminosité D_L^{SC} . L'analyse se termine par l'étude de la distribution des écarts relatifs $[D_L^{SC} - D_L^{FL}] / D_L^{FL}$ en fonction de z , où D_L^{FL} est la distance luminosité de l'objet considéré dans l'univers équivalent sans trous. Les résultats, pour différentes configurations, sont présentés de façon détaillée dans les travaux cités. La figure 3 montre ainsi que la dispersion des écarts relatifs est grande pour des univers proches de Friedmann-Lemaître « pur » (paramètre $f = 0.9$, 10 % de trous en volume), car les conditions que rencontrent les trajets lumineux peuvent être sensiblement différentes, selon le nombre

(36) Voir aussi [5]

de trous qu'ils traversent. Et que, comme il est naturel, cette dispersion augmente avec z , c.-à-d. avec la longueur de ces trajets.

5.2 Une approche stochastique

Dans une autre publication, Pierre Fleury et al. [7] ont mis en œuvre une approche analytique utilisant la théorie des processus stochastiques. L'évolution de la matrice de Jacobi au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'observateur en remontant un faisceau lumineux n'est plus contrôlée par un processus purement déterministe ; intervient un élément stochastique, représentant la succession aléatoire des divers environnements (noyaux denses traversés, noyaux proches,...) rencontrés. Dans l'espace des paramètres en jeu - qui comprennent les composantes de la matrice - tout se passe comme si on avait à faire à un *processus de diffusion*, amenant un paquet de « particules » partant d'une même position dans cet espace de paramètres à se disperser progressivement. Les conditions rencontrées dans leurs trajets par les différents rayons lumineux convergeant vers l'observateur en provenance d'un échantillon de supernovæ, et les différentes séquences de matrices de Jacobi associées à chacun de ces rayons, sont considérées comme autant de réalisations particulières d'un *processus stochastique* unique. Les mathématiques de ces processus sont alors invoquées pour calculer la moyenne et la dispersion des distances en fonction du *redshift*.

5.2.1 De l'équation de Sachs à la moyenne et la dispersion des distances.

Les calculs s'effectuent en plusieurs étapes. La première est l'introduction dans l'équation de Sachs de termes stochastiques. La matrice optique, sur une position affine v fixée, est toujours décomposée en une partie liée au tenseur de Ricci, et l'autre liée au tenseur de Weyl. Mais chacune de ces deux composantes est la somme d'un terme déterministe - une moyenne - et un *bruit* prenant une valeur aléatoire. Différentes hypothèses³⁷ précisent la loi du processus stochastique contrôlant les deux bruits. Sous ces hypothèses, les grandeurs mobilisées se réduisent, sur une position v , pour la partie Ricci, à la valeur moyenne $\langle \mathcal{R} \rangle (v)$ et la valeur du bruit $\delta\mathcal{R}(v)$, et pour la partie Weyl, la valeur du bruit \mathcal{W} . L'équation de Sachs devient ainsi une équation différentielle du second ordre stochastique :

$$\frac{d^2}{dv^2} \mathcal{D} = \langle \mathcal{R} \rangle \mathcal{D} + (\delta\mathcal{R} + \mathcal{W}) \mathcal{D} \quad (19)$$

(37) Isotropie statistique, caractère gaussien, bruit blanc, ... : La partie Weyl a une moyenne nulle ; il n'y a pas dans ce modèle de corrélations entre le bruit Ricci et le bruit Weyl, ni de corrélations entre les valeurs du même bruit sur deux positions différentes. Par contre l'intensité de chaque bruit (les *covariances d'amplitude* $C_{\mathcal{R}}$ et $C_{\mathcal{W}}$) peut varier avec la position.

La théorie des processus stochastiques permet, dans les hypothèses de bruit adoptées, de transcrire l'équation de Sachs en une *équation de Fokker-Planck*³⁸. Cette équation contrôle l'évolution de la probabilité, de trouver, sur une position affine v , les composantes de la matrice de Jacobi et leur sensibilité aux variations de position, au voisinage d'une configuration $\mathcal{D}_{ab}, \dot{\mathcal{D}}_{ab}$ de valeurs données. C'est une équation aux dérivées partielles *déterministe* portant sur la fonction densité de probabilité $p(\mathcal{D}_{ab}, \dot{\mathcal{D}}_{ab}, v)$. De la forme $\frac{d}{dv}p(\mathcal{D}_{ab}, \dot{\mathcal{D}}_{ab}, v) = \dots$ elle comporte dans sa partie droite, un terme de *dérive* lié à la moyenne $\langle \mathcal{R}(v) \rangle$ et un terme de diffusion lié aux bruits Ricci et Weyl et à leurs intensités respectives $C_{\mathcal{R}}(v)$ et $C_{\mathcal{W}}(v)$. Sa solution est donc entièrement contenue dans ces trois dernières fonctions, lesquelles résultent de la distribution des grains et des vides dans l'Espace-Temps modélisé.

De l'équation de Fokker-Planck obtenue dérive les équations contrôlant l'évolution avec v des moyennes, des dispersions et des moments de tous ordres de la distribution de probabilité $p(\mathcal{D}_{ab}, \dot{\mathcal{D}}_{ab}, v)$; donc, au final, les équations contrôlant l'évolution avec v de la distance angulaire moyenne $\langle D_A \rangle$ ³⁹ et de son écart-type σ_A .

5.2.2 Application au modèle du fromage suisse

Le but des développements analytique précédents étaient, entre autres, de mieux comprendre les diagrammes de Hubble obtenus par simulation dans les modèles de type Fromage Suisse. Mais ces diagrammes décrivent l'allure de la distance-luminosité moyenne - donc aussi celle d'une distance angulaire moyenne - et de la dispersion observée de ces distances, en fonction du *redshift* z . On est donc contraint de faire des hypothèses sur la relation $z(v)$ et sur son éventuelle variation stochastique d'une géodésique à l'autre. L'hypothèse posée, dans le cas du Fromage Suisse, est que cette fonction n'est pas significativement affectée par les trous du fromage (cf. [6], D et [7], 6.2.1) : elle est alors la même que celle que l'on pose dans un Univers FL pur, donc indépendante du trajet lumineux concerné. Les équations obtenues sur v peuvent alors se transcrire dans des équations sur z : on est alors en mesure de calculer analytiquement la valeur de la moyenne et de la dispersion des distances pour un *redshift* donné, ce qui était le but recherché.

La comparaison de ces résultats analytiques avec ceux obtenus par simulation montrent une bonne correspondance au niveau des moyennes. Par contre, la dispersion des valeurs de distances pour un *redshift* donné apparaît nettement sous-estimée par les calculs analytiques. Les hypothèses de gaussianité et de bruit brownien ayant permis le passage à l'équation de Fokker-Planck semblent en cause. Les modèles de diffusion de type brownien impliquent en effet, pour la particule, un nombre considérable de collision, ce qui assure la convergence vers les conditions du théorème central limite. Dans le contexte qui nous occupe ici, l'équivalent des collisions, savoir les déflexions du rayon lumineux suite à la rencontre avec un trou, sont incommensurablement moins nombreux :

(38) Cette transcription passe par un intermédiaire, une équation différentielle stochastique cette fois ci du premier ordre, l'*équation de Langevin*. Cette équation donne, à l'échelle d'une « particule », la loi d'un mouvement déterministe couplé à un mouvement brownien.

(39) Rappelons que la distance angulaire est égale à la racine carrée du déterminant de la matrice de Jacobi.

le théorème central limite ne s'applique plus ; le problème reste donc ouvert de trouver un modèle analytique plus élaboré.

Références

- [1] R. A. Alpher and R. Herman. *Early work on 'big-bang' cosmology and the cosmic blackbody radiation*, page 129. 1990.
- [2] M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, **340** :291–472, Jan. 2001.
- [3] J. Bergé. *Les lentilles gravitationnelles faibles vers la cosmologie de haute précision*. PhD thesis, Université de Paris Sud, décembre 2007.
- [4] F. Bernardeau. *Cosmologie, des fondements théoriques aux observations*. Savoirs actuels. EDP Sciences, 2007.
- [5] P. Fleury, H. Dupuy, and J.-P. Uzan. Can All Cosmological Observations Be Accurately Interpreted with a Unique Geometry ? *Physical Review Letters*, **111**(9) :091302, Aug. 2013.
- [6] P. Fleury, H. Dupuy, and J.-P. Uzan. Interpretation of the Hubble diagram in a nonhomogeneous universe. *Physical Review D*, **87**(12) :123526, June 2013.
- [7] P. Fleury, J. Larena, and J.-P. Uzan. The theory of stochastic cosmological lensing. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **11** :022, Nov. 2015.
- [8] C. Heymans, L. Van Waerbeke, L. Miller, T. Erben, H. Hildebrandt, H. Hoekstra, T. D. Kitching, Y. Mellier, P. Simon, C. Bonnett, J. Coupon, L. Fu, J. Harnois Déraps, M. J. Hudson, M. Kilbinger, K. Kuijken, B. Rowe, T. Schrabback, E. Semboloni, E. van Uitert, S. Vafaei, and M. Velander. CFHTLenS : the Canada-France-Hawaii Telescope Lensing Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **427** :146– 166, Nov. 2012.
- [9] P. Peter and J.-P. Uzan. *Cosmologie primordiale*. Echelles. Belin, Paris, 2005.
- [10] C. Pitrou, T. S. Pereira, and J.-P. Uzan. Weak lensing by the large scale structure in a spatially anisotropic universe : Theory and predictions. *Physical Review D*, **92**(2) :023501, July 2015.
- [11] C. Pitrou, J.-P. Uzan, and T. S. Pereira. Weak lensing B modes on all scales as a probe of local isotropy. *Physical Review D*, **87**(4) :043003, Feb. 2013.
- [12] J.-P. Uzan and F. Bernardeau. Lensing at cosmological scales : A test of higher dimensional gravity. *Physical Review D*, **64**(8) :083004, Oct. 2001.
- [13] L. van Waerbeke, F. Bernardeau, and Y. Mellier. Efficiency of weak lensing surveys to probe cosmological models. *Astronomy and Astrophysics*, **342** :15–33, Feb. 1999.
- [14] L. Van Waerbeke, Y. Mellier, T. Erben, J. C. Cuillandre, F. Bernardeau, R. Maoli, E. Bertin, H. J. McCracken, O. Le Fèvre, B. Fort, M. DantelFort, B. Jain, and P. Schneider. Detection of correlated galaxy ellipticities from CFHT data : first evidence for gravitational lensing by large-scale structures. *Astronomy and Astrophysics*, **358** :30–44, June 2000.

5

Cosmology with the Planck Satellite: from quantum foam to the cosmic web

François R. Bouchet

Institut d'Astrophysique de Paris, CNRS & Sorbonne Université-UPMC,
8 bis Boulevard Arago, F-75014, Paris, France

Abstract

Sketched out in 1992, selected by the European Space Agency in 1996, and launched in 2009, the Planck satellite was shut off in 2013, after a measuring campaign that exceeded all expectations. The *Planck* collaboration delivered a first set of cosmological data and results in March 21st 2013, and the full set in February 2015. A final “legacy” delivery is expected for mid-2017. The 2015 data delivery provides a “definitive” map of the anisotropies of the Cosmic Microwave Background (CMB), its angular power spectrum together with their full statistical characterisation. The 2015 delivery also includes pioneering polarisation data. I describe results we obtained so far from these temperature and polarisation data, both in terms of content of the universe and of characteristics of the primordial fluctuations. This overview is entirely based on the published or submitted works of the *Planck* collaboration.

Résumé

Cosmologie avec le satellite Planck : depuis la mousse quantique jusqu'au réseau cosmique

Ebauché dans ses grandes lignes en 1992, retenu par l'Agence Spatiale Européenne en 1996, lancé en 2009, le satellite Planck s'est arrêté de fonctionner en 2013, après une campagne de mesures qui a dépassé toutes les attentes. La collaboration Planck a produit un premier ensemble de données cosmologiques et de résultats le 21 mars 2013, avant d'en fournir un ensemble complet en février 2015. La livraison finale est attendue pour milieu 2017. La livraison 2015 fournit une carte « définitive » des anisotropies du fonds diffus micro-ondes, son spectre de puissance angulaire et en donne en même temps une complète caractérisation statistique. Cette fournée 2015 inclut également des données originales sur la polarisation du fonds diffus. Je décris les résultats obtenus jusqu'ici, à partir des données de température et des données de polarisation, concernant les paramètres caractérisant le contenu de l'univers comme ceux caractérisant les fluctuations primordiales. Cette revue est entièrement basée sur les travaux de la collaboration Planck, déjà publiés ou soumis.

I. The Planck mission

The European Space Agency's *Planck* satellite¹ (Tauber et al. 2010; Planck Collaboration I 2011) is dedicated to studying the early Universe and its subsequent evolution. The satellite was launched on May 14th 2009 and scanned the microwave and sub-millimetre sky continuously between 12 August 2009 and 23 October 2013. *Planck*'s scientific payload contained an array of 74 detectors in nine frequency bands sensitive to frequencies between 25 and 1000 GHz, which scanned the sky with angular resolution between 33' and 5'. The detectors of the Low Frequency Instrument (LFI; Bersanelli et al. 2010; Mennella et al. 2011) were pseudo-correlation radiometers, covering bands centred at 30, 44, and 70 GHz. The detectors of the High Frequency Instrument (HFI; Lamarre et al. 2010; Planck HFI Core Team 2011) were bolometers, cooled² at 0.1 ± 0.001 K and covering bands centred at 100, 143, 217, 353, 545, and 857 GHz. *Planck* imaged the whole sky twice per year, with a combination of sensitivity, angular resolution, and frequency coverage never before achieved. *Planck*, its payload, and its performance as predicted at the time of launch are described in 13 papers included in a special issue of *Astronomy & Astrophysics* (Volume 520). All results obtained so far are discussed in detail in a suite of more than 150 papers by the *Planck* collaboration.

A summary of the characteristics of the LFI and HFI maps based on the data of the full mission is provided in tables 1 & 2. Note in particular the excellent sensitivity achieved by HFI

(1) *Planck* (<http://www.esa.int/Planck>) is a project of the European Space Agency (ESA) with instruments provided by two scientific consortia funded by ESA member states and led by Principal Investigators from France and Italy, telescope reflectors provided through a collaboration between ESA and a scientific consortium led and funded by Denmark, and additional contributions from NASA (USA).

(2) Since the HFI operational temperature of 0.1 K was achieved thanks to an open loop dilution fridge, the HFI took survey data till the exhaust of the cryogens, i.e. for about 30 months, while the LFI kept taking data for the full duration of about 4 years.

Table 1. Main characteristics of LFI full mission maps.

Characteristic	Frequency band		
	30 GHz	44 GHz	70 GHz
Centre frequency [GHz]	28.4	44.1	70.4
Effective beam FWHM ^a [arcmin]	32.29	27.00	13.21
Effective beam ellipticity ^a	1.32	1.04	1.22
Temperature noise (1°) ^b [μK_{CMB}]	2.5	2.7	3.5
Polarization noise (1°) ^b [μK_{CMB}]	3.5	4.0	5.0
Overall calibration uncertainty ^c [%]	0.35	0.26	0.20
Systematic effects uncertainty in Stokes I^d [μK_{CMB}]	0.19	0.39	0.40
Systematic effects uncertainty in Stokes Q^d [μK_{CMB}]	0.20	0.23	0.45
Systematic effects uncertainty in Stokes U^d [μK_{CMB}]	0.40	0.45	0.44

^a Calculated from the main beam solid angle of the effective beam, $\Omega_{\text{eff}} = \text{mean}(\Omega)$. These values are used in the source extraction pipeline (Planck Collaboration XXVI 2015).

^b Noise rms computed after smoothing to 1°.

^c Sum of the error determined from the absolute and relative calibration, see Planck Collaboration IV (2015).

^d Estimated rms values over the full sky and after full mission integration. Not included here are gain reconstruction uncertainties, estimated to be of order 0.1%.

in the core CMB channels, on which most cosmology results rely, of 1.29, 0.55, 0.78 μK_{CMB} deg at (respectively) 100, 143, and 217 GHz. These numbers indicate the rms of the fluctuations contributed by detector noise in pixels of 1 degree on a side (leading to 7.5, 4.3, 8.7 μK_{CMB} per (Gaussian) beam solid angle of FWHM equal to 9.66, 7.22, 4.90 arcmin (the rms of the CMB anisotropy is about 100 μK_{CMB}). For white noise (a reasonable approximation at scales below a degree), the detector noise scales inversely proportional to the pixel linear size.

2. CMB maps from Planck

The nine all-sky high-sensitivity high angular resolution *Planck* maps in intensity (figure 1) and their associated polarisation maps at seven frequencies are a treasure trove for astrophysics, which have already allowed many progresses in the understanding of the various astrophysical sources of emission in the millimetre and sub-millimetre range, e.g., on the diffuse Galactic emission (in particular synchrotron, free-free, CO, spinning and thermal dust), as well as compact sources (radio-sources, Infra-red galaxies, Sunyaev-Zel'dovich clusters) and the unresolved Cosmic Infra-red background, which is the integrated light from all infrared sources along the line of sight.

Table 2. Main characteristics of HFI full mission maps.

Characteristic	Reference frequency ν [GHz]						Notes
	100	143	217	353	545	857	
Number of bolometers	8	11	12	12	3	4	a1
Effective beam FWHM ₁ [arcmin]	9.68	7.30	5.02	4.94	4.83	4.64	b1
Effective beam FWHM ₂ [arcmin]	9.66	7.22	4.90	4.92	4.67	4.22	b2
Effective beam ellipticity ϵ	1.186	1.040	1.169	1.166	1.137	1.336	b3
Noise per beam solid angle [μK_{CMB}]	7.5	4.3	8.7	29.7			c1
[kJy sr^{-1}]	9.1	8.8	c1
Temperature noise [μK_{CMB} deg]	1.29	0.55	0.78	2.56	c2
[kJy sr^{-1} deg]	0.78	0.72	c2
Polarization noise [μK_{CMB} deg]	1.96	1.17	1.75	7.31	c3
Calibration accuracy [%]	0.09	0.07	0.16	0.78	1.1(+5)	1.4(+5)	d
CIB monopole prediction [MJy sr^{-1}]	0.0030	0.0079	0.033	0.13	0.35	0.64	e

^{a1} Number of bolometers whose data were used in producing the channel map.

^{b1} FWHM of the Gaussian whose solid angle is equivalent to that of the effective beams.

^{b2} FWHM of the elliptical Gaussian fit.

^{b3} Ratio of the major to minor axis of the best-fit Gaussian averaged over the full sky.

^{c1} Estimate of the noise per beam solid angle, as given in *b1*.

^{c2} Estimate of the noise in intensity scaled to 1° assuming that the noise is white.

^{c3} Estimate of the noise in polarization scaled to 1° assuming that the noise is white.

^d Calibration accuracy (at 545 and 857 GHz, the 5 % accounts for the model uncertainty).

^e According to the Béthermin et al. (2012) model, whose uncertainty is estimated to be at the 20 % level (also for constant νI_i).

2.1 CMB map cleaning

In order to clean the background CMB map from foreground emissions from our and other galaxies, we have used four different approaches (Commander, NILC, SEVEM, SMICA) which combine differently the various frequency maps. Indeed, different methods have different objectives and possibilities, in line with the specific stochastic problem they set out to solve best. Each component separation method produces at least a CMB map, a confidence map (*i.e.*, a mask), an effective beam, and a noise estimate map, together characterising that CMB map. Their (lack of) difference allows to probe which features are truly resilient. Figure 2 illustrates the results of one of them (here SMICA).

2.2 CMB map isotropy and general non-Gaussian statistics

The previous CMB maps may be used to study the statistical isotropy and Gaussianity of the CMB. Here I survey null-hypothesis testing: a number of tests are performed, then p-values are calculated. A posteriori correction for “look-elsewhere effect” was addressed whenever possible. However, it is in the very nature of such a model-independent approach to leave the interpretation to further research.

All of the results we obtained are robust with respect to the choice of component separated CMB map. This is important since it demonstrates the high quality and equivalence for that purpose of the *Planck* component-separated data products rendered by different methodologies under varying assumptions.

It is found that the CMB is largely consistent with statistical isotropy, although there are a few indications of anomalies with respect to the expectations of the Λ CDM cosmological model. Some of the tests performed in 2015 are the same as those in the 2013 release, in which case the results are consistent. Since many of these anomalies were also observed in the WMAP temperature data, the agreement between the two independent experiments effectively rules out the possibility that the origin of these features can be found in residual systematic artefacts present in either data set (either originating from the instruments or foregrounds).

Aspects of the statistics of the CMB fluctuations were assessed with tests of skewness, kurtosis, multinormality, N-point functions, and Minkowski functionals, and none yielded indications of significant departures from Gaussianity, while the variance of the CMB map was found to be low, in agreement with previous studies. First-order moments of filtered maps also exhibit the low variance anomaly, as well as a kurtosis excess on certain scales associated with the so called “Cold Spot”. A study of peak statistics finds results consistent with the expectations for a Gaussian random field, although the Cold Spot is again detected.

The low variance anomaly appears to be associated with the known low- ℓ deficit in the angular power spectrum (see §3.3 below). The lack of large-scale angular correlations, the relatively featureless northern ecliptic hemisphere 3- and 4-point functions, and indications of violations of point- and mirror-parity symmetry are also confirmed (although little attempt was made to correct these for a posteriori effects). Tight constraints on a quadrupolar power modulation were also obtained.

The now well-known large-scale dipolar power asymmetry (at 7% level) was given particular attention. This asymmetry was detected via pixel-to-pixel variance, as well as by measuring power explicitly or indirectly via ℓ to $\ell \pm 1$ mode coupling. The latter approach lends itself to a posteriori correction, which reduces the significance of the asymmetry substantially when no model for the anomaly is assumed. In addition, two independent but related tests of directionality were conducted: one finds suggestions of anomalous clustering of directions out to relatively small scales while the other does not, evidently due to being optimized for slightly different forms of directionality.

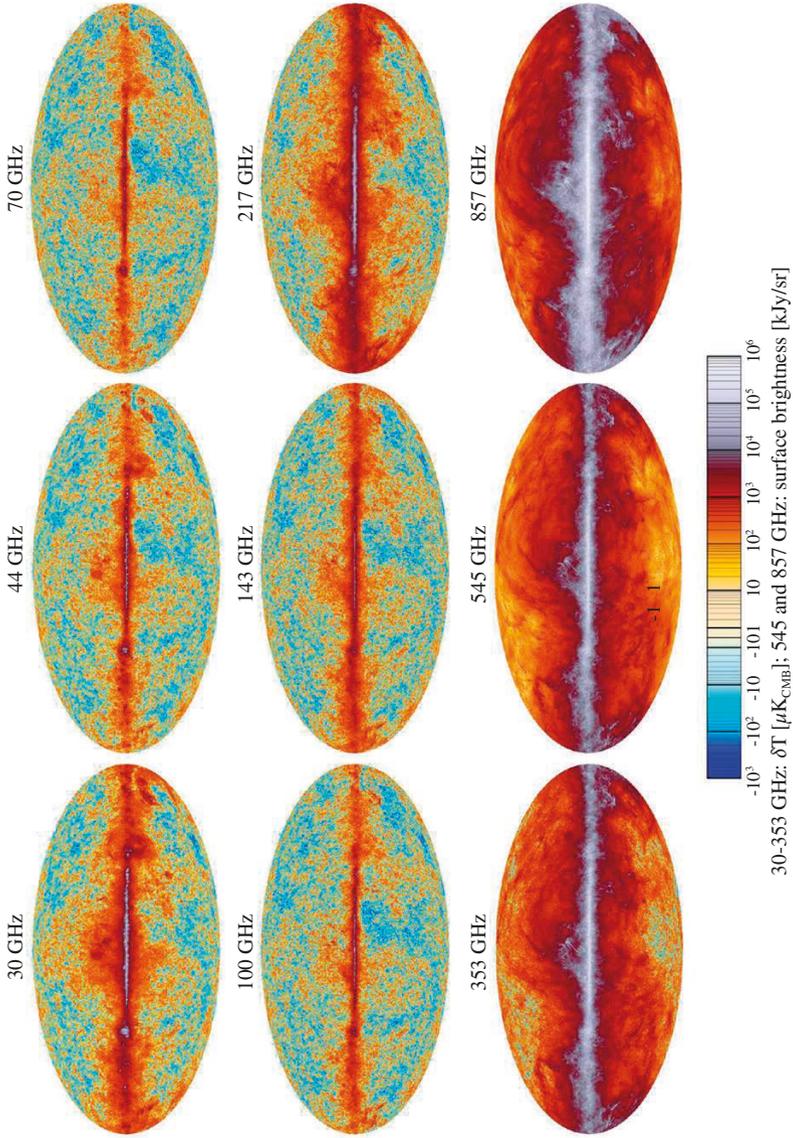


Figure 1. The nine Planck frequency maps between 30 and 857 GHz (these are the central frequency of the bands). The color scale, based on an inversion of the function $y = 10^x - 10^{-x}$, is tailored to show the full dynamic range of the maps.

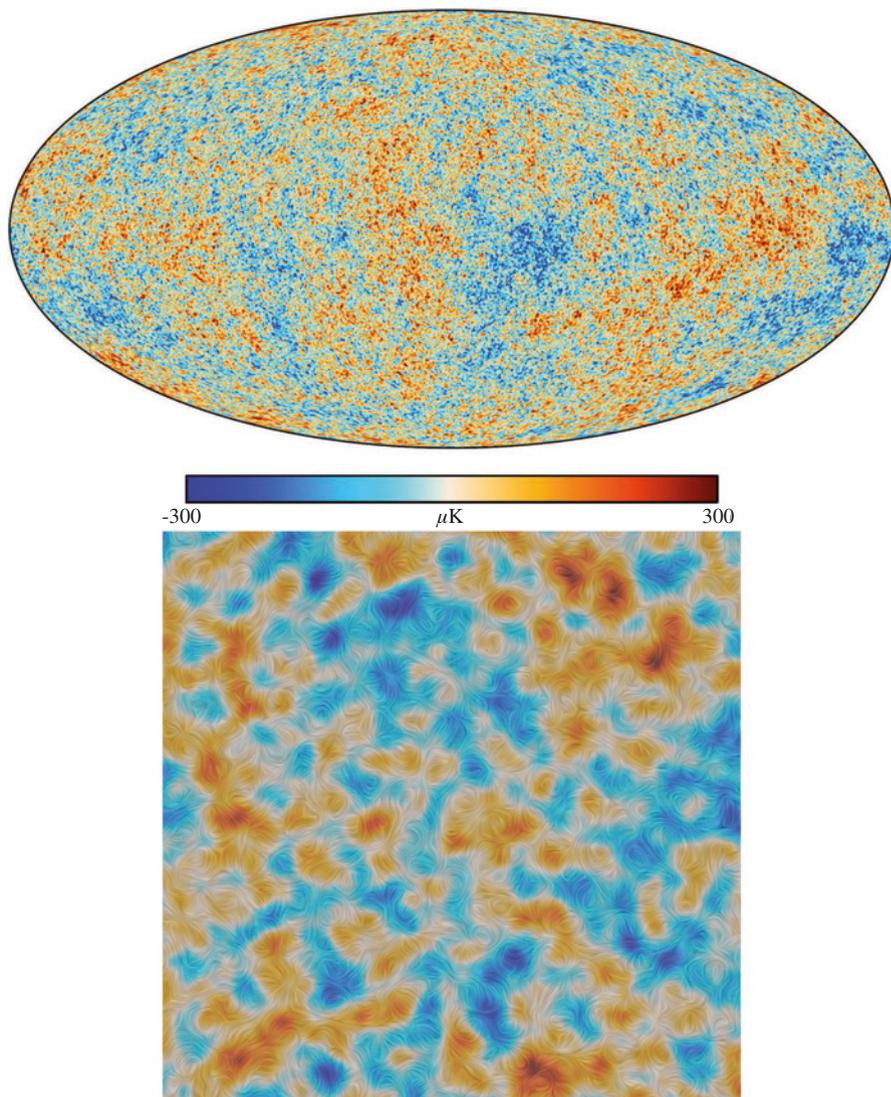


Figure 2. Top: Planck 2015 temperature anisotropies map. A small strip in the direction of the Galactic plane is filled in by a constrained realization that has the same statistical properties as the rest of the sky (this area of the sky is obviously not used for any CMB science analysis). Bottom: Planck 2015 CMB polarisation map zoomed, with 20 arc minute smoothing, revealing smaller scales details (the data is natively at 5 minutes of arc resolution). The coloured background shows the temperature anisotropies, enabling to visually perceive the correlation between the temperature and polarisation fields.

Finally, stacking of temperature and polarization peaks was analysed. They are largely consistent with statistically isotropic simulations, both for oriented and unoriented stacking. The exception is a low unoriented temperature profile, which seems to be yet another reflection of the large-scale power deficit.

With the Planck 2015 release, one is probably near the limit of our ability to probe the CMB anomalies with temperature fluctuations alone. The use of large-angular-scale polarization, expected for the final Planck release in 2017, should enable independent tests of these peculiar features. Importantly, this will reduce or eliminate the subjectivity and ambiguity in interpreting their statistical significance. It is a tantalizing possibility that some of the anomalies described so far will take us beyond the standard model of cosmology. All of these results are detailed in Planck Collaboration XVI (2015).

3. Power spectra from *Planck*

The CMB angular power spectra contain all of the information available if the CMB is statistically isotropic and distributed as a multivariate Gaussian, which we now know is an excellent approximation. For realistic data, these empirical spectra must be augmented with models of instrumental noise, of various instrumental or processing systematic effects, and of contamination from astrophysical foregrounds. The CMB power spectra are in turn uniquely determined by the underlying cosmological model and its parameters. In temperature, the power spectrum has been measured over large fractions of the sky by *COBE* (Wright et al. 1996) and *WMAP* (Bennett et al. 2013), and in smaller regions by a host of balloon and ground-based telescopes (e.g., Netterfield et al. 1997; Hanany et al. 2000; Grainge et al. 2003; Pearson et al. 2003; Tristram et al. 2005; Jones et al. 2006; Reichardt et al. 2009; Fowler et al. 2010; Das et al. 2011; Keisler et al. 2011; Story et al. 2012; Das et al. 2013). The *Planck* 2013 power spectrum and likelihood were discussed in Planck Collaboration XV (2014), and the 2015 analysis may be found in Planck Collaboration XX (2015).

Over the last decade, CMB intensity (temperature) has been augmented by linear polarization data (e.g., Kovac et al. 2002; Kogut et al. 2003; Sievers et al. 2007; Dunkley et al. 2009; Pryke et al. 2009; QUIET Collaboration et al. 2012; Polarbear Collaboration et al. 2014). Because linear polarization is given by both an amplitude and direction, it can in turn be decomposed into two coordinate-independent quantities with different dependence on the cosmology (e.g., Kamionkowski et al. 1997; Zaldarriaga and Seljak 1997). One, the so-called *E* mode which is the curl-free part, is determined by much the same physics as the intensity, and therefore allows an *independent* measurement of the background cosmology, as well as an improved determination of some parameters (e.g., the reionization optical depth). The other polarization observable, the *B* mode, is only sourced at early times by tensor modes (gravitational radiation), as produced for example during an inflationary epoch. The *E* and *B* components are also conventionally taken to be isotropic Gaussian random fields, with only *E* expected to be correlated with intensity. Thus we expect to be able to measure four independent power spectra, namely the three auto-spectra C_l^{TT} , C_l^{EE} and C_l^{BB} , along with the cross-spectrum C_l^{TE} .

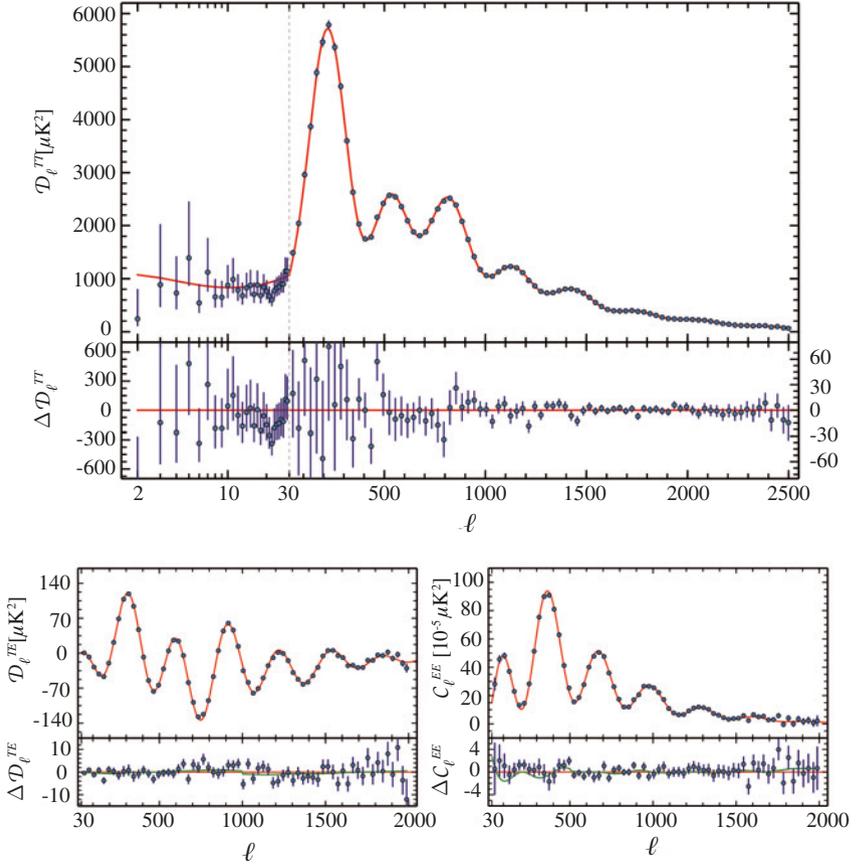


Figure 3. Planck 2015 CMB power spectra of TT (top), TE and EE (bottom), compared with the base Λ CDM fit (red line). The upper panels show the binned spectra and the lower panels the residuals of the fit. For all plots, the horizontal scale changes from logarithmic to linear at the hybridization scale, $\ell = 29$. For the residuals, the vertical axis scale changes as well, shown by different left and right tick marks. Note that we show $\mathcal{D}_\ell = \ell(\ell+1) C_\ell / (2\pi)$ for TT and TE but C_ℓ for EE, which also has different vertical scales at low- and high- ℓ .

The distribution of temperature and polarization on the sky is further affected by gravitational lensing by the inhomogeneous mass distribution along the line of sight between the last scattering surface and the observer. This introduces correlations between large and small scales, which can be gauged by computing the expected contribution of lensing to the 4-point function (i.e., the trispectrum). This can in turn be used to determine the power spectrum of the lensing potential, as is done in Planck Collaboration XV (2015) for the 2015 *Planck* release, and to further constrain the cosmological parameters via a separate likelihood function (Planck Collaboration XIII 2015). The following paragraphs

provide an introduction to both (2-pt and lensing 4-pt). The lensing effect, in addition to modifying the T and E fields, generates B modes (from the initial E ones) which superimpose on any possible primordial ones.

3.1 CMB power spectra from *Planck*

The *Planck* paper Planck Collaboration XX (2015) obtains the C_1^{TT} , C_1^{EE} and C_1^{TE} spectra (figure 3), likelihood functions, and basic cosmological parameters from the 2015 release. It shows that the contribution of high- ℓ systematic errors to the polarization spectra are at quite a low level (of the order of a few $(\mu\text{K})^2$), therefore allowing an interesting comparison of the polarization-based cosmological results with those derived from C_1^{TT} alone. *Planck* presented results for C_1^{TE} and C_1^{EE} at high multipoles. However, the technical difficulties involved with polarization measurements and subsequent data analysis, along with the inherently lower signal-to-noise ratio (especially for B modes), thus require a careful understanding of the random noise and instrumental and astrophysical systematic effects which is less definitive than in temperature. For this reason, at large angular scales (*i.e.*, low multipoles ℓ) the 2015 baseline results use only a subset of *Planck* polarization data.

Because of these different sensitivities to systematic errors at different angular scales, as well as the increasingly Gaussian behaviour of the likelihood function at smaller angular scales, *Planck* adopted a hybrid approach to the likelihood calculation (Efstathiou 2004, 2006), splitting between a direct calculation of the likelihood on large scales and the use of pseudo-spectral estimates at smaller scales.

At low multipoles, the current *Planck* release implements a standard joint pixel-based likelihood including both temperature and polarization for multipoles $\ell \leq 29$. For temperature, the formalism uses the cleaned Commander (Eriksen et al. 2004, 2008) maps, while for polarization we used the 70 GHz LFI maps³ and explicitly marginalize over the 30 GHz and 353 GHz maps taken as tracers of synchrotron and dust emission, respectively, accounting in both cases for the induced noise covariance in the likelihood.

At high multipoles ($\ell > 29$), as in Planck Collaboration XV (2014), we use a likelihood function based on pseudo- $C_{\ell S}$ calculated from *Planck* HFI data, as well as further parameters describing the contribution of foreground astrophysical emission and instrumental effects (*e.g.*, calibration, beams). Aside from the processing improvements of the data themselves, the main advances over 2013 include the use of high- ℓ polarization information along with more detailed models of foregrounds and instrumental effects. We constructed our likelihood approximation at high- ℓ by compressing all of the individual *Planck* detector data into mask-corrected (pseudo-) cross-spectra, and built a grand likelihood using these spectra and the corresponding analytical covariance matrix:

$$-\ln \mathcal{L}(\hat{C}|C(\theta)) = \frac{1}{2} [\hat{C} - C(\theta)]^T \mathbf{C}^{-1} [\hat{C} - C(\theta)] + \text{const} , \quad (1)$$

(3) The HFI data, having much less noise, therefore requires a much tighter control of any residual systematic effect, and we preferred to defer this more powerful but delicate analysis to a later release.

where \hat{C} is the data vector, $C(\theta)$ is the model with parameters θ , and C is the covariance matrix. Note that this formalism allows to separately marginalize over or condition upon different components of the model vector, separately treating cases such as individual frequency-dependent spectra, or temperature and polarization spectra. Obviously, *Planck* maps at different frequencies have different constraining powers on the underlying CMB, and we used this to impose and assess various cuts to keep only the most relevant data in the data vector. Indeed, we retained only the three best CMB *Planck* channels, *i.e.*, 100 GHz, 143 GHz, and 217 GHz, in the multipole range where they have significant CMB contributions and low enough foreground contamination after masking. Further, in order to achieve a significant reduction in the covariance matrix size (and computation time), we compressed the data vector (and accordingly the covariance matrix), both by co-adding the individual detectors for each frequency and by binning the combined power spectra.

The construction of a Gaussian approximation to the likelihood function requires building covariance matrices for the pseudo-power spectra. Mathematically exact expressions exist, but they are prohibitively expensive to calculate numerically at *Planck* resolution (Wandelt et al. 2001); we thus made use of analytical approximations (Hansen et al. 2002; Hinshaw et al. 2003; Efstathiou 2004; Challinor and Chon 2005). For our baseline likelihood, we calculate covariance matrices for all 45 unique detector combinations that can be formed out of the six frequency-averaged half-mission maps at 100, 143, and 217 GHz. To do so, we assume a fiducial power spectrum that includes the data variance induced by the CMB and all identified foreground components (which allow a good description of all relevant *Planck* data, including at frequencies not used in the likelihood); this variance is computed assuming these components are Gaussian-distributed. The effect of this approximation regarding Galactic foregrounds was shown negligible by means of simulations. The fiducial model is taken from the best-fit cosmological and foreground parameters; since they only become available after a full exploration of the likelihood, we iteratively refined our initial guess.

The resulting spectra are shown in figure 3, with the full statistical description being embodied in a likelihood code (applied to a set of empirical spectra from *Planck*) which numerically returns the likelihood of an input set of theoretical CMB spectra, and accounts for relevant uncertainties both instrumental and astrophysical in nature (as well as the correlations induced by the specific processing of the data). This code is publicly available. With this release, *Planck* now detects 36 extrema in total, consisting of 19 peaks and 17 troughs. The figure also shows the best-fit base- Λ CDM model obtained from TT data alone (red lines), which is a sufficient description for all spectra.

Detailed checks of consistency and null tests lead us to conclude that there might still be low-level systematics residuals in the *E* polarisation spectra which are not yet fully unaccounted for, at the $\mathcal{O}(1\mu\text{K}^2)$, an example of which is shown by the green lines in the bottom panel. We therefore advised against using this polarisation information for testing non-minimal models differing from more standard cases by wiggles of that order of magnitude. Nevertheless, the high-multipole polarization spectra from *Planck* are already good enough to allow a separate high-accuracy determination of the parameters of the Λ CDM model, showing consistency with those established independently from temperature information alone. As a graphical example of this consistency, the bottom panel of

figure 3 shows in red, superimposed to the data, the predicted TE and EE spectra within the Λ CDM model with the best parameters obtained on TT alone (also shown in red in the top TT panel). The fit is indeed very good, which is confirmed by more detailed statistical analysis.

One way of assessing the constraining power contained in a particular measurement of CMB anisotropies is to determine the effective number of $a_{\ell m}$ modes that have been measured. This is equivalent to estimating 2 times the square of the total S/N in the power spectra, a measure that contains all the available cosmological information if we assume that the anisotropies are purely Gaussian (and hence ignore all non-Gaussian information coming from lensing, the CIB, cross-correlations with other probes, etc.). Carrying out this procedure for the *Planck* 2013 TT power spectrum data yields the number 826 000 (which includes the effects of instrumental noise, cosmic variance and masking). The 2015 TT data have increased this value to 1 114 000 (in large part due to the increased fraction of the sky used), with TE and EE adding a further 60 000 and 96 000 modes, respectively. From this perspective the 2015 *Planck* data constrain approximately 55% more modes than in the 2013 release. Of course this is not the whole story, since some pieces of information are more valuable than others, and in fact *Planck* is able to place considerably tighter constraints on particular parameters (e.g., reionization optical depth or certain extensions to the base Λ CDM model) by including new polarization data.

3.2 Λ CDM constraints from *Planck* CMB spectra alone

The base (minimal) Λ CDM model with 6 parameters provides excellent fit to the data, including now in polarisation. The numerical values of the *Planck* 2015 cosmological parameters for Λ CDM are given in table 3 (columns 2 and 5) in both cases. The tightening of the constraints when polarisation information is added to the temperature one is relatively modest for base Λ CDM (i.e., without considering any extension of the minimal 6 parameters model), due to the fact that they access mostly the same information for Λ CDM, albeit through different physical mechanisms. Maybe more impressive is actually the fact that high- ℓ temperature-polarisation correlation in TE is already providing constraints which are of comparable precision for most Λ CDM parameters than those arising from the corresponding TT part. Not only does this offers a strong confirmation of the basic physics at play when not so long ago we had no single experiment constraining all the basic parameters, but it also constrains rather tightly potential extensions, like the existence of primordial isocurvature modes in addition to the dominating adiabatic ones.

We verified that degeneracies between foreground and calibration parameters generally do not affect the determination of the cosmological parameters. We further note that power spectra and parameters derived from CMB maps obtained by the component-separation methods described above and in *Planck* Collaboration IX (2015) are generally consistent with those obtained here, at least when restricted to the $\ell < 2000$ range in TT where they can be trusted for that purpose. We also checked that the derived foreground properties are consistent with current astrophysical knowledge. Of course, we also verified the consistency with the results from other CMB experiments.

Table 3. Parameter confidence limits from Planck CMB power spectra, in combination with lensing reconstruction ("lensing") and external data ("ext", for $\text{BAO}+\text{JLA}+H_0$). Note that TT,TE,EE is actually a shorthand for Plik TT,TE,EE. The first set of rows gives 68% limits for the base ΛCDM model, the second set gives 68% constraints on a number of derived parameters (as obtained from the constraints on the parameters used to specify the base ΛCDM model). The third set below the double line gives 95% limits for some one parameter extensions to the ΛCDM model. In all cases the helium mass fraction used is that predicted by BBN (with a posterior mean $Y_p \approx 0.2453$, and theoretical uncertainties in the BBN predictions dominating over the Planck error on $\Omega_b h^2$).

Parameter	Plik TT+lowTEB 68% limits	Plik TT+lowTEB+lensing 68% limits	Plik TT+lowTEB+lensing+ext 68% limits	TT,TE,EE+lowTEB 68% limits	TT,TE,EE+lowTEB+lensing 68% limits	TT,TE,EE+lowTEB+lensing+ext 68% limits
$\Omega_b h^2$	0.02222 ± 0.00023	0.02226 ± 0.00023	0.02227 ± 0.00020	0.02225 ± 0.00016	0.02226 ± 0.00016	0.02230 ± 0.00014
$\Omega_c h^2$	0.1197 ± 0.0022	0.1186 ± 0.0020	0.1184 ± 0.0012	0.1198 ± 0.0015	0.1193 ± 0.0014	0.1188 ± 0.0010
100 θ_{MC}	1.04085 ± 0.00047	1.04103 ± 0.00046	1.04106 ± 0.00041	1.04077 ± 0.00032	1.04087 ± 0.00032	1.04093 ± 0.00030
τ	0.078 ± 0.019	0.066 ± 0.016	0.067 ± 0.013	0.079 ± 0.017	0.063 ± 0.014	0.066 ± 0.012
$\ln(10^{10} A_s)$	3.089 ± 0.036	3.062 ± 0.029	3.064 ± 0.024	3.094 ± 0.034	3.059 ± 0.025	3.064 ± 0.023
n_s	0.9655 ± 0.0062	0.9677 ± 0.0060	0.9681 ± 0.0044	0.9645 ± 0.0049	0.9653 ± 0.0048	0.9667 ± 0.0040
H_0	67.31 ± 0.96	67.81 ± 0.92	67.90 ± 0.55	67.27 ± 0.66	67.51 ± 0.64	67.74 ± 0.46
Ω_Λ	0.685 ± 0.013	0.692 ± 0.012	0.6935 ± 0.0072	0.6844 ± 0.0091	0.6879 ± 0.0087	0.6911 ± 0.0062
Ω_m	0.315 ± 0.013	0.308 ± 0.012	0.3065 ± 0.0072	0.3156 ± 0.0091	0.3121 ± 0.0087	0.3089 ± 0.0062
$\Omega_m h^2$	0.1426 ± 0.0020	0.1415 ± 0.0019	0.1413 ± 0.0011	0.1427 ± 0.0014	0.1422 ± 0.0013	0.14170 ± 0.00097
$\Omega_m h^3$	0.09597 ± 0.00045	0.09591 ± 0.00045	0.09593 ± 0.00045	0.09601 ± 0.00029	0.09596 ± 0.00030	0.09598 ± 0.00029
σ_8	0.829 ± 0.014	0.8149 ± 0.0093	0.8154 ± 0.0090	0.831 ± 0.013	0.8150 ± 0.0087	0.8159 ± 0.0086
z_{dr}	$9.9^{+1.8}_{-1.6}$	$8.8^{+1.7}_{-1.4}$	$8.9^{+1.3}_{-1.2}$	$10.0^{+1.7}_{-1.5}$	$8.5^{+1.4}_{-1.2}$	$8.8^{+1.2}_{-1.1}$
Age/Gyr	13.813 ± 0.038	13.799 ± 0.038	13.796 ± 0.029	13.813 ± 0.026	13.807 ± 0.026	13.799 ± 0.021
k_D	0.14050 ± 0.00052	0.14024 ± 0.00047	0.14022 ± 0.00042	0.14059 ± 0.00032	0.14044 ± 0.00032	0.14038 ± 0.00029
z_{eq}	3393 ± 49	3365 ± 44	3361 ± 27	3395 ± 33	3382 ± 32	3371 ± 23
k_{eq}	0.01035 ± 0.00015	0.01027 ± 0.00014	0.010258 ± 0.000083	0.01036 ± 0.00010	0.010322 ± 0.000096	0.010288 ± 0.000071
Ω_K	$-0.052^{+0.049}_{-0.055}$	$-0.005^{+0.016}_{-0.017}$	$-0.0001^{+0.0054}_{-0.0052}$	$-0.040^{+0.038}_{-0.041}$	$-0.004^{+0.015}_{-0.015}$	$0.0008^{+0.0040}_{-0.0039}$
$\Sigma m\nu$ [eV]	< 0.715	< 0.675	< 0.234	< 0.492	< 0.589	< 0.194
N_{eff}	$3.13^{+0.64}_{-0.63}$	$3.13^{+0.62}_{-0.61}$	$3.15^{+0.41}_{-0.40}$	$2.99^{+0.41}_{-0.39}$	$2.94^{+0.38}_{-0.38}$	$3.04^{+0.33}_{-0.33}$
Y_p	$0.252^{+0.0041}_{-0.0042}$	$0.251^{+0.0040}_{-0.0039}$	$0.251^{+0.0035}_{-0.0036}$	$0.250^{+0.0026}_{-0.0027}$	$0.247^{+0.0026}_{-0.0027}$	$0.249^{+0.0025}_{-0.0026}$
$dN_s/d\ln k$	$-0.0008^{+0.0016}_{-0.0016}$	$-0.0003^{+0.0015}_{-0.0015}$	$-0.0003^{+0.0015}_{-0.0014}$	$-0.0006^{+0.0014}_{-0.0014}$	$-0.0002^{+0.0013}_{-0.0013}$	$-0.0002^{+0.0013}_{-0.0013}$
$\tau_{0.002}$	< 0.103	< 0.114	< 0.114	< 0.0987	< 0.112	< 0.113
ω	$-1.54^{+0.62}_{-0.50}$	$-1.41^{+0.64}_{-0.56}$	$-1.006^{+0.085}_{-0.091}$	$-1.55^{+0.58}_{-0.48}$	$-1.42^{+0.62}_{-0.56}$	$-1.019^{+0.075}_{-0.080}$

3.3 The low- ℓ “anomaly”

In Planck Collaboration XV (2014) we noted that the *Planck* 2013 low- ℓ temperature power spectrum exhibited a tension with the *Planck* best-fit model, which is mostly determined by high- ℓ information. In order to quantify such a tension, we performed a series of tests, concluding that the low- ℓ power anomaly was mainly driven by multipoles between $\ell = 20$ and 30, which happen to be systematically low with respect to the base model. The statistical significance of this anomaly was found to be around 99%, with slight variations depending on the *Planck* CMB solution or the estimator considered. This anomaly has drawn significant attention as a potential tracer of new physics (e.g., Kitazawa and Sagnotti (2015, 2014); Dudas et al. (2012); see also Destri et al. (2008)), so we checked again its status in the 2015 data rendition.

Using a statistical measure (based on the Hausman test) of the relative bias between the observed spectrum at low- ℓ and a model, we found that the significance of that test for the Commander map has weakened from 0.7% in 2013 to 2.8% in 2015. This arises from small changes between the 2013 and 2015 Commander power spectra due to revised calibration and improved analysis on a larger portion of the sky. We also found with the same test that the new *Planck* low- ℓ polarization maps are anomalous only at the 7.7% level. The significance of this specific low- ℓ “anomaly” has therefore not been strengthened with the inclusion of more, better processed data, but it remains in the list of all the other, possibly related, large scale anomalies which we mentioned earlier.

3.4 *Planck* lensing power spectrum

Lensing of the CMB photons by large scale structures on their path to the observer slightly distorts the image imprinted at the last scattering surface. This has several effects. One is to slightly smooth the peak and trough structure of the CMB power spectra (which is fully accounted for by the numerical codes when deriving the parameter constraints on a model). Another one is to transform some of the polarisation E-modes into B-modes, adding to the potentially pre-existing B-modes contribution from primordial tensor fluctuations. These distortions couple adjacent ℓ modes which would otherwise be uncorrelated if the initial fluctuations were statistically homogeneous (which is expressed by requiring translational invariance of the correlations). This can then be used to obtain an estimator of the lensing potential by cross-correlating CMB maps (T, E, B) smoothed at different scales.

Figure 4 shows at left the resulting map of the estimated lensing potential, an integral along the line of sight of the gravitational potential weighted by a broad distance dependent kernel (which peaks at a redshift between 1.5 and two). This map is rather noisy. Indeed, figure 4 shows at right, in grey, the corresponding power spectrum (which is therefore a tri-spectrum that at a given multipole L is obtained from the weighted product of four map harmonic coefficients $a_{\ell m}$). The black curve shows the predicted (noiseless) spectrum in the *Planck* base Λ CDM model, the red curve shows the power spectrum obtained from a lensing map deriving from a temperature map, and the other curves the noisier reconstruction using polarisation data. Even for the minimum variance combination in grey, only a few large scale modes around $L \sim 20-50$ have a signal to noise comparable to one! De-biasing from

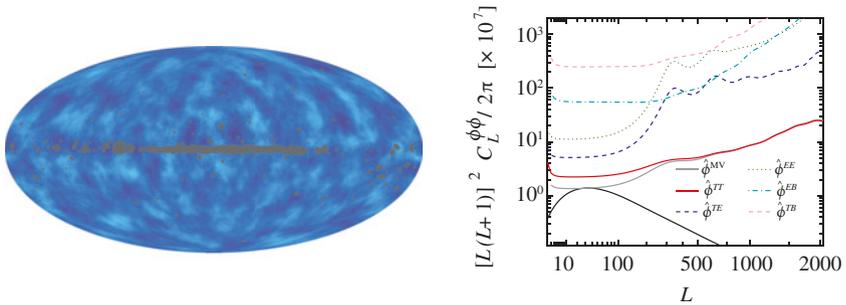


Figure 4. a) Wiener-filtered lensing potential estimate with minimal masking (using the NILC component separated map), in Galactic coordinates with a Mollweide projection (Planck Collaboration XV 2015). The reconstruction has been bandlimited to $8 \leq L \leq 2048$ where L is the multipole index in the lensing power spectrum). b) Lens reconstruction noise levels $N_L^{\phi\phi}$ (on top of the signal) for the TT, TE, EE, EB, and TB estimators applied to the SMICA full-mission CMB map. The noise level for their minimum-variance combination (MV) is also shown. The fiducial Λ CDM theory power spectrum L used in our Monte Carlo simulations (to estimate biases) is plotted as the black solid line.

the noise contribution therefore requires a quite accurate estimate of its value though detailed Monte-Carlo simulation.

Figure 5 shows the final (debiased) result as greyed boxes, compared with all other determinations obtained so far. *Planck* for the first time measured the lensing power spectrum with higher accuracy than it is predicted by the base Λ CDM model that fits the temperature data (when the uncertainties of the fit are propagated forward). The amplitude is constrained to about 2.5%, a 40σ detection for this lensing effect. The columns 3 and 6 of table 3 show the improvements with respect to the already discussed columns 2 and 5 when *Planck* lensing is used in conjunction with *Planck* CMB power spectra in constraining the base Λ CDM parameters. The improvement is modest for the base model where there is no spatial curvature and the dark energy equation of state is $w = -1$, two areas where the lower- z origin of lensing actually helps at lifting the degeneracies inherent to CMB only constraints (as can be seen in the bottom part of the table).

3.5 Λ CDM I-parameter extensions and constraints from additional data

The *Planck* paper dedicated to cosmological parameters (Planck Collaboration XIII 2015) considered many other astrophysical sources of information, pertaining to Baryonic Acoustic Oscillations (BAO), Type-Ia supernovae (JLA, for Joint Light-curve Analysis), the current Hubble constant⁴ (H_0), as well as *Planck* cluster counts, redshift space distortions,

(4) The *Planck* "ext" analysis relies only on the H_0 prior derived in Efstathiou (2014) by reanalysing Cepheid data using the revised geometric maser distance to NGC 4258 of Humphreys et al. (2013).

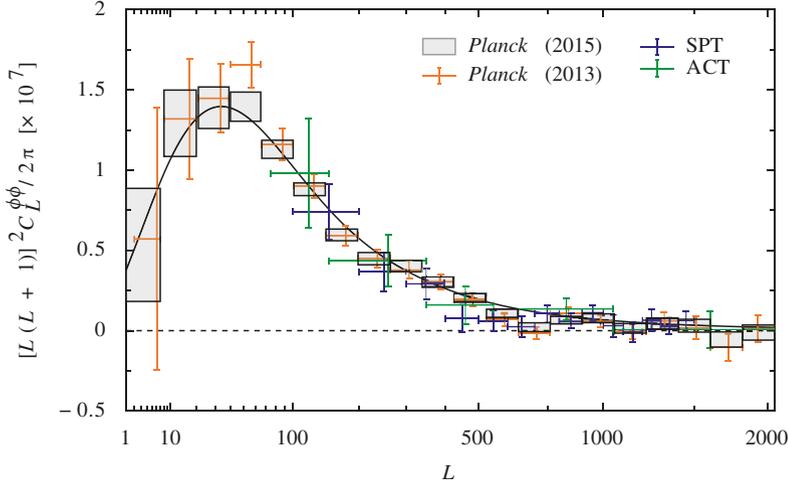


Figure 5. Lensing potential power spectrum estimate from the 2015 data release (*Planck* Collaboration XV 2015), based on the SMICA CMB map, as well as previous reconstructions from *Planck* as well as other experiments for comparison.

and weak gravitational lensing. The first three, jointly referred to “ext”, were found to be fully consistent with *Planck* CMB + lensing information within Λ CDM, and the columns 4 and 7 of table 3 gives the improvements they bring to the previous constraints. The other data sets, which generically constrain the amplitude of matter fluctuations at low z , exhibit some tension. These data are also notoriously difficult to analyse. New data sets should soon be available to suggest the most likely origin(s) of these tensions, systematic effects or physics beyond base Λ CDM.

The base Λ CDM model assumes an Friedman-Lemaître-Robertson-Walker metric with a flat spatial geometry. This is a very restrictive assumption which can now be tested empirically quite precisely. For Λ CDM models, the curvature parameter $\Omega_K \equiv 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$. A non zero detection of Ω_K would surely have far-reaching implications for cosmology. Figure 6 illustrate graphically the tightening of the constraint with *Planck* CMB spectra, lensing, and external data sets in various combinations which are given numerically in table 3. While the *Planck* CMB spectra remain affected by the “geometric degeneracy” (Bond et al. 1997; Zaldarriaga et al. 1997), the addition of *Planck* lensing leads to order of magnitude improvement on possible deviation of Ω_K from zero, which is further improved by including BAO data, yielding

$$\begin{aligned}
 \Omega_K &= -0.052^{+0.049}_{-0.055} \quad (95\%, \text{Planck TT+lowP}) \\
 \Omega_K &= -0.005^{+0.016}_{-0.017} \quad (95\%, \text{Planck TT+lowP+lensing}) \\
 \Omega_K &= 0.000 \pm 0.005 \quad (95\%, \text{Planck TT+lowP+lensing+BAO}).
 \end{aligned} \tag{2}$$

(5) This degeneracy allows for the small-scale linear CMB spectrum to remain almost unchanged if changes in Ω_K are compensated by changes in H_0 to obtain the same angular diameter distance to last scattering.

The bottom part of table 3 summarizes further constraints on single parameter extensions to the base Λ CDM model on, e.g., neutrinos properties Σm_ν and N_{eff} , the primordial Helium fraction, Y_p (when the standard BBN value is not assumed to hold), or the dark energy equation of state, $w = p/\rho$ (the cosmological constant corresponding to the case $w = -1$).

Regarding the constraints on initial conditions, it is convenient to expand the power spectra of primordial curvature and tensor perturbations on super-Hubble scales as

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1 + \frac{1}{2} \frac{dn_s}{d \ln k} \ln(k/k_*) + \dots}, \quad (3)$$

$$\mathcal{P}_t(k) = A_t \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t + \frac{1}{2} \frac{dn_t}{d \ln k} \ln(k/k_*) + \dots}, \quad (4)$$

where A_s (A_t) is the scalar (tensor) amplitude and n_s (n_t), and $dn_s/d \ln k$ ($dn_t/d \ln k$) are the scalar (tensor) spectral index, and the running of the scalar (tensor) spectral index, respectively. Figure 7 shows the *Planck* joint constraints on $(n_s, r_{0.002})$, where $r_{0.002}$ stands for the tensor-to-scalar ratio at the pivot scale $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ from *Planck* alone and with other datasets, including the co-analysis with Bicep/Keck (see below). The plot also shows the expected parameter range for selected inflation models, when the number of e-folds to the end of inflation after the current Hubble scale froze out, N_* , is in the standard range 50 to 60. This plot shows that the canonical polynomial potential $V \propto \phi^2$ is increasingly disfavoured and, more generically, all convex potentials as well (therefore favouring slow-roll models for which both ϕ and $\dot{\phi}/\rho$ increase with time).

The numerical constraints on the tensor-to-scalar ratio $r_{0.002}$ (and on possible curvature of the scalar spectrum, $dn_s/d \ln k$) using different data combinations are given in table 3. Let us note that the constraint $r_{0.002} < 0.11$ at 95% CL which arises from *Planck* TT+lowP+lensing (and which is not really improved when adding external data, or high- ℓ polarisation) can hardly get tighter by using only T & E data. Indeed, T & E fluctuations are both sourced by scalar and tensor fluctuations, and residual degeneracies cannot be lifted without further information. Let us further note that the 2013 *Planck* constraint on r was already quite similar.

3.6 Co-analysis of Bicep2 and *Planck* data

This is in this context that the Bicep2 collaboration announced worldwide, on the 17th of March 2014, that it had detected the long-sought after microwave B-modes, an extraordinary result from a beautiful, extremely sensitive, experiment. This thus ended a long series of ever tighter upper limits on the B-modes power spectrum. They further claimed that the search for primordial gravitational waves was over, that $r = 0.2$, and that it was a 5σ detection!

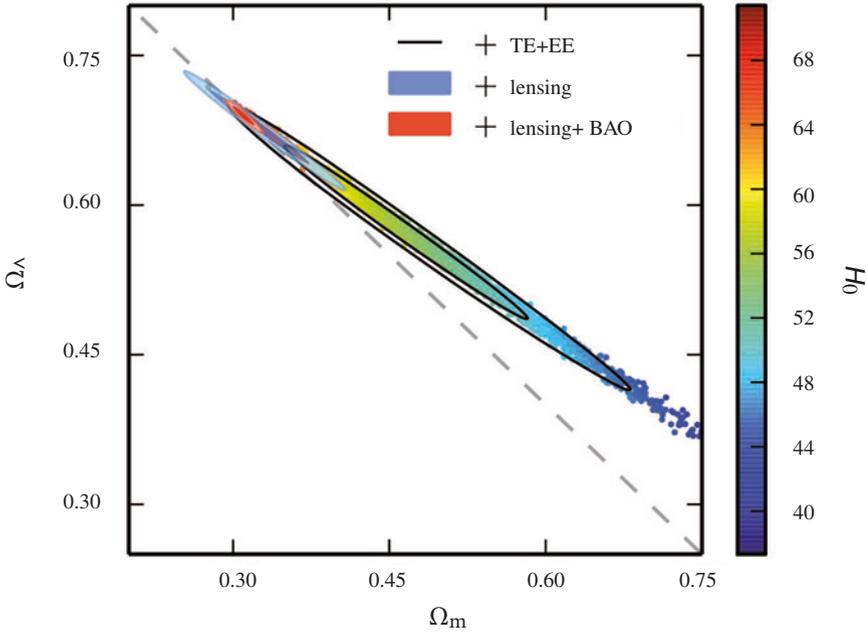


Figure 6. Constraints in the Ω_m - Ω_Λ plane from the Planck TT+lowP data (samples; colour-coded by the value of H_0) and Planck TT,TE,EE+lowP (solid contours). The geometric degeneracy between Ω_m and Ω_Λ is partially broken because of the effect of lensing on the temperature and polarization power spectra. These limits are improved significantly by the inclusion of the Planck lensing reconstruction (blue contours) and BAO (solid red contours). The red contours tightly constrain the spatial geometry of our Universe to be nearly flat.

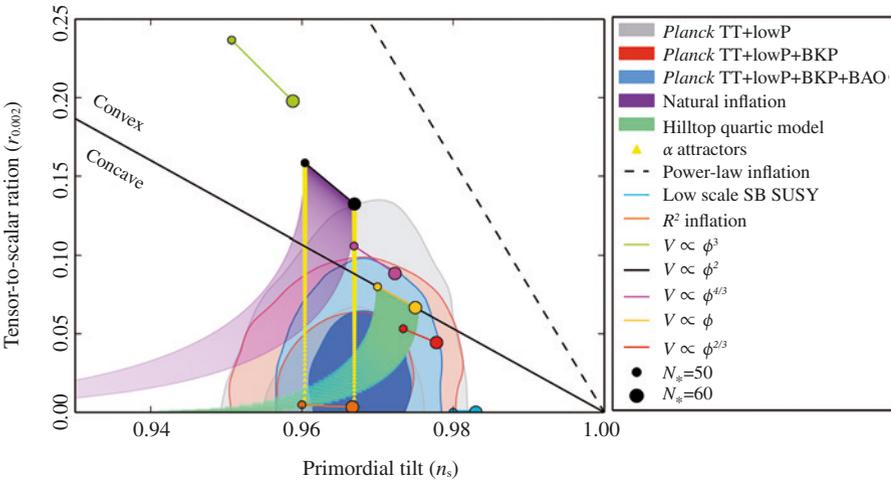


Figure 7. Marginalized joint 68% and 95% CL regions for n_s and $r_{0.002}$ from Planck alone and in combination with other data sets (Bicep2+Keck cross Planck, aka, BKP, and BAO, bottom), compared to the theoretical predictions of selected inflationary models.

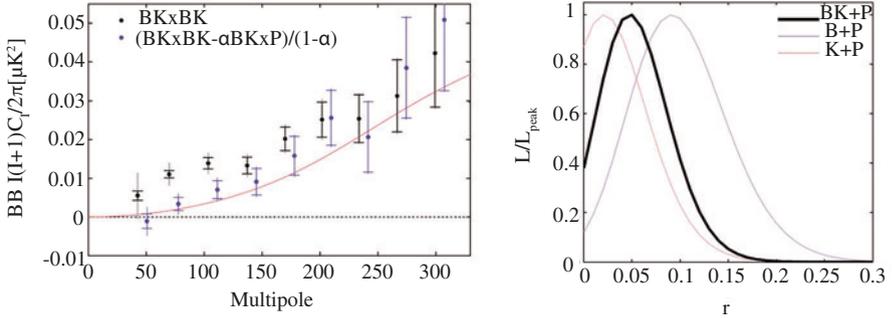


Figure 8. Results of the co-analysis of Planck and Bicep/Keck (BK) data. The left panel shows B-modes power spectra, both dust-corrected (blue points) and uncorrected (black points), as well as the expected B-modes from lensing of the E-modes (given in red). The right panel shows the likelihood of r values, leading to the quoted 95% CL upper limit of $r_{0.05} < 0.11$.

It was nevertheless pointed out extremely rapidly that a more mundane interpretation was possible (Flauger et al. 2014; Planck Collaboration et al. 2014; Mortonson and Seljak 2014). Indeed, the 5σ detection of r relied on the assumption that the polarised emission from Galactic dust was not contributing significantly at that frequency in that field, while the analysis presented could not exclude that it was actually all coming from such dust emission, even at the 3σ level (for lack of sufficient spectral information, Ade et al. (2014)). And indeed we published shortly after a paper showing, on the basis of the all-sky 353 GHz *Planck* data (used as a tracer for polarised dust emission) that about half of the detected B-modes in that field was expected to be due to dust emission, albeit with sizeable uncertainties. It was indeed not possible to be very precise without having access to detailed non-public information like the weights of the BICEP2 pixels in the final results. The two collaborations therefore performed a joint analysis (BICEP2/Keck Array and Planck Collaborations 2015), in particular by directly cross-correlating the *Planck* 353 GHz data and the 145 GHz data from Bicep (and the additional Keck data from the same collaboration, noted below as BK) to assess the dust contamination level and shape.

The main results of the joint analysis are shown in figure 8. The left panel displays B-modes power spectra. The black point correspond to the uncorrected spectrum determination (BKxBK) which shows the basis of the claimed detection as a clear excess with respect to the expected B-modes from lensing given by the red curve. The blue points shows the dust-corrected result with the help of *Planck* data, which is consistent with the predicted level from the lensing of E-modes and actually offers a beautifully precise determination of the later (at the $0.1 \mu K$ level!). The right panel displays the likelihood of r when either Bicep2 (B), or Keck (K), or both datasets (BK) are cleaned with *Planck* data (P). There is no clear evidence left for primordial B-modes, and we quoted the upper limit $r_{0.05} < 0.11$ at 95% CL, or equivalently $r_{0.005} < 0.12$. This direct upper limit on r is now completely compatible with the indirect limit set previously by *Planck* in 2013, removing the need for less minimal model than base Λ CDM. Figure 7 shows the further tightening obtained when *Planck* and BKP (BKx*Planck*) constraints are combined (The combined constraint *Planck* TT+lowP+BKP yields $r_{0.002} < 0.08$ at 95% CL). This is the state of the art.

3.7 Exploring further degrees of freedom

Table 3 already gave constraints on possible curvature of the scalar spectrum, $dn_s/d \ln k$, but that single extra parameter would not allow capturing well, or at all, many possible features of the potential or the primordial power spectrum, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ (as for example a step in the inflaton potential or oscillations). The *Planck* paper Planck Collaboration XX (2015) provides Bayesian evidences for a number of theoretically motivated parametrizations of the spectrum, but none of these features models are preferred over a power-law spectrum, for the choice of priors considered (and the constraints on the remaining cosmological parameters are not significantly affected when allowing for the presence of these features).

Since the mapping from the primordial power spectrum to the angular power spectra is a linear transformation, one can unambiguously reconstruct some part of it. The *Planck* paper devoted to inflation (Planck Collaboration XX 2015) presents three such reconstruction. Figure 9 shows one of them, for an increasingly number of reconstruction knots assumed, from 2 knots (*i.e.*, only a single power law is allowed, as in the standard analysis), to 10. These knots are freely movable. Equal colours have equal probabilities. For each reconstruction and the colour scale is chosen so that darker regions correspond to lower- σ confidence intervals. 1σ and 2σ confidence intervals are also sketched (black curves). The upper horizontal axes give the approximate corresponding multipoles via $\ell \approx k/D_{\text{rec}}$, where D_{rec} is the comoving distance to recombination. Apart from a low k deficit driven by the low quadrupole (for $N_{\text{knot}} > 2$), the main feature which is clearly visible with 8 knots is a power deficit corresponding to the anomaly of the TT spectrum at $\ell \sim 30$. But the rest is clearly scale-free, with $n_s \approx 0.96$.

These reconstructions can also be averaged over different values of N_{knot} weighted according to their respective Bayesian evidence. The region $30 < \ell < 2300$ is highly constrained, but the resolution is lacking to say anything precise about higher ℓ . At lower ℓ , cosmic variance reduces our knowledge of $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$. The weights assigned to the lower N_{knot} models outweigh those of the higher models, so no oscillatory features are significant there.

All three methods yield broadly consistent reconstructions and lead to conclude that there is no statistically significant evidence for any features departing from a simple power law (*i.e.*, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n_s-1}$) primordial spectrum. But at low $k \approx 1.5 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}$, all three reconstruct a power deficit linked to the dip in the TT angular power spectrum at $\ell \sim 20 - 30$. This agreement suggests that the reconstruction of this “anomaly” is not an artefact of any of the methods, but rather inherent in the CMB data itself. However, the evidence for this feature is marginal since it is in a region of the spectrum where the fluctuations from cosmic variance are large.

4. Primordial Non-Gaussianity

Primordial non-Gaussianity (NG) is one of the most powerful tests of inflation, and more generally of high-energy early universe physics, in a way that is strongly complementary to

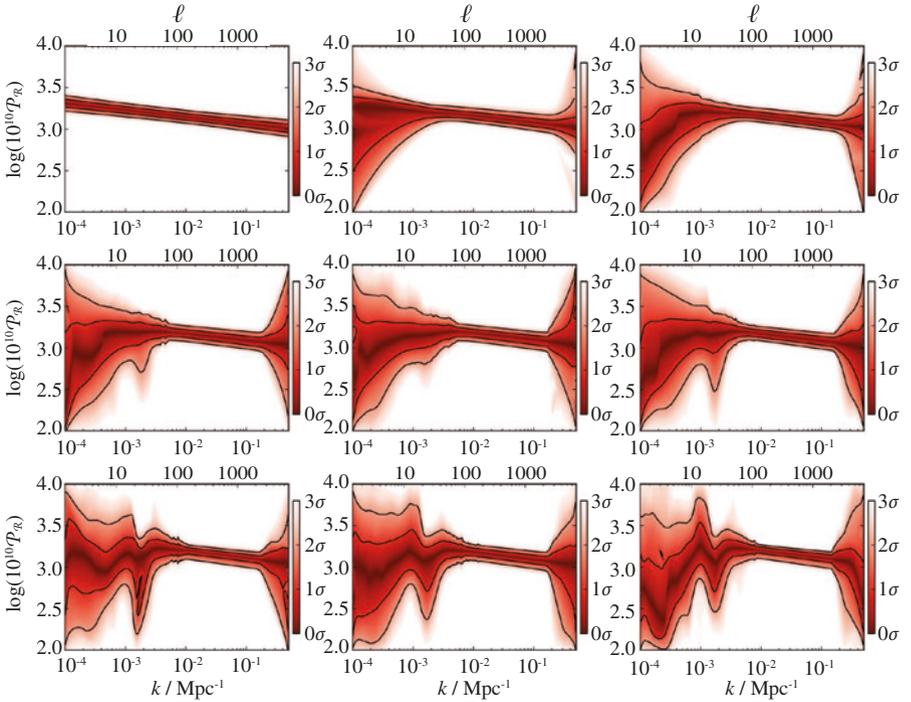


Figure 9. Bayesian movable knot reconstructions of the primordial power spectrum $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ using Planck TT+lowP data. The plots indicate our knowledge of the $P(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)|k, N_{\text{knot}})$ for a given number of reconstruction knots, N_{knot} . The number of these knots N_{knot} increases (left to right and top to bottom) from 2 to 10. 1σ and 2σ confidence intervals are outlined (black curves). The upper horizontal axes give the approximate corresponding multipoles via $\ell \approx k/D_{\text{rec}}$, where D_{rec} is the comoving distance to recombination.

the power-spectrum constraints already discussed. The simplest models of inflation, characterized by a single scalar field slowly rolling along a smooth potential, predict the generation of primordial fluctuations which are almost Gaussian distributed, with a tiny deviation from Gaussianity of the order of the slow-roll parameters (Acquaviva et al. 2003; Maldacena 2003). On the other hand any departure from these hypotheses has the potential to produce distinctive NG signatures at a detectable level in the CMB anisotropies.

We used several analysis methods, e.g., the modal approach, as well as other estimators [the optimal “KSW” with its skew-CI extension (Komatsu et al. 2005; Munshi and Heavens 2010), wavelets, Minkowski functionals...], since these different weighting of the triple-product of modes would be affected differently by residual systematic effects. We have extensively tested for the latter using simulations and the 4 component separation methods of *Planck*, testing for the effect of masks and ℓ_{max} of the analysis, and debiased them when needed, in particular to account for the ISW-lensing part or residual compact sources.

All approaches lead to the same conclusion, *i.e.*, the Planck results (Planck Collaboration XVII 2015) on primordial NG are consistent with Gaussian primordial fluctuations. In particular, using temperature only data,

$$\begin{aligned} f_{NL} - \text{local} &= +1.8 \pm 5.6 \\ f_{NL} - \text{equil} &= -9.2 \pm 69 \\ f_{NL} - \text{ortho} &= -20 \pm 33 \end{aligned} \quad (5)$$

for the amplitudes of three of the most-studied shapes of primordial NG. These are by far the tightest constraints available on extensions to the simplest models of inflation: the standard scenario of single-field slow-roll inflation has survived its most stringent test to-date.

5. Conclusions

This contribution gave a short overview of the latest *Planck* data and findings of most interest for inflation, which are commented more in depth in Bouchet (2015). A complete analysis in the context of an extended Λ CDM cosmology of these and other results from *Planck* regarding the lensing power spectrum results, as well as constraints from other observations, is given in Planck Collaboration XI (2015). Wider extensions to the set of models are discussed in other *Planck* 2015 papers; for example, Planck Collaboration XIV (2015) examines specific models for the dark energy component and Planck Collaboration XX (2015) discusses inflationary models. The *Planck* final “legacy” data and analyses are being prepared for release in 2016, where the improvements will mostly concern the CMB polarisation.

Acknowledgements

All results presented are those of the *Planck* collaboration, as published or submitted. All mistakes on top are mine :-). The development of *Planck* has been supported by: ESA; CNES and CNRS/INSU-IN2P3-INP (France); ASI, CNR, and INAF (Italy); NASA and DoE (USA); STFC and UKSA (UK); CSIC, MICINN, JA and RES (Spain); Tekes, AoF and CSC (Finland); DLR and MPG (Germany); CSA (Canada); DTU Space (Denmark); SER/SSO (Switzerland); RCN (Norway); SFI (Ireland); FCT/MCTES (Portugal); and PRACE (EU). A description of the Planck Collaboration and a list of its members, including the technical or scientific activities in which they have been involved, can be found at http://www.sciops.esa.int/index.php?project=planck&page=Planck_Collaboration.

References

- V. Acquaviva, N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. Gauge-invariant second-order perturbations and non-Gaussianity from inflation. *Nuclear Physics B*, **667**:119–148, September 2003. [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(03\)00550-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(03)00550-9).
- P. A. R. Ade, R. W. Aikin, D. Barkats, S. J. Benton, C. A. Bischoff, J. J. Bock, J. A. Brevik, Buder, E. Bullock, C. D. Dowell, L. Duband, J. P. Filippini, S. Fliescher, S. R. Golwala, M. Halpern, M. Hasselfield, S. R. Hildebrandt, G. C. Hilton, V. V. Hristov, K. D. Irwin, K. S. Karkare, J. P. Kaufman, B. G. Keating, S. A. Kernasovskiy, J. M. Kovac, C. L. Kuo, E. M. Leitch, M. Lueker, P. Mason, C. B. Netterfield, H. T. Nguyen, R. O'Brien, R. W. Ogburn, A. Orlando, C. Pryke, C. D. Reintsema, S. Richter, R. Schwarz, C. D. Sheehy, Z. K. Staniszewski, R. V. Sudiwala, G. P. Teply, J. E. Tolan, A. D. Turner, A. G. Vieregg, C. L. Wong, K. W. Yoon, and Bicep2 Collaboration. Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2. *Physical Review Letters*, **112**(24):241101, June 2014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.241101>.
- C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, E. Komatsu, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, E. Wollack, J. Dunkley, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, and E. L. Wright. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *ApJS*, **208**:20, October 2013. <https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20>.
- M. Bersanelli, N. Mandolesi, R. C. Butler, A. Mennella, F. Villa, B. Aja, E. Artal, E. Artina, C. Baccigalupi, M. Balasini, G. Baldan, A. Banday, P. Bastia, P. Battaglia, T. Bernardino, E. Blackhurst, L. Boschini, C. Burigana, G. Cafagna, B. Cappellini, F. Cavaliere, F. Colombo, G. Crone, F. Cuttaia, O. D'Arcangelo, L. Danese, R. D. Davies, R. J. Davis, L. de Angelis, G. C. de Gasperis, L. de La Fuente, A. de Rosa, G. de Zotti, M. C. Falvella, F. Ferrari, R. Ferretti, L. Figini, S. Fogliani, C. Franceschet, E. Franceschi, T. Gaier, S. Garavaglia, F. Gomez, K. Gorski, A. Gregorio, P. Guzzi, J. M. Herreros, S. R. Hildebrandt, R. Hoyland, N. Hughes, M. Janssen, P. Jukkala, D. Kettle, V. H. Kilpiä, M. Laaninen, P. M. Lapolla, C. R. Lawrence, D. Lawson, J. P. Leahy, R. Leonardi, P. Leutenegger, S. Levin, P. B. Lilje, S. R. Lowe, P. M. Lubin, D. Maino, M. Malaspina, M. Maris, J. Marti-Canales, E. Martinez-Gonzalez, A. Mediavilla, P. Meinhold, M. Miccolis, G. Morgante, P. Natoli, R. Nesti, L. Pagan, C. Paine, B. Partridge, J. P. Pascual, F. Pasian, D. Pearson, M. Pecora, F. Perrotta, P. Platania, M. Pospieszalski, T. Poutanen, M. Prina, R. Rebolo, N. Roddis, J. A. Rubiño-Martín, M. J. Salmon, M. Sandri, M. Seiffert, R. Silvestri, A. Simonetto, P. Sjöman, G. F. Smoot, C. Sozzi, L. Stringhetti, E. Taddei, J. Tauber, L. Terenzi, M. Tomasi, J. Tuovinen, L. Valenziano, J. Varis, N. Vittorio, L. A. Wade, A. Wilkinson, F. Winder, A. Zacchei, and A. Zonca. *Planck* pre-launch status: Design and description of the Low Frequency Instrument. *A&A*, **520**:A4, September 2010. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200912853>.
- M. Béthermin, E. Daddi, G. Magdis, M. T. Sargent, Y. Hezaveh, D. Elbaz, D. Le Borgne, J. Mullaney, M. Pannella, V. Buat, V. Charmandaris, G. Lagache, and D. Scott. A Unified Empirical Model for Infrared Galaxy Counts Based on the Observed Physical Evolution of Distant Galaxies. *ApJ*, **757**:L23, October 2012. <https://doi.org/10.1088/2041-8205/757/2/L23>.
- BICEP2/Keck Array and Planck Collaborations. Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data. *Phys. Rev. Lett.*, **114**(10):101301, March 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.101301>.

J. R. Bond, G. Efstathiou, and M. Tegmark. Forecasting cosmic parameter errors from microwave background anisotropy experiments. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **291**:L33–L41, 1997.

François R. Bouchet. Planck 2015 results and inflation. *Comptes Rendus Physique*, **16**(10): 891 – 913, 2015. ISSN 1631-0705. <http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2015.11.001>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070515002005>. Cosmic inflation / Inflation cosmique.

A. Challinor and G. Chon. Error analysis of quadratic power spectrum estimates for cosmic microwave background polarization: sampling covariance. *MNRAS*, **360**:509–532, June 2005. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09076.x> URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005MNRAS.360..509C>.

S. Das, T. A. Marriage, P. A. R. Ade, P. Aguirre, M. Amiri, J. W. Appel, L. F. Barrientos, E. S. Battistelli, J. R. Bond, B. Brown, B. Burger, J. Chervenak, M. J. Devlin, S. R. Dicker, W. Bertrand Doriese, J. Dunkley, R. Dünner, T. Essinger-Hileman, R. P. Fisher, J. W. Fowler, A. Hajian, M. Halpern, M. Hasselfield, C. Hernández-Monteagudo, G. C. Hilton, M. Hilton, A. D. Hincks, R. Hlozek, K. M. Huffenberger, D. H. Hughes, J. P. Hughes, L. Infante, K. D. Irwin, J. Baptiste Juin, M. Kaul, J. Klein, A. Kosowsky, J. M. Lau, M. Limon, Y.-T. Lin, H. Lupton, D. Marsden, K. Martocci, P. Maudkopf, F. Menanteau, K. Moodley, H. Moseley, C. B. Netterfield, M. D. Niemack, M. R. Nolta, L. A. Page, L. Parker, B. Partridge, B. Reid, N. Sehgal, B. D. Sherwin, J. Sievers, D. N. Spergel, S. T. Staggs, D. S. Swetz, E. R. Switzer, R. Thornton, H. Trac, C. Tucker, R. Warne, E. Wollack, and Y. Zhao. The Atacama Cosmology Telescope: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum at 148 and 218 GHz from the 2008 Southern Survey. *ApJ*, **729**:62, March 2011. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/729/1/62>.

Das, T. Louis, M. R. Nolta, G. E. Addison, E. S. Battistelli, J. Bond, E. Calabrese, D. C. M. J. Devlin, S. Dicker, J. Dunkley, R. Dünner, J. W. Fowler, M. Gralla, A. Hajian, M. Halpern, M. Hasselfield, M. Hilton, A. D. Hincks, R. Hlozek, K. M. Huffenberger, J. P. Hughes, K. D. Irwin, A. Kosowsky, R. H. Lupton, T. A. Marriage, D. Marsden, F. Menanteau, K. Moodley, M. D. Niemack, L. A. Page, B. Partridge, E. D. Reese, B. L. Schmitt, N. Sehgal, B. D. Sherwin, J. L. Sievers, D. N. Spergel, S. T. Staggs, D. S. Swetz, E. R. Switzer, R. Thornton, H. Trac, and E. Wollack. The Atacama Cosmology Telescope: Temperature and Gravitational Lensing Power Spectrum Measurements from Three Seasons of Data. *ArXiv e-prints*, January 2013.

C. Destri, H. J. de Vega, and N. G. Sanchez. CMB quadrupole depression produced by early fast-roll inflation: Monte Carlo Markov chains analysis of WMAP and SDSS data. *Phys. Rev. D*, **78**(2):023013, July 2008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.023013>.

E. Dudas, N. Kitazawa, S. P. Patil, and A. Sagnotti. CMB imprints of a pre-inflationary climbing phase. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 5:012, May 2012. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/05/012>.

J. Dunkley, E. Komatsu, M. R. Nolta, D. N. Spergel, D. Larson, G. Hinshaw, L. Page, C. L. Bennett, B. Gold, N. Jarosik, J. L. Weiland, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Likelihoods and Parameters from the WMAP Data. *ApJS*, **180**:306–329, February 2009. <https://doi.org/10.1088/0067-0049/180/2/306>.

G. Efstathiou. Myths and truths concerning estimation of power spectra: the case for a hybrid estimator. *MNRAS*, **349**:603–626, April 2004. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07530.x>.

- G. Efstathiou. Hybrid estimation of cosmic microwave background polarization power spectra. *MNRAS*, **370**:343–362, July 2006. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10486.x>.
- G. Efstathiou. H0 revisited. *MNRAS*, **440**:1138–1152, May 2014. <https://doi.org/10.1093/mnras/stu278>.
- H. K. Eriksen, I. J. O'Dwyer, J. B. Jewell, B. D. Wandelt, D. L. Larson, K. M. Górski, S. Levin, J. Banday, and P. B. Lilje. Power Spectrum Estimation from High-Resolution Maps by Gibbs Sampling. *ApJS*, **155**:227–241, December 2004. <https://doi.org/10.1086/425219>.
- H. K. Eriksen, J. B. Jewell, C. Dickinson, A. J. Banday, K. M. Górski, and C. R. Lawrence. Joint Bayesian Component Separation and CMB Power Spectrum Estimation. *ApJ*, **676**: 10–32, March 2008. <https://doi.org/10.1086/525277>.
- R. Flauger, J. C. Hill, and D. N. Spergel. Toward an understanding of foreground emission in the BICEP2 region. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 8:039, August 2014. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/08/039>.
- J. W. Fowler, V. Acquaviva, P. A. R. Ade, P. Aguirre, M. Amiri, J. W. Appel, L. F. Barrientos, E. S. Battistelli, J. R. Bond, B. Brown, B. Burger, J. Chervenak, S. Das, M. J. Devlin, S. R. Dicker, W. B. Dorcise, J. Dunkley, R. Dünner, T. Essinger-Hileman, R. P. Fisher, A. Hajian, M. Halpern, M. Hasselfield, C. Hernández-Monteagudo, G. C. Hilton, M. Hilton, A. D. Hincks, R. Hlozek, K. M. Huffenberger, D. H. Hughes, J. P. Hughes, L. Infante, K. D. Irwin, R. Jimenez, J. B. Juin, M. Kaul, J. Klein, A. Kosowsky, J. M. Lau, M. Limon, Y.-T. Lin, R. H. Lupton, T. A. Marriage, D. Marsden, K. Martocci, P. Mauskopf, F. Menanteau, K. Moodley, H. Moseley, C. B. Netterfield, M. D. Niemack, M. R. Nolta, L. A. Page, L. Parker, B. Partridge, H. Quintana, B. Reid, N. Sehgal, J. Sievers, D. N. Spergel, S. T. Staggs, D. S. Swetz, E. R. Switzer, R. Thornton, H. Trac, C. Tucker, L. Verde, R. Warne, G. Wilson, E. Wollack, and Y. Zhao. The Atacama Cosmology Telescope: A Measurement of the $600 < \ell < 8000$ Cosmic Microwave Background Power Spectrum at 148 GHz. *ApJ*, **722**:1148–1161, October 2010. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/722/2/1148>.
- K. Grainge, P. Carreira, K. Cleary, R. D. Davies, R. J. Davis, C. Dickinson, R. Genova-Santos, C. M. Gutiérrez, Y. A. Hafez, M. P. Hobson, M. E. Jones, R. Kneissl, K. Lancaster, Lasenby, J. P. Leahy, K. Maisinger, G. G. Pooley, R. Rebol, J. A. Rubiño-Martin, P. J. Sosa Molina, C. Ödman, B. Rusholme, R. D. E. Saunders, R. Savage, P. F. Scott, A. Slosar, A. C. Taylor, D. Titterton, E. Waldram, R. A. Watson, and A. Wilkinson. The cosmic microwave background power spectrum out to $l = 1400$ measured by the Very Small Array. *MNRAS*, **341**:L23–L28, June 2003. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06563.x>.
- S Hanany, Peter A R Ade, Amedeo Balbi, J Bock, Julian D Borrill, A Boscaleri, P G Ferreira, V V Hristov, Andrew H Jaffe, A E Lange, A T Lee, P D Mauskopf, S Oh, E Pascale, B Rabbii, P L Richards, R Stompor, C D Winant, and J H P Wu. MAXIMA-I: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of 10 arcmin–5 degree. *ApJ*, **545**(1):L5–L9, December 2000.
- F. K. Hansen, K. M. Górski, and E. Hivon. Gabor transforms on the sphere with applications to CMB power spectrum estimation. *MNRAS*, **336**:1304–1328, November 2002. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05878.x> URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002MNRAS.336.1304H>.

G. Hinshaw, D. N. Spergel, L. Verde, R. S. Hill, S. S. Meyer, C. Barnes, C. L. Bennett, M. Halpern, N. Jarosik, A. Kogut, E. Komatsu, M. Limon, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: The Angular Power Spectrum. *ApJS*, **148**:135–159, September 2003. <https://doi.org/10.1086/377225> URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJS..148..135H>.

W. C. Jones, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, P. Cabella, C. R. Contaldi, B. P. Crill, P. de Bernardis, G. De Gasperis, A. de Oliveira-Costa, G. De Troia, G. di Stefano, E. Hivon, A. H. Jaffe, T. S. Kisner, A. E. Lange, C. J. MacTavish, S. Masi, P. D. Mauskopf, A. Melchiorri, T. E. Montroy, P. Natoli, C. B. Netterfield, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, G. Polenta, S. Prunet, S. Ricciardi, G. Romeo, J. E. Ruhl, P. Santini, M. Tegmark, M. Veneziani, and N. Vittorio. A Measurement of the Angular Power Spectrum of the CMB Temperature Anisotropy from the 2003 Flight of BOOMERANG. *ApJ*, **647**: 823–832, August 2006. <https://doi.org/10.1086/505559>.

M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins. Statistics of cosmic microwave background polarization. *Phys. Rev. D*, **55**:7368–7388, June 1997. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.7368>.

R. Keisler, C. L. Reichardt, K. A. Aird, B. A. Benson, L. E. Bleem, J. E. Carlstrom, C. L. Chang, H. M. Cho, T. M. Crawford, A. T. Crites, T. de Haan, M. A. Dobbs, J. Dudley, E. M. George, N. W. Halverson, G. P. Holder, W. L. Holzapfel, S. Hoover, Z. Hou, J. D. Hrubes, Joy, L. Knox, A. T. Lee, E. M. Leitch, M. Lueker, D. Luong-Van, J. J. McMahon, J. Mehl, S. S. Meyer, M. Millea, J. J. Mohr, T. E. Montroy, T. Natoli, S. Padin, T. Plagge, C. Pryke, E. Ruhl, K. K. Schaffer, L. Shaw, E. Shirokoff, H. G. Spieler, Z. Staniszewski, A. A. Stark, Story, A. van Engelen, K. Vanderlinde, J. D. Vieira, R. Williamson, and O. Zahn. A Measurement of the Damping Tail of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum with the South Pole Telescope. *ApJ*, **743**:28, December 2011. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/743/1/28>.

N. Kitazawa and A. Sagnotti. Pre-inflationary clues from String Theory? *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 4:017, April 2014. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/04/017>.

N. Kitazawa and A. Sagnotti. A String-Inspired Model for the Low- ℓ CMB. *ArXiv e-prints*, March 2015.

A. Kogut, D. N. Spergel, C. Barnes, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature-Polarization Correlation. *ApJS*, **148**:161–173, September 2003. <https://doi.org/10.1086/377219>.

E. Komatsu, D. N. Spergel, and B. D. Wandelt. Measuring Primordial Non-Gaussianity in the Cosmic Microwave Background. *ApJ*, **634**:14–19, November 2005. <https://doi.org/10.1086/491724>.

J. M. Kovac, E. M. Leitch, Clement Pryke, J. E. Carlstrom, N. W. Halverson, and W. L. Holzapfel. Detection of polarization in the cosmic microwave background using DAS1. *Nature*, **420** (6917):772–787, December 2002.

J.-M. Lamarre, J.-L. Puget, P. A. R. Ade, F. Bouchet, G. Guyot, A. E. Lange, F. Pajot, A. Arondel, K. Benabed, J.-L. Beney, A. Benoît, J.-P. Bernard, R. Bhatia, Y. Blanc, J. J. Bock, Bréelle, T. W. Bradshaw, P. Camus, A. Catalano, J. Charra, M. Charra, S. E. Church, Couchot, A. Coulais, B. P. Crill, M. R. Crook, K. Dassas, P. de Bernardis, J. Delabrouille, P. de Marillac, J.-M. Delouis, F.-X. Désert, C. Dumesnil, X. Dupac, G. Efstathiou, P. Eng, C. Evesque, J.-J. Fourmond, K.

Ganga, M. Giard, R. Gispert, L. Guglielmi, J. Haissinski, S. Henrot-Versillé, E. Hivon, W. A. Holmes, W. C. Jones, T. C. Koch, H. Lagardère, P. Lami, J. Landé, B. Leriche, C. Leroy, Y. Longval, J. F. Macías-Pérez, T. Maciaszek, B. Maffei, B. Mansoux, C. Marty, S. Masi, C. Mercier, M.-A. Miville-Deschênes, A. Moneti, L. Montier, J. A. Murphy, J. Narbonne, M. Nexon, C. G. Paine, J. Pahn, O. Perdereau, F. Piacentini, M. Piat, S. Plaszczyński, E. Pointecouteau, R. Pons, N. Ponthieu, S. Prunet, D. Rambaud, G. Recouvreur, C. Renault, I. Ristorcelli, C. Rosset, D. Santos, G. Savini, G. Serra, P. Stassi, R. V. Sudiwala, J.-F. Sygnet, J. A. Tauber, J.-P. Torre, M. Tristram, L. Vibert, A. Woodcraft, V. Yurchenko, and D. Yvon. *Planck* pre-launch status: The HFI instrument, from specification to actual performance. *A&A*, **520**:A9, September 2010. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200912975>.

J. Maldacena. Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *Journal of High Energy Physics*, **5**:13, May 2003. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/05/013>.

A. Mennella, R. C. Butler, A. Curto, F. Cuttaia, R. J. Davis, J. Dick, M. Frailis, S. Galeotta, A. Gregorio, H. Kurki-Suonio, C. R. Lawrence, S. Leach, J. P. Leahy, S. Lowe, D. Maino, N. Mandolesi, M. Maris, E. Martínez-González, P. R. Meinhold, G. Morgante, D. Pearson, F. Perrotta, G. Polenta, T. Poutanen, M. Sandri, M. D. Seiffert, A.-S. Suur-Uski, D. Tavagnacco, L. Terenzi, M. Tomasi, J. Valiviita, F. Villa, R. Watson, A. Wilkinson, A. Zacchei, A. Zonca, B. Aja, E. Artal, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, N. Bartolo, P. Battaglia, K. Bennett, A. Bonaldi, L. Bonavera, J. Borrill, F. R. Bouchet, C. Burigana, P. Cabella, B. Cappellini, X. Chen, L. Colombo, M. Cruz, L. Danese, O. D'Arcangelo, R. D. Davies, G. de Gasperis, A. de Rosa, G. de Zotti, C. Dickinson, J. M. Diego, S. Donzelli, G. Efstathiou, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, M. C. Falvela, F. Finelli, S. Foley, C. Franceschet, E. Franceschi, T. C. Gaier, R. T. Génova-Santos, D. George, F. Gómez, J. González-Nuevo, K. M. Górski, A. Gruppuso, F. K. Hansen, D. Herranz, J. M. Herreros, R. J. Hoyland, N. Hughes, J. Jewell, P. Jukkala, M. Juvela, P. Kangaslahti, E. Keihänen, R. Keskitalo, V.-H. Kilpia, T. S. Kisner, J. Knoche, L. Knox, M. Laaninen, A. Lähteenmäki, J.-M. Lamarre, R. Leonardi, J. León-Tavares, P. Leutenegger, P. B. Lilje, M. López-Caniogo, P. M. Lubin, M. Malaspina, D. Marinucci, M. Massardi, S. Matarrese, F. Matthai, A. Melchiorri, L. Mendes, M. Miccolis, M. Migliaccio, S. Mitra, A. Moss, P. Natoli, R. Nesti, H. U. Nørgaard-Nielsen, L. Pagano, R. Paladini, D. Paoletti, B. Partridge, Pasian, V. Pettorino, D. Pietrobon, M. Pospieszalski, G. Prézeau, M. Prina, P. Procopio, J.-L. Puget, C. Quercellini, J. P. Rachen, R. Rebolo, M. Reinecke, S. Ricciardi, G. Robbers, Rocha, N. Roddis, J. A. Rubino-Martín, M. Savelainen, D. Scott, R. Silvestri, A. Simonetto, P. Sjöman, G. F. Smoot, C. Sozzi, L. Stringhetti, J. A. Tauber, G. Tofani, L. Toffolatti, J. Tuovinen, M. Türler, G. Umana, L. Valenziano, J. Varis, P. Vielva, N. Vittorio, L. A. Wade, C. Watson, S. D. M. White, and F. Winder. *Planck* early results. III. First assessment of the Low Frequency Instrument in-flight performance. *A&A*, **536**:A3, 2011. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116480>.

M. J. Mortonson and U. Seljak. A joint analysis of Planck and BICEP2 B modes including dust polarization uncertainty. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, **10**:035, October 2014. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/10/035>.

D. Munshi and A. Heavens. A new approach to probing primordial non-Gaussianity. *MNRAS*, **401**:2406–2418, February 2010. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15820.x>.

C. B. Netterfield, M. J. Devlin, N. Jarosik, L. Page, and E. J. Wollack. A Measurement of the Angular Power Spectrum of the Anisotropy in the Cosmic Microwave Background. *ApJ*, **474**:47–66, January 1997.

T. J. Pearson, B. S. Mason, A. C. S. Readhead, M. C. Shepherd, J. L. Sievers, P. S. Udomprasert, J. K. Cartwright, A. J. Farmer, S. Padin, S. T. Myers, J. R. Bond, C. R. Contaldi, U.-L. Pen, S. Prunet, D. Pogosyan, J. E. Carlstrom, J. Kovac, E. M. Leitch, C. Pryke, N. W. Halverson, W. L. Holzapfel, P. Altamirano, L. Bronfman, S. Casassus, J. May, and M. Joy. The Anisotropy of the Microwave Background to $l = 3500$: Mosaic Observations with the Cosmic Background Imager. *ApJ*, **591**:556–574, July 2003. <https://doi.org/10.1086/375508>.

Planck Collaboration, R. Adam, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck intermediate results. XXX. The angular power spectrum of polarized dust emission at intermediate and high Galactic latitudes. *ArXiv e-prints*, September 2014.

Planck HFI Core Team. Planck early results, IV. First assessment of the High Frequency Instrument in-flight performance. *A&A*, **536**:A4, 2011. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116487>.

Planck Collaboration I. *Planck* early results. I. The Planck mission. *A&A*, **536**:A1, 2011. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116464>.

Planck Collaboration XV. *Planck* 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood. *A&A*, **571**:A15, 2014. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321573>.

Planck Collaboration IV. *Planck* 2015 results. IV. LFI beams and window functions. *A&A*, in press, 2015.

Planck Collaboration IX. *Planck* 2015 results. IX. Diffuse component separation: CMB maps. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XI. *Planck* 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XIII. *Planck* 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XIV. *Planck* 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XV. *Planck* 2015 results. XV. Gravitational lensing. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XVI. *Planck* 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB. *A&A*, in press, 2015.

Planck Collaboration XVII. *Planck* 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XX. *Planck* 2015 results. XX. Constraints on inflation. *A&A*, submitted, 2015.

Planck Collaboration XXVI. *Planck* 2015 results. XXVI. The Second Planck Catalogue of Compact Sources. *A&A*, submitted, 2015.

Polarbear Collaboration, P A R Ade, Y Akiba, A E Anthony, K Arnold, M Atlas, D Barron, D Boettger, Julian D Borrill, S Chapman, Y Chinone, M Dobbs, T Elleflot, J Errard, G Fabbian, C Feng, D Flanigan, A Gilbert, W Grainger, N W Halverson, M Hasegawa, K Hattori, M Hazumi, W L Holzapfel, Y Hori, J Howard, P Hyland, Y Inoue, G C Jaehnig, Andrew H Jaffe, B

Keating, Z Kermish, R Keskitalo, T Kisner, M Le Jeune, A T Lee, E M Leitch, E Linder, M Lungu, F Matsuda, T Matsumura, X Meng, N J Miller, H Morii, S Moyerman, M J Myers, M Navaroli, H Nishino, A Orlando, H Paar, J Peloton, D Poletti, E Quealy, G Rebeiz, C L Reichardt, P L Richards, C Ross, I Schanning, D E Schenck, B D Sherwin, A Shimizu, C Shimmin, M Shimon, P Siritanasak, G Smecher, H Spieler, N Stebor, B Steinbach, R Stompor, A Suzuki, S Takakura, T Tomaru, B Wilson, A Yadav, and O Zahn. A Measurement of the Cosmic Microwave Background B-mode Polarization Power Spectrum at Sub-degree Scales with POLARBEAR. *ApJ*, **794**(2):171, October 2014.

C. Pryke, P. Ade, J. Bock, M. Bowden, M. L. Brown, G. Cahill, P. G. Castro, S. Church, T. Culverhouse, R. Friedman, K. Ganga, W. K. Gear, S. Gupta, J. Hinderks, J. Kovac, A. E. Lange, E. Leitch, S. J. Melhuish, Y. Memari, J. A. Murphy, A. Orlando, R. Schwarz, C. O'Sullivan, L. Piccirillo, N. Rajguru, B. Rusholme, A. N. Taylor, K. L. Thompson, A. H. Turner, E. Y. S. Wu, and M. Zemcov. Second and Third Season QUaD Cosmic Microwave Background Temperature and Polarization Power Spectra. *ApJ*, **692**:1247–1270, February 2009. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/692/2/1247>.

QUIET Collaboration, D. Araujo, C. Bischoff, A. Brizius, I. Buder, Y. Chinone, K. Cleary, R. N. Dumoulin, A. Kusaka, R. Monsalve, S. K. Næss, L. B. Newburgh, R. Reeves, I. K. Wehus, J. T. L. Zwart, L. Bronfman, R. Bustos, S. E. Church, C. Dickinson, H. K. Eriksen, T. Gaier, J. O. Gundersen, M. Hasegawa, M. Hazumi, K. M. Huffenberger, K. Ishidoshio, M. E. Jones, P. Kangaslahti, D. J. Kapner, D. Kubik, C. R. Lawrence, M. Limon, J. J. McMahon, A. D. Miller, M. Nagai, H. Nguyen, G. Nixon, T. J. Pearson, L. Piccirillo, S. J. E. Radford, A. C. S. Readhead, J. L. Richards, D. Samtleben, M. Seiffert, M. C. Shepherd, K. M. Smith, S. T. Staggs, O. Tajima, K. L. Thompson, K. Vanderlinde, and R. Williamson. Second season quiet observations: Measurements of the cosmic microwave background polarization power spectrum at 95 GHz. *ApJ*, **760**(2):145, 2012. URL <http://stacks.iop.org/0004-637X/760/i=2/a=145>.

C. L. Reichardt, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. A. Brevik, C. R. Contaldi, M. D. Daub, J. T. Dempsey, J. H. Goldstein, W. L. Holzapfel, C. L. Kuo, A. E. Lange, M. Lueker, M. Newcomb, J. B. Peterson, J. Ruhl, M. C. Runyan, and Z. Staniszewski. High-Resolution CMB Power Spectrum from the Complete ACBAR Data Set. *ApJ*, **694**:1200–1219, April 2009. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/694/2/1200>.

J. L. Sievers, C. Achermann, J. R. Bond, L. Bronfman, R. Bustos, C. R. Contaldi, C. Dickinson, P. G. Ferreira, M. E. Jones, A. M. Lewis, B. S. Mason, J. May, S. T. Myers, N. Oyarce, S. Padin, T. J. Pearson, M. Pospieszalski, A. C. S. Readhead, R. Reeves, A. C. Taylor, and S. Torres. Implications of the Cosmic Background Imager Polarization Data. *ApJ*, **660**: 976–987, May 2007. <https://doi.org/10.1086/510504>.

K. T. Story, C. L. Reichardt, Z. Hou, R. Keisler, K. A. Aird, B. A. Benson, L. E. Bleem, J. E. Carlstrom, C. L. Chang, H. Cho, T. M. Crawford, A. T. Crites, T. de Haan, M. A. Dobbs, J. Dudley, B. Follin, E. M. George, N. W. Halverson, G. P. Holder, W. L. Holzapfel, Hoover, J. D. Hrubes, M. Joy, L. Knox, A. T. Lee, E. M. Leitch, M. Lueker, D. Luong-Van, J. J. McMahon, J. Mehl, S. S. Meyer, M. Millea, J. J. Mohr, T. E. Montroy, S. Padin, Plagge, C. Pryke, J. E. Ruhl, J. T. Sayre, K. K. Schaffer, L. Shaw, E. Shirokoff, H. G. Spieler, Z. Staniszewski, A. A. Stark, A. van Engelen, K. Vanderlinde, J. D. Vieira, R. Williamson, and O. Zahn. A Measurement of the Cosmic Microwave Background Damping Tail from the 2500-square-degree SPT-SZ survey. *ArXiv e-prints*, October 2012.

J. A. Tauber, N. Mandolesi, J.-L. Puget, T. Banos, M. Bersanelli, F. R. Bouchet, R. C. Butler, J. Charra, G. Crone, J. Dodsworth, and et al. Planck pre-launch status: The Planck mission. *A&A*, **520**:A1, September 2010. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200912983>.

M. Tristram, G. Patanchon, J. F. Macías-Pérez, P. Ade, A. Amblard, R. Ansari, É. Aubourg, Benoît, J.-P. Bernard, A. Blanchard, J. J. Bock, F. R. Bouchet, A. Bourrachot, P. Camus, J.-F. Cardoso, F. Couchot, P. de Bernardis, J. Delabrouille, F.-X. Désert, M. Douspis, L. Dumoulin, P. Filliatre, P. Fosalba, M. Giard, Y. Giraud-Héraud, R. Gispert, L. Guglielmi, J.-C. Hamilton, S. Hanany, S. Henrot-Versillé, J. Kaplan, G. Lagache, J.-M. Lamarre, A. E. Lange, K. Madet, B. Maffei, C. Magneville, S. Masi, F. Mayet, F. Nati, O. Perdereau, S. Plaszczynski, M. Piat, N. Ponthieu, S. Prunet, C. Renault, C. Rosset, D. Santos, D. Vibert, and D. Yvon. The CMB temperature power spectrum from an improved analysis of the Archeops data. *A&A*, **436**:785–797, June 2005. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20042416>.

B. D. Wandelt, E. Hivon, and K. M. Górski. Cosmic microwave background anisotropy power spectrum statistics for high precision cosmology. *Phys. Rev. D*, **64**(8):083003, October 2001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.083003> URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001PhRvD..64h3003W>.

E. L. Wright, C. L. Bennett, K. Górski, G. Hinshaw, and G. F. Smoot. Angular power spectrum of the cosmic microwave background anisotropy seen by the COBE DMR. *The Astrophysical Journal Letters*, **464**(1):L21, 1996. URL <http://stacks.iop.org/1538-4357/464/i=1/a=L21>.

M. Zaldarriaga and U. Seljak. All-sky analysis of polarization in the microwave background. *Phys. Rev. D*, **55**:1830–1840, February 1997 <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.1830>.

Matias Zaldarriaga, David N. Spergel, and Uros Seljak. Microwave background constraints on cosmological parameters. *Astrophys.J.*, **488**:1–13, 1997 <https://doi.org/10.1086/304692>.

Deuxième partie

Dualité Ondes/Corpuscules
de la Physique quantique

Deuxième partie

Dualité Ondes/ Corpuscules de la Physique quantique

Présentation

La deuxième partie est consacrée à la physique quantique. Elle débute par un rappel des difficultés conceptuelles rencontrées, dont les critiques d'Einstein sur l'abandon du déterminisme et du réalisme qui sont toujours en discussion, et des contraintes que les expériences qui ont pu être menées posent au champ des interprétations possibles. Elle se termine par la présentation de formalismes et d'expériences actuelles se situant dans la ligne initiée par Einstein, dans ses travaux de 1916, concernant la théorie quantique du rayonnement, et qui correspondent à ses espoirs de réaliser des calculs quantiques *ab initio* et de manipuler des particules uniques.

Avant de présenter les cinq chapitres de cette partie, il nous a paru utile de retracer brièvement quelques éléments saillants du débat sur l'interprétation de la physique quantique, et notamment les points de vue d'Einstein sur ce débat.

I. La dualité ondes-corpuscules

La dualité ondes-corpuscules est introduite en 1905 par Einstein pour la lumière, avec les quanta de lumière, et par de Broglie en 1923 pour la matière, avec les ondes de matière. En cette année 1905, Einstein introduit un modèle corpusculaire de la lumière en complément du modèle ondulatoire dont les observations portent sur des valeurs moyennes. « La théorie ondulatoire de la lumière opérant avec des fonctions d'espace continues s'est avérée parfaite pour ce qui est de la description des phénomènes purement optiques et il se peut qu'elle ne soit jamais remplacée par une autre théorie. Il ne faut cependant pas perdre

de vue que les observations optiques portent sur des valeurs moyennes dans le temps, et non sur des valeurs instantanées. [...] Selon l'hypothèse envisagée ici, lors de la propagation d'un rayon lumineux émis par une source ponctuelle, l'énergie n'est pas distribuée de façon continue sur des espaces de plus en plus grands, mais est constituée d'un nombre fini de quanta d'énergie localisés en des points de l'espace, chacun se déplaçant sans se diviser et ne pouvant être absorbé ou produit que d'un bloc. » (Einstein 1905)¹

Beaucoup des démonstrations de cet article de 1905 se font à partir de l'analogie avec la théorie statistique des gaz. C'est cette approche statistique qu'il utilise dans la plupart de ses travaux ultérieurs en mécanique quantique : *détermination des chaleurs spécifiques* en 1907, celui de 1917 sur *les émissions spontanées et stimulées* que nous fêtons, *statistique quantique* en 1924 et *futurs condensats de Bose-Einstein* en 1925. Il est donc naturel qu'il soit conduit à considérer toujours le modèle des quanta comme incomplet.

C'est en 1909 qu'Einstein propose la dualité onde-particule au sens moderne comme une synthèse entre les deux points de vue. Il montre que les fluctuations de l'énergie du rayonnement d'un corps noir contenues dans un petit volume étaient égales à la somme de deux termes différents : l'un de ces termes se comprenait bien si la lumière était une superposition aléatoire d'ondes continues (c'est le *speckle* d'aujourd'hui), alors que l'autre ne se comprenait bien que si la lumière était un ensemble de corpuscules ponctuels indépendants (c'est le « bruit de photons » d'aujourd'hui). Dans son introduction de 1909, il écrit : « Il est indéniable qu'il existe un ensemble de faits relatifs aux rayonnements qui indiquent que la lumière possède certaines propriétés fondamentales que l'on comprend mieux en adoptant le point de vue de la théorie newtonienne de l'émission de lumière que celui de la théorie ondulatoire. C'est pourquoi je pense que la prochaine étape du développement de la physique théorique nous fournira une théorie de la lumière que l'on pourra interpréter comme une sorte de fusion de la théorie ondulatoire et de la théorie de l'émission de lumière² ».

Et il termine son article ainsi : « Les deux caractéristiques structurelles (structure ondulatoire et structure en quanta), qui toutes deux doivent être attribuées au rayonnement, conformément à la formule de Planck, ne doivent pas être tenues pour incompatibles. »

(1) A. Einstein, « Un point de vue heuristique concernant la production et la transformation de lumière », *Annalen der Physik* 17, 1905, pp. 132-138, traduit in A. Einstein, *Œuvres choisies I. Quanta*, Editions du Seuil, 1989, p. 39.

(2) A. Einstein, « L'évolution de nos conceptions sur la nature et la constitution du rayonnement », *Physikalische Zeitschrift* 10, 1909, p. 817-825, traduit in A. Einstein, *Œuvres choisies I. Quanta*, Editions du Seuil, 1989, p. 87.

2. L'interprétation de la dualité ondes-corpuscules. L'approche « réaliste » de de Broglie-Bohm

La question que posait d'emblée cette double description était le statut des deux composantes par rapport à la réalité physique. Dans la réponse apportée par l'interprétation de Copenhague, le corpuscule n'a pas « réellement » de position spatiale avant un acte de mesure. Cette position est pour ainsi dire créée par cet acte, elle résulte de l'interaction du phénomène avec l'instrument de mesure, de plus avec une valeur aléatoire ; et il n'existe pas de possibilités d'aller au delà de ce constat. En considérant la fonction d'onde comme une description uniquement statistique ou probabiliste, manifestant notre connaissance *incomplète* d'une réalité (la trajectoire du corpuscule) qui resterait déterministe, Einstein reste au contraire fidèle à la conception classique de la physique qui avait prévalu jusque là.

Nous allons revenir plus loin sur ce débat autour du déterminisme, du réalisme et finalement de la complétude de la physique quantique. Mais cette préférence d'Einstein pour le réalisme explique pourquoi au congrès Solvay de 1927 il défend de Broglie et sa proposition de trajectoires pilotées par la phase de l'onde : « À mon avis, on ne peut lever cette objection que de cette façon-ci, qu'on ne décrit pas seulement le processus par l'onde de Schrödinger, mais qu'en même temps on localise la particule pendant la propagation. Je pense que M. de Broglie a raison de chercher dans cette direction. »

Louis de Broglie venait en effet de proposer l'onde pilote qui donne une autre interprétation de la dualité ondes-corpuscules et qui sera retrouvée en 1952 par David Bohm ; au congrès Solvay, il écrit : « On admettra l'existence, en tant que réalités distinctes, du point matériel et de l'onde continue, représentée par la fonction Ψ , et l'on prendra comme postulat que le mouvement du point est déterminé en fonction de la phase de l'onde par l'équation ci-dessous. On conçoit alors l'onde continue comme guidant le mouvement de la particule. C'est une onde pilote. » (de Broglie 1927)³

$$\mathbf{v} = \nabla S/m \text{ où } S \text{ est la phase de } \Psi = \rho \exp(iS/\hbar).$$

Dans *la théorie de l'onde pilote*, une particule est représentée à la fois par la fonction d'onde et par sa position. La mécanique quantique est incomplète et il faut lui ajouter la position de la particule qui sera considérée comme une variable cachée par les adversaires de l'interprétation de de Broglie. Cette onde pilote permet d'expliquer simplement la dualité ondes-corpuscules dans des expériences telles que celle des « fentes de Young » et celle de Stern et Gerlach, et de considérer la mécanique quantique comme réaliste et déterministe.

L'approche de Louis de Broglie est basée sur l'analogie qu'il fait avec la mécanique rationnelle classique dans laquelle on peut représenter mathématiquement l'évolution d'un point matériel aussi bien par les équations de Newton (corpuscule) que par l'action

(3) L. de Broglie, « La nouvelle dynamique des quanta », in *Electrons et Photons*, Gauthier-Villars, 1928.

d'Hamilton-Jacobi (champ) : la liaison entre les deux représentations se faisant par la vitesse de la particule qui est donnée par l'équation $\mathbf{v} = \nabla S/m$ où S est l'action d'Hamilton-Jacobi. Cette *dualité action-corpuscule* en mécanique classique est peu connue. On notera que l'onde pilote permet de plus de considérer qu'il peut exister une continuité entre mécanique quantique et mécanique classique.

L'approche de de Broglie, qu'il abandonne dès 1928, fut largement oubliée jusqu'à ce qu'en 1952 Bohm publie un article la présentant de façon renouvelée. Les « nostalgiques » d'une approche réaliste y verront alors avec John Bell lors de la parution de l'article, une « indicible surprise » ou encore « l'impossible réalisé ». Ainsi l'inventeur des « inégalités de Bell » dont nous parlerons plus loin également, pourra-t-il écrire : « Mais alors pourquoi Born ne m'avait-il pas parlé de cette « onde pilote » ? Ne serait-ce que pour signaler ce qui n'allait pas avec elle ? Pourquoi von Neumann ne l'a-t-il pas envisagée ? Plus extraordinaire encore, pourquoi des gens ont-ils continué à produire des preuves d'impossibilité, après 1952, et aussi récemment qu'en 1978 ? Alors que même Pauli, Rosenfeld et Heisenberg ne pouvaient guère produire de critique plus dévastatrice de la théorie de Bohm que de la dénoncer comme étant « métaphysique » et « idéologique » ? Pourquoi l'image de l'onde pilote est-elle ignorée dans les cours ? Ne devrait-elle pas être enseignée, non pas comme l'unique solution, mais comme un antidote à l'autosatisfaction dominante ? Pour montrer que le flou, la subjectivité et l'indéterminisme ne nous sont pas imposés de force par les faits expérimentaux, mais proviennent d'un choix théorique délibéré ? » (John Bell 1987)⁴

3. Déterminisme et Réalisme

Le débat sur l'interprétation a marqué le congrès Solvay de 1927 : de Broglie y présentait une onde qui pilotait une particule ; Schrödinger y présentait l'onde de l'électron de l'atome d'hydrogène comme une onde soliton. C'est l'interprétation, qui s'appellera plus tard l'interprétation de Copenhague, défendue par Niels Bohr, Werner Heisenberg, Max Born et Wolfgang Pauli, qui a prévalu, interprétation selon laquelle il *fallait renoncer au déterminisme en sciences et à l'existence d'une réalité objective* (c'est-à-dire indépendante de la mesure). Elle s'est imposée contre les fortes réticences de Max Planck, Albert Einstein, Louis de Broglie et Edwin Schrödinger, ce que rappelle Max Born en 1954 dans son discours de réception du prix Nobel : « Quand j'ai affirmé que les physiciens avaient accepté le mode de pensée que nous avons développé à cette époque, ce n'était pas exact : il y a quelques exceptions très remarquables et justement parmi les hommes qui ont contribué le plus à l'édification de la théorie quantique. Planck lui-même est resté jusqu'à sa mort parmi les sceptiques. Einstein, de Broglie et Schrödinger n'ont cessé d'insister sur ce que l'interprétation statistique de la mécanique quantique avait de peu satisfaisant, de réclamer un retour aux conceptions de la physique classique newtonienne et de proposer des moyens d'y arriver sans contredire aux faits expérimentaux. Il est impossible de ne pas écouter des voix d'un tel poids. [...] En fait, leurs objections ne contestent nullement l'exactitude des formules,

(4) J.S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1969.

mais leur interprétation. Dans la discussion il faut distinguer deux questions étroitement entremêlées : celle du déterminisme et celle de la réalité. » (Born 1954)⁵

Jusqu'à sa mort en 1954, Einstein défendra le déterminisme et l'existence d'une réalité sans observateur. En 1926, il écrit à Born cette phrase maintenant classique : « La mécanique quantique force le respect. Mais une voix intérieure me dit que ce n'est pas encore le *nec plus ultra*. La théorie nous apporte beaucoup de choses, mais elle ne nous rapproche guère du secret du Vieux. De toute façon, je suis convaincu que lui au moins ne joue pas aux dés ».

4. Variables cachées et complétude de la mécanique quantique

La discussion sur le déterminisme et le réalisme s'est prolongée pendant tout le siècle, en se précisant et s'enrichissant de nouvelles questions. Si, comme le pensait Einstein, la théorie quantique est incomplète, c'est qu'il existe des *variables cachées*, auxquelles la science n'a pas pour le moment accès ni théoriquement ni expérimentalement, et qui, connues, permettraient de rendre compte de manière non statistique de la réalité du phénomène.

En 1932, John Von Neumann dans son livre *Les fondements mathématiques de la mécanique quantique* semble démontrer l'impossibilité de compléter la mécanique quantique par des « variables cachées ». Cette impossibilité devint pratiquement un postulat de la mécanique quantique, fondé sur l'indiscutable autorité de mathématicien de Von Neumann.

En 1935, Einstein avec Boris Podolsky et Nathan Rosen relance le débat sur la complétude de la mécanique quantique avec l'article « Peut-on considérer que la mécanique quantique donne de la réalité physique une description complète ? » (Einstein et al., 1935)⁶. Cet article correspond à une expérience de pensée, connue sous le nom de paradoxe EPR et qui est appelé dans le chapitre 10.

Les auteurs considèrent un système de deux particules intriquées par la position et montrent que si la mesure de la position d'une particule est mesurée, la position de l'autre est connue sans avoir été mesurée directement ; elle constitue donc un « élément de réalité physique » qui doit trouver une explication dans la théorie physique. Le formalisme quantique classique, qui ne considère pas la position de la particule comme une réalité physique, est donc incomplet. Et l'article EPR se termine ainsi : « Bien que nous ayons montré ici que la fonction d'onde ne fournit pas une description complète de la réalité physique, nous n'avons pas pour autant répondu à la question de savoir si une telle description existe. Nous avons néanmoins la conviction qu'une telle théorie est possible. »

(5) M. Born, L'interprétation statistique de la mécanique quantique (Conférence Nobel, 1954), *J. Phys. Radium*, 1955, 16(10), pp. 737-743

(6) A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen (1935), Can quantum mechanical description of reality be considered complete?, *Phys. Rev.* 47, 777-780.

La conclusion d'Einstein, contestée par Bohr, sera oubliée pendant presque un demi-siècle. Pourtant, depuis 1982, l'article EPR est devenu un des articles les plus cités de la littérature scientifique. Cela est dû d'abord à Bohm qui propose en 1951 une expérience voisine de l'expérience EPR d'Einstein mais avec deux particules intriquées par les spins et non par les positions. Puis, en 1964, John Bell propose des inégalités que doivent vérifier des corrélations entre les mesures des spins des deux particules s'il n'existe pas d'interactions à distance entre elles. L'expérience d'Aspect, de Dalibard et de Roger, réalisée en 1982, montre que les inégalités de Bell sont violées et confirme l'existence d'une interaction à distance plus rapide que la lumière entre les spins des deux particules ; elle semble donc en contradiction avec la relativité. *C'est sur cette expérience EPR-B que se concentre depuis la discussion sur le réalisme, la complétude et une question nouvellement apparue bien qu'en germe dans les formalismes, celle de la non-localité en mécanique quantique.*

5. L'interaction à distance, la « non-localité »

L'expérience d'Alain Aspect en 1982, décrite dans le chapitre 7 « Tests expérimentaux de la non localité quantique avec des paires de photons intriquées » met en évidence l'intrication à distance par les spins. Elle diffère cependant de l'expérience EPR initiale d'Einstein où l'intrication à distance se faisait par les positions. La propriété de non-localité des particules EPR-B qui semble en contradiction avec le principe de la Relativité restreinte sur la vitesse des interactions limitée par la vitesse de la lumière. Il est donc légitime, comme le fait Alain Aspect, de considérer que cette expérience correspond à la seconde révolution quantique qu'il faut intégrer aux diverses réponses apportées aux questions du déterminisme et du réalisme. C'est ainsi qu'une explication réaliste a été proposée par Karl Popper dans la dernière édition (1982) de *La Théorie quantique et le schisme en physique*. Il écrit à propos des expériences d'Aspect qui venaient justes d'être réalisées : « Je ne suis pas tout à fait convaincu que ces expériences sont interprétées de façon correcte ; mais si elles le sont, nous devons simplement admettre l'action à distance. Je pense (avec J.-P. Vigié) que cela serait, bien entendu, très important. Mais je ne pense pas un seul instant que cela ébranlerait, ou même toucherait, le réalisme. Newton et Lorentz étaient réalistes et admettaient l'action à distance ; et l'expérience d'Aspect serait la première expérience cruciale visant à trancher entre les interprétations lorentzienne et einsteinienne des transformations de Lorentz. » (Popper 1982)⁷

6. La réalité objective sans observateur et la non-existence du chat de Schrödinger

« J'aime à penser que la lune existe, même si je ne la
regarde pas. »

(7) K. Popper, *The Postscript to The Logic of Scientific Discovery III. Quantum Theory and the Schism in Physics*, Hutchison (trad. fr., *La Théorie quantique et le schisme de la physique*, Hermann, 1996).

Le déterminisme et la réalité physique qu'Einstein et de Broglie ont défendus jusqu'à la fin de leur vie les ont fait considérer comme « dépassés » par le milieu scientifique. Ils en étaient tous deux bien conscients. En 1938 dans une lettre à Maurice Solovine, Einstein écrit : « On dit que la nécessité de concevoir la nature comme réalité objective est un préjugé suranné tandis qu'on fait l'éloge des physiciens quantiques. Les hommes sont encore plus sensibles à la suggestion que les chevaux, et chaque période est dominée par l'air du temps, ce qui fait que la plupart des hommes ne voient pas le tyran qui les gouverne. » (Einstein 1938)⁸ Et dans une lettre à Born de 1944, il résume ainsi sa position :

« Nos espérances scientifiques nous ont conduits chacun aux antipodes de l'autre. Tu crois au Dieu qui joue aux dés, et moi à la seule valeur des lois dans un univers où quelque chose existe objectivement, que je cherche à saisir d'une manière sauvagement spéculative. Je crois fermement, mais j'espère que quelqu'un trouvera une manière plus réaliste ou une base plus concrète que celles qui me sont données. Le grand succès de la théorie des quanta dès son début ne peut pas m'amener à croire à ce jeu de dés fondamental, bien que je sache que mes confrères plus jeunes voient là un effet de la fossilisation. On découvrira un jour laquelle de ces deux attitudes instinctives était la bonne. » (Einstein, 1969, lettre n° 81)⁹

Sur le paradoxe de l'existence ou non du chat de Schrödinger (analysé en profondeur par Franck Laloë dans le chapitre 6), Einstein rappelle sa position dans cette lettre à Schrödinger du 22 décembre 1950 : « Tu es (avec Laue) le seul des physiciens contemporains à voir que l'on ne peut contourner l'hypothèse de réalité – pour peu que l'on soit honnête. La plupart des physiciens ne voient pas qu'ils sont en train de jouer de façon dangereuse avec la réalité – la réalité vue comme quelque chose d'indépendant de toute observation. Ils croient, de façon arbitraire, que la théorie quantique fournit une description de la réalité, et même une description complète. Cette description est cependant réfutée de façon élégante par ton exemple du système (atome radioactif + compteur Geiger + amplificateur + poudre explosive + chat dans une boîte), où la fonction Ψ du système contient à la fois le chat vivant et le chat réduit en miettes. Faut-il que l'état du chat soit produit par le physicien qui, à un moment donné, examine ce qui se passe ? En vérité, personne ne doute que l'existence ou la non-existence du chat soit indépendante de l'acte d'observation. Mais alors la description par la fonction Ψ est incomplète et il doit exister une description plus complète. »(Einstein 1950)¹⁰

Pour lui, le paradoxe n'est qu'un artefact de l'incomplétude de la mécanique quantique : le chat n'existe pas au niveau individuel, mais seulement au niveau statistique. Il partagerait sûrement l'interrogation de Franck Laloë, lequel s'étonne dans le chapitre 6 « qu'en physique moderne il faille faire jouer un rôle aussi spécial à un *observateur* où à une information acquise, ce qui donne à la théorie une coloration anthropocentrique inattendue, comme dans l'astronomie médiévale ».

(8) A. Einstein, *Œuvres choisies, 4 Correspondances Françaises*, Editions du Seuil, 1989, p. 292.

(9) A. Einstein, M. Born *Correspondance 1916-1955*, Edition du Seuil, 1972.

(10) A. Einstein, *Œuvres choisies, Quantal*, Editions du Seuil, 1989, p. 250.

7. Venons en maintenant à la présentation des chapitres de cette partie

Les trois premiers chapitres se placent dans la perspective de l'interprétation.

Franck Laloë dans le chapitre 6 « La mécanique quantique : historique et interprétation » fait d'abord l'historique des débats que la physique quantique a suscité dès son apparition, et dresse une revue critique des interprétations qui ont pu être proposées. Il reprend en particulier les interrogations d'Einstein sur le déterminisme, la réalité et la non localité.

Alain Aspect dans le chapitre 7 « Tests expérimentaux de la non localité quantique avec des paires de photons intriqués » traite de la question de la non-localité quantique, sous jacente à l'expérience de pensée EPR proposée par Einstein, Podolsky, Rosen en 1935 et à l'expérience EPR-B qu'il a réalisée avec des photons intriqués. Il montre les contraintes apportées aux réponses à cette question par ses expériences. Contraintes qui, de son point de vue comme de celui de nombreux théoriciens, font de la physique quantique, par le phénomène d'intrication une théorie définitivement *non-locale*.

Jean Bricmont dans le chapitre 8 « La théorie de de Broglie-Bohm comme façon rationnelle de compléter la mécanique quantique » revient quant à lui sur la « réalité » de l'état quantique, le processus de mesure et la place de l'observateur. Il argumente la théorie de de Broglie-Bohm, résolvant la dualité ondes-particules par l'idée de particules guidées par les ondes. Selon cet auteur cette approche, sans changer le formalisme quantique et les calculs qui y sont effectués pour rendre compte des faits expérimentaux, possède l'avantage de fournir une interprétation « réaliste » de ces mêmes faits ; notamment en éliminant le rôle de l'observateur et en lui substituant le rôle « actif » de l'appareil de mesure.

Les deux derniers chapitres présentent des formalismes et des expériences actuelles se situant dans la ligne initiée par Einstein, dans ses travaux de 1916, concernant la théorie quantique du rayonnement. Ils correspondent à l'espérance d'Einstein dans la réalisation de calculs quantiques *ab initio* et de manipulation de particules uniques. Ils montrent les progrès prodigieux générés ces dernières années par la mécanique quantique en restant à l'intérieur du modèle standard de la mécanique quantique et de l'électrodynamique quantique.

Au chapitre 9 « Atomes et lumière à l'équilibre thermique : de l'argument d'Einstein aux mélasses optiques », Jean Dalibard reprend la problématique d'Einstein concernant une population d'atomes soumis à un rayonnement de corps noir. La première question est celle de la répartition d'une telle population selon les *niveaux d'énergie interne* des atomes, lorsque l'équilibre thermodynamique est atteint. Le raisonnement d'Einstein, basé sur la physique statistique et que l'auteur reproduit, montrait que son hypothèse de trois processus élémentaires d'interaction, à savoir absorption, émission spontanée et émission stimulée, était *compatible* avec la loi de Planck ; moyennant, cependant, un choix particulier pour les valeurs des coefficients A, B et B' paramétrant ces processus.

Restait, de l'aveu même d'Einstein, que les coefficients A, B et B' pourraient être calculables *ab initio* si on disposait « d'une version modifiée de l'électrodynamique quantique et de la mécanique, compatible avec l'hypothèse quantique ». C'est ce que fait Jean Dalibard en s'appuyant sur le formalisme actuel « moderne ». Une démarche similaire est ensuite développée à propos de la répartition de la population des atomes, cette fois sur le spectre des

valeurs d'impulsion ; dans l'hypothèse formulée par Einstein, que les trois processus comportent un échange d'impulsion entre l'atome et le photon. Dalibard répond ici aux « faiblesses » qu'Einstein reconnaissait à son modèle uniquement statistique dans lequel « les instants et les directions des processus élémentaires y sont livrés au hasard ». L'auteur rappelle enfin que ces échanges d'impulsion sont à la base des techniques de refroidissement par laser, en particulier le refroidissement Sisyphé dont il est l'un des auteurs, et de leurs nombreuses applications.

Le dernier chapitre de cette partie, illustre les avancées techniques effectuées aux cours des vingt dernières années pour tester la physique quantique par des expérimentations manipulant un faible nombre de particules, voire une particule unique. Dans ce chapitre 10 « Bohr's Legacy in Cavity QED », Serge Haroche et Jean-Michel Raimond rappellent d'abord deux expériences de pensée imaginées et discutées par Einstein et Bohr : l'une d'elle est une expérience dans laquelle Einstein imagine peser une boîte contenant quelques photons, et suivre les variations du poids lorsque les photons s'en échappent ; l'autre est une variante des fentes de Young : des particules sont envoyées une à une dans le dispositif à deux fentes, et l'on cherche à savoir par quelle fente passe chacune d'entre elles. Pour ce faire, le support de l'une des fentes est possiblement mobile ; la détection d'une impulsion donnée à ce support par le passage d'une particule est alors le témoin de ce passage. Les auteurs montrent comment ils ont réalisé, dans leur essence, ces deux expériences, jugées impossibles à l'époque des fondateurs de la physique quantique, la seconde étant, en quelque sorte, un complément de la première. Ils en détaillent la mise en œuvre technique. Ils exposent le principe général d'une mesure *non destructive*, en l'appuyant sur le formalisme quantique. Des atomes, préparés dans une superposition égalitaire des deux états, fondamental et excité, sont envoyés un par un dans la cavité contenant les photons ; ils en ressortent « sans qu'il y ait absorption d'un seul photon » dans une superposition des deux mêmes états différente de l'initiale, laquelle superposition de sortie dépend du nombre de photons présents. Un dispositif de mesure interagit enfin avec chaque atome sortant et projette aléatoirement la superposition de sortie sur l'une de ses composantes, selon les lois quantiques de probabilité. Aussi la mesure d'un seul sortant ne suffit pas ; l'évaluation du nombre de photons est affaire de statistique sur les résultats obtenus sur chacun d'eux : elle s'affine progressivement, pour se stabiliser à partir d'un certain nombre de sortants.

8. Conclusion

Bien que répondant à ses critères sur le déterminisme et le réalisme physique, qui sont compatibles avec la Relativité, l'interprétation de de Broglie n'a pas semblé suffisante à Einstein pour expliquer la mécanique quantique. De plus, le chapitre d'Aspect montre qu'il existe une non localité liée aux spins qu'il faut prendre en compte dans l'interprétation. Enfin, les chapitres de Dalibard, d'Haroche et de Raymond montrent que pour réaliser des calculs quantique *ab initio* et manipuler des particules uniques, l'interprétation de la mécanique quantique doit être basée sur l'électrodynamique quantique. Nous verrons dans la conclusion que l'interprétation de de Broglie-Bohm peut cependant être « un bon laboratoire d'idées » comme le disait Bernard d'Espagnat.

Le comité de lecture de l'AEIS¹¹

(11) Michel Gondran, Gilbert Belaubre, Jean-Pierre Treuil et Jean Schmets

6

Situation actuelle de la mécanique quantique : des difficultés conceptuelles subsistent*

Franck Laloë

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-UMPC, 75005 Paris, France

Résumé

La mécanique quantique est l'une des plus grandes réussites de toute l'histoire des sciences. Ses prédictions ont été vérifiées dans un très grand nombre de cas, avec parfois une précision fantastique de 10^{-12} . Historiquement, elle s'est développée en plusieurs étapes distinctes, chacune d'entre elles impliquant des interprétations différentes, parfois opposées. Puis s'est dégagée une version dite standard, dans la ligne des travaux de von Neumann et de Dirac, qui est généralement celle présentée dans les ouvrages et enseignée. Mais de réelles difficultés conceptuelles subsistent ; nous sommes loin d'un consensus universel sur la meilleure façon d'interpréter la nature de la fonction d'onde, la mesure, etc. et leur relation (éventuelle) avec la « réalité physique ». C'est pourquoi de nombreuses présentations et/ou interprétations de la mécanique quantique ont été proposées. L'exposé en décrira quelques-unes : bien sûr celle dite de Copenhague (Bohr), l'interprétation statistique (à laquelle on attache souvent le nom d'Einstein), etc. avec également les trois interprétations non-standard les plus célèbres : dBB (de Broglie-Bohm), GRW/CSL (équation de Schrödinger stochastique), Everett (parfois dite « des mondes multiples »)

(*) Ce chapitre est issu du livre *Comprenons nous vraiment la mécanique quantique*, Franck Laloë, EDP Sciences/CNRS Editions, 2011.

Abstract

Current situation of quantum mechanics: some conceptual problems remain

Quantum mechanics is one of the most successful theories of all physics. Its predictions have been verified in a huge number of situations, sometimes with a fantastic accuracy of 10^{-12} . Historically, it was developed in several stages, each of them implying a different interpretation, sometimes opposite of the others. A “standard” version then emerged, in the line of the contributions of von Neumann and Dirac, which is the version generally found in textbooks. Nevertheless, real conceptual difficulties remain: we are far from a universal consensus concerning the best way to interpret the nature of the wave function, the measurement process, etc. and their possible relation with “physical reality”. This is the reason why many interpretations of quantum mechanics have been proposed. A few will be described during the talk: the Copenhagen interpretation (Bohr), the statistical interpretation (Einstein, Ballentine, etc.) as well as the three most famous non-standard interpretations: dBB (de Broglie Bohm), GRW/CSL (Stochastic Schrödinger dynamics) and Everett (sometimes described as “many worlds”).

Un certain nombre des difficultés conceptuelles de la mécanique quantique, déjà identifiées par ses inventeurs, subsistent à l'heure actuelle. Que le lecteur n'en retire pas l'impression qu'il s'agit d'une théorie peu solide ! L'arbre ne doit pas cacher la forêt : indépendamment de ces difficultés très réelles, la mécanique quantique est assurément l'une des théories les plus couronnées de succès de toute la science. On peut même considérer que sa faculté d'adaptation aux situations les plus variées est sa caractéristique la plus extraordinaire ; elle continue à être toujours aussi efficace dans ses prédictions en accompagnant les progrès expérimentaux qui permettent constamment d'avoir accès à de nouvelles situations physiques que les pères fondateurs de la théorie n'avaient aucun moyen de prévoir. De fait, il existe très peu de théories dont la vérification ait été faite avec la même précision, et ceci dans des domaines d'application variés. Il subsiste cependant que, sur le plan conceptuel, des difficultés subsistent, et ce sont elles qui font l'objet du présent chapitre. Comme nous le verrons, la plupart mettent en jeu le processus de mesure quantique et la nature du phénomène aléatoire qui se produit à cette occasion.

Dans le point de vue de Von Neumann ce n'est que lorsqu'une mesure est effectuée que des sauts aléatoires se produisent, selon le postulat de réduction du vecteur d'état. Sinon, en général la fonction d'onde évolue progressivement, d'une façon parfaitement prévisible et continue, selon l'équation de Schrödinger. Bien évidemment, utiliser deux postulats aussi différents pour l'évolution du même objet mathématique¹ est une situation tout à fait

(1) Au lieu du « point de vue de Schrödinger », il est équivalent d'utiliser « point de vue de Heisenberg » ; l'évolution continue du vecteur d'état est alors transférée vers les observables du système (opérateurs agissant sur son espace des états), tandis que le vecteur d'état reste indépendant du temps en l'absence de mesure. Les observables évoluent de façon continue, que des mesures soient effectuées ou pas. Mais le vecteur d'état doit encore obéir à des règles différentes suivant la situation : la plupart du temps il reste parfaitement constant, mais lors d'une mesure il saute brusquement vers une nouvelle valeur prenant en compte l'information nouvelle. L'acquisition d'information est donc toujours considérée comme un processus physique totalement différent de l'évolution « normale », ce qui introduit la nécessité de bien définir la frontière entre les deux processus.

inhabituelle en physique. Cette idée était d'ailleurs une totale nouveauté lorsqu'elle a été introduite, et reste actuellement unique dans toute la physique, ainsi qu'une source de difficultés – en particulier celles liées à la compatibilité entre les deux postulats. Il serait plus naturel de voir les processus de mesure, non pas comme complètement à part, mais simplement comme un processus d'interaction ordinaire entre un système mesuré (qui peut éventuellement être microscopique) et un appareil de mesure macroscopique ; il semblerait bien préférable d'utiliser une théorie plus générale où un tel processus soit traité dans le cadre des lois ordinaires de la physique, de sorte que la distinction entre évolution ordinaire et mesure devienne inutile. En d'autres termes, pourquoi donc attribuer aux mesures un caractère aussi particulier, de sorte que deux postulats distincts deviennent nécessaires ? Où exactement s'arrête le domaine d'application du premier pour laisser la place au second ? Plus précisément, parmi toutes les interactions – ou perturbations – que peut subir un système physique, lesquelles doivent être considérées comme normales (évolution de Schrödinger), et lesquelles comme une mesure (réduction du vecteur d'état) ? On voudrait mieux comprendre la raison pour laquelle la physique nous demande d'introduire une frontière entre deux mondes et sa nature : le monde de Schrödinger, parfaitement continu et déterministe, et celui très différent de Born et de la mesure, où l'évolution déterministe cesse pour laisser la place à des processus discontinus et aléatoires.

Dans le point de vue de Bohr également, les processus de mesure et les appareils associés sont clairement « discriminés » du système étudié. Dans l'univers de Bohr, l'évolution se fait généralement de façon libre et régulière selon l'équation de Schrödinger. Mais, dans le cas particulier des événements mettant en jeu un transfert d'information vers des observateurs, s'introduit une composante aléatoire fondamentale. De plus, ces opérations de mesure sont en quelque sorte considérées comme des « bulles fermées » incluses dans cette évolution générale, des événements clos de leur début à leur fin et s'étendant sur une région d'espace-temps, et qu'il ne faut pas chercher à décomposer de façon plus fine en événements relativistes. Ces processus sont caractérisés par le fait qu'une intelligence humaine pose une question à la Nature, dont résulte une réponse unique, mais non-déterministe.

Que nous préférions le point de vue de Bohr ou de Von Neumann, nous sommes en face d'un problème logique qui n'existait pas en mécanique classique, lorsque personne ne pensait que les mesures donnant de l'information doivent être traitées à part parmi les processus physiques. Bohr nous apprend que nous ne devrions pas tenter de transposer notre expérience journalière du monde vers des systèmes microscopiques ; certes mais alors, pour chaque expérience, où mettre exactement la limite entre les deux mondes ? Peut-on réellement se contenter de remarquer que la distance entre macroscopique et microscopique est tellement grande que la position de la frontière entre ces deux mondes est sans importance ?

On peut de plus trouver très surprenant qu'en physique moderne il faille faire jouer un rôle aussi spécial à un « observateur » ou à l'information acquise, ce qui donne à la théorie une coloration anthropocentrique inattendue, comme dans l'astronomie médiévale. Devons-nous réellement rejeter comme non-scientifique l'idée d'une description scientifique de systèmes physiques isolés, simplement parce que nous ne les observons pas ? Si les observateurs sont si importants, comment doit-on les définir exactement ?

Par exemple, est-ce qu'un animal peut réaliser une expérience et réduire le vecteur d'état, ou est-ce l'unique apanage des êtres humains ? Bell avec humour a posé la question [2] : « La fonction d'onde de l'Univers était-elle en train d'attendre d'effectuer son premier saut pendant des milliers de millions d'années jusqu'à l'apparition de la première créature vivante unicellulaire ? Ou a-t-il fallu attendre un peu plus l'apparition d'un observateur plus qualifié – avec un doctorat d'état ? » – voir aussi la référence [3], en particulier son titre. Ces questions très générales sont difficiles et quelque peu philosophiques, par exemple London et Bauer [4] ont proposé que la capacité de jouer le rôle d'un observateur en théorie quantique soit liée à la faculté d'introspection d'une créature vivante.

Une autre difficulté provient du caractère aléatoire des prédictions de la mécanique quantique. En soi, une telle situation est habituelle en physique, où par exemple la mécanique statistique classique fait un usage constant de probabilités. Mais les probabilités sont alors associées étroitement à la notion d'ensemble statistique : on suppose par exemple que le système est choisi au hasard parmi un très grand nombre de systèmes similaires définissant un même ensemble. Certes, tous ces systèmes partagent un certain nombre de propriétés contenues dans la description statistique, mais une description plus précise peut révéler qu'à un niveau plus fin, ils diffèrent aussi par un certain nombre de spécificités, ou par des influences minimales qu'ils ont subies, etc. En d'autres termes, chaque système individuel possède plus de propriétés physiques que celles spécifiées pour l'ensemble. La même question se transpose alors immédiatement à la mécanique quantique : si ses prédictions sont des probabilités, faut-il en conclure qu'elle ne décrit que des ensembles de systèmes ? Ou faut-il au contraire considérer que le vecteur d'état fournit la description la plus précise possible d'un seul système physique ?

Il est impossible de résumer tout ce qui a été écrit sur ces difficultés, en particulier sur le rôle exact et l'évolution du vecteur d'état, en un nombre raisonnable de pages. A titre d'illustration, nous discuterons quelques exemples, la chaîne sans fin de Von Neumann (§1), le chat de Schrödinger (§2), l'ami de Wigner (§3) et les mesures négatives (§4). Puis (§5) nous proposerons un certain nombre de citations anciennes ou plus récentes, qui permettent de se faire une bonne idée de la variété des positions possibles, avant de terminer par un paragraphe mentionnant quelques points qui ont donné lieu à des erreurs dans le passé (§6).

I. La chaîne (ou régression) sans fin de Von Neumann

Von Neumann, dans son traité publié en 1932 (chapitres 4-6 de [5]), a introduit une théorie explicite de la mesure quantique. À la différence du point de vue de Bohr, Von Neumann considère l'appareil de mesure comme un système quantique sur le même plan que le système mesuré. Il étudie ce qui se produit lorsque le système mesuré S est mis en contact avec un appareil de mesure M et interagit avec lui pendant un certain temps. M inclut un « pointeur » (ou aiguille de cadran) macroscopique qui, une fois que l'interaction est terminée, a atteint une position qui dépend de l'état initial de S . Nous donnons ci-des-

sous une introduction aux idées générales concernant la chaîne de Von Neumann, sans écrire d'équations.

Commençons par un cas particulier : celui où, initialement, le système S était dans un état propre de l'observable mesurée A caractérisé par une de ses valeurs propres² a . La position atteinte par le pointeur dépend alors de l'état propre ; on peut donc dire que l'observation de la position macroscopique de P revient à mesurer l'observable et obtenir le résultat a .

Mais, de façon plus générale, initialement S n'est pas dans un état propre de l'observable mesurée A , mais dans une superposition de tels états. Comme l'équation de Schrödinger est linéaire, elle prédit que le système total $S+M$ atteint après interaction une superposition d'états. Dans les différentes composantes de cette superposition, le pointeur se trouve dans des positions différentes, chacune correspondant à un résultat de mesure différent ; on dit alors que les deux systèmes S et M sont dans un état d'intrication quantique. Ainsi, la linéarité de l'équation de Schrödinger la rend incapable d'effectuer une sélection entre ces résultats ; elle ne peut conduire qu'à une superposition de tous les résultats, comme si aucun résultat bien défini n'avait émergé de la mesure !

Pour résoudre ce problème, on pourrait alors être tenté d'ajouter un « second étage » au processus, et d'introduire un second appareil de mesure M' dont le rôle sera de déterminer la position du pointeur de M . Mais le processus se répète et la linéarité de l'équation de Schrödinger conduit à une superposition plus étrange encore puisque, cette fois, elle contient $S+M+M'$ ainsi que des positions différentes des pointeurs de M et M' . Par récurrence, si l'on ajoute de plus en plus d'appareils de mesure, M'' etc., on crée une chaîne de plus en plus longue de systèmes corrélés, sans jamais arriver à sélectionner un seul résultat de mesure. Ce processus récurrent M, M', M'', \dots est appelé régression de Von Neumann, ou encore chaîne infinie de Von Neumann. On peut résumer toute cette discussion par une seule phrase : « L'unicité des résultats ne peut pas émerger de la seule équation de Schrödinger ; elle crée en effet une chaîne de superpositions cohérentes qui se propage sans fin ».

Un exemple simple est utile pour illustrer le processus de façon plus concrète. Supposons par exemple que nous considérons un atome de spin $1/2$ qui pénètre dans le champ magnétique d'un analyseur de Stern et Gerlach. Si l'état initial du spin correspond à une direction qui est, soit parallèle, soit antiparallèle à la direction d'analyse de l'appareil (définie par la direction de son champ magnétique), le spin est initialement dans un état propre correspondant à la mesure ; le paquet d'ondes est dévié vers le haut dans le premier cas, vers le bas dans le second. Mais si la direction initiale du spin était perpendiculaire à la direction d'analyse, la fonction d'onde se sépare en deux paquets d'ondes différents, l'un dévié vers le haut, l'autre vers le bas ; c'est à nouveau une conséquence directe de la linéarité de l'équation de Schrödinger. Lorsqu'ils se propagent plus loin, chacun des deux paquets d'onde peut frapper un détecteur avec lequel il interagit et dont il modifie l'état (ainsi que le sien) ; par exemple, les atomes de spin $1/2$ sont ionisés et produisent des électrons, de sorte que la superposition linéaire englobe maintenant plus de particules. De plus, lorsqu'une cascade d'électrons est produite dans un multiplicateur d'électrons,

(2) Pour simplifier, nous supposons que cette valeur propre n'est pas dégénérée, mais la généralisation à des valeurs propres dégénérées est possible.

tous ces électrons supplémentaires deviennent également partie de la superposition. Il n'y a pas de limite intrinsèque à ce qui devient bientôt la propagation d'une chaîne sans fin : rapidement, la linéarité de l'équation de Schrödinger conduit à un vecteur d'état qui est la superposition cohérente d'états où un nombre macroscopique de particules, des courants macroscopiques et, pourquoi pas, des aiguilles d'appareils ou des enregistreurs qui écrivent des chiffres macroscopiques sur une feuille de papier ! Si nous restons dans le cadre de l'équation de Schrödinger, rien ne nous permet de stopper la progression de cette régression infinie. Devons-nous alors accepter l'idée qu'à la fin c'est le cerveau de l'expérimentateur, lorsqu'il prend connaissance des résultats imprimés, et donc un être humain doué de conscience, qui entre dans une telle superposition ?

La notion même de cerveau ou de conscience se trouvant dans une superposition macroscopique n'a rien d'intuitif ni de très clair ; personne n'a jamais observé à la fois deux résultats contradictoires. Est-ce que cette situation étrange devrait être vue comme celle où un résultat expérimental imprimé sur une feuille de papier ressemblerait à deux diapositives superposées, ou une photographie doublement exposée ? En pratique, nous savons bien que nous observons toujours un résultat unique et bien défini dans une expérience ; il semble donc que la superposition linéaire se soit réduite d'une façon ou d'une autre avant de nous atteindre – probablement avant même qu'elle ne devienne suffisamment macroscopique pour mettre en jeu des appareils de mesure. Il semble alors évident³ qu'une théorie raisonnable devrait briser quelque part la chaîne de Von Neumann, quand (ou peut-être avant) elle atteint le monde macroscopique. Cette opération porte souvent le nom de « coupure de Heisenberg » (« Heisenberg cut » en anglais). Mais quand et où exactement effectuer cette coupure ?

Von Neumann conclut à partir de son analyse que, effectivement, il n'est pas possible de formuler les lois de la mécanique quantique sans faire référence à la prise de conscience humaine. Il considère l'émergence d'un résultat unique lors d'une mesure comme un élément irréductible de la théorie. La solution du problème demande alors l'introduction d'un postulat spécial, le « postulat de projection du vecteur d'état » qui force l'émergence de ce résultat unique dès qu'un observateur prend connaissance du résultat. La notion de régression de Von Neumann est également à la source du phénomène de décohérence. Le mot « décohérence » est en fait plutôt utilisé habituellement pour désigner le tout début de la chaîne, au moment où le nombre de degrés de liberté mis en jeu reste encore relativement limité. Mais la notion générale de chaîne de Von Neumann inclut tous les stades de la régression, ce stade initial comme sa prolongation, qui se propage jusqu'à l'autre extrême où le paradoxe devient inacceptable parce que trop contraire au bon sens : le chat de Schrödinger.

2. Le chat de Schrödinger

La fameuse histoire du chat de Schrödinger (1935) illustre le même problème, mais d'une façon différente.

(3) Peut-être pas si évident après tout ? De fait, il existe une interprétation de la mécanique quantique qui repose précisément sur l'idée que la chaîne n'est jamais rompue : l'interprétation d'Everett.

2.1 L'argument

Le chat n'apparaît que dans quelques lignes dans le contexte d'une discussion bien plus générale dans un article de Schrödinger [7] dont le titre est « La situation actuelle de la mécanique quantique ». Il écrit en allemand (pour une traduction en anglais, voir [8]) On peut même imaginer des situations tout à fait grotesques. Un chat est enfermé dans une boîte en acier, dans laquelle se trouve le dispositif diabolique suivant (sur lequel le chat ne peut avoir aucune action) : dans un compteur Geiger se trouve une toute petite quantité de matière radioactive, si petite qu'il faudra par exemple une heure pour avoir des probabilités égales que l'un des noyaux se désintègre, ou alors aucun. En cas de désintégration, le compteur à décharge se déclenche et, par un relais, relâche un marteau qui vient briser une petite ampoule contenant de l'acide cyanhydrique (poison violent). Si on laisse à lui-même l'ensemble du système pendant une heure, on dirait que le chat est toujours vivant seulement si entre-temps aucun noyau ne s'est désintégré. La première désintégration atomique l'aurait empoisonné. La fonction Ψ du système total exprimerait cette situation en contenant un mélange (une superposition de composantes) où le chat est vivant et mort, avec des poids égaux.

Ce type de cas est typique d'une situation où une indétermination initialement restreinte au domaine atomique se propage vers une indétermination macroscopique, qui peut alors être résolue par observation directe. Il nous empêche d'accepter trop naïvement comme valable un modèle « flou » pour représenter la réalité. En lui-même, il n'a rien qui soit peut clair ou contradictoire. Il existe une différence entre une photo bougée ou floue à cause d'une mauvaise mise au point et une photo de nuages et de volutes de fumée.

En d'autres termes, Schrödinger considère une chaîne de Von Neumann, qui part d'un (ou quelques) noyau atomique, qui peut émettre un photon gamma, qui est détecté par un détecteur à rayons gamma, qui est suivi d'un étage d'amplification, qui alors déclenche un système mécanique macroscopique qui ouvre automatiquement une bouteille de poison, qui pour finir tue le chat si la désintégration a eu lieu (figure 1). On est donc dans une situation d'intrication quantique à plusieurs niveaux. Lorsque la probabilité de désintégration est $1/2$, le système global atteint une superposition comprenant deux composantes de poids égal, une où le chat est vivant et une où le chat est mort. Schrödinger considère que, de toute évidence, une telle situation est impossible (grotesque) et en conclut, donc, que quelque chose a dû arriver à la chaîne de Von Neumann avant qu'elle n'aille trop loin. À nouveau, la difficulté est d'expliquer l'unicité du monde macroscopique : pourquoi, à un niveau macroscopique, un résultat unique (chat vivant, ou mort) émerge-t-il spontanément, alors que ce n'est pas le cas si l'on se limite strictement à l'équation de Schrödinger.

Le chat est, évidemment, le symbole de n'importe quel objet macroscopique - Einstein, dans une lettre à Schrödinger de la même année [9], prenait l'image de l'explosion macroscopique d'un baril de poudre⁴. Un tel objet ne peut jamais se trouver dans un état « flou »

(4) Einstein écrit « Aucune interprétation, si habile qu'elle soit, ne pourra transformer cette fonction Ψ en une description appropriée des choses réelles ; dans la réalité, il n'y a rien entre explosé et non-explosé ».

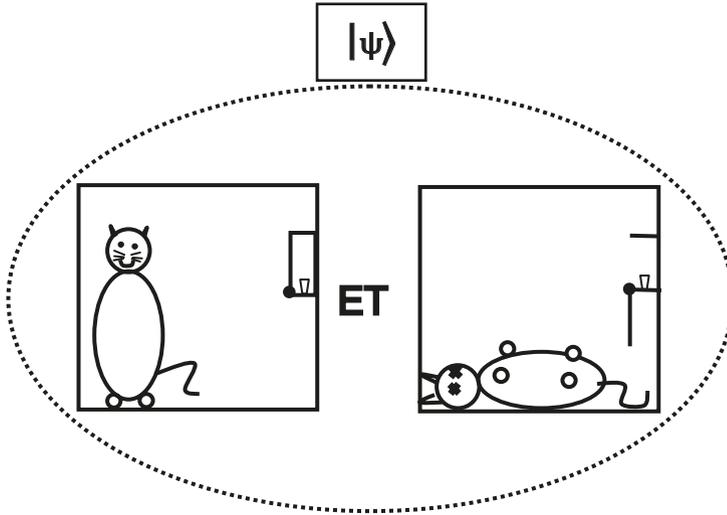


Figure 1. Le paradoxe du chat de Schrödinger illustre comment les règles de la mécanique quantique standard peuvent conduire à des situations extrêmement étranges, où des objets macroscopiques se trouvent en même temps dans des états complètement différents. Schrödinger imagine un chat enfermé dans une boîte qui contient également un dispositif déclenché par l'émission d'une particule par un noyau radioactif. Lorsque la particule est émise, l'appareil se met en marche et ouvre (ou brise) une bouteille de poison, ce qui tue le chat. Si la particule n'est pas émise, le chat reste vivant. Au bout d'un certain temps, lorsque la probabilité d'émission de la particule par le noyau est $1/2$, l'état $|\Psi\rangle$ du système total contient des composantes associées à des situations macroscopiques complètement différentes, toutes deux réalisées en même temps. L'unicité de la réalité macroscopique demanderait que le « ET » au milieu de la figure soit remplacé par un « OU », mais ceci n'est pas contenu dans l'équation de Schrödinger. Ce dernier qualifie cette situation de « grotesque ».

contenant des possibilités contradictoires (bouteille ouverte et fermée, chat vivant et mort, etc.). Ce que Schrödinger est donc en train de nous dire est que sa propre équation ne doit pas être poussée trop loin, jusqu'à inclure des objets macroscopiques. La mécanique quantique standard, non seulement est incapable d'éviter de tels cas paradoxaux, mais fournit une recette pour les produire ! La conclusion logique est alors qu'un ingrédient supplémentaire est nécessaire pour permettre de sélectionner une seule des branches de la superposition et éviter ces superpositions ridicules⁵. Inutile de dire que la limite de validité de l'équation linéaire n'a pas nécessairement besoin de provenir de l'objet macroscopique lui-même : la sélection d'une branche de la superposition peut par-

(5) L'histoire fait une pirouette amusante en associant le nom de Schrödinger à deux concepts opposés. Le premier est celui d'une équation universelle et puissante, équation continue qui s'applique à tous les systèmes ; le second est le chat, le symbole des limites que la même équation ne devrait jamais dépasser.

faitement avoir lieu bien avant qu'elle n'atteigne le chat. Mais la question vraiment difficile qui subsiste est de savoir où exactement, et quand ce processus de sélection se produit.

L'interprétation standard de la mécanique quantique postule que la seule façon de stopper la propagation linéaire de l'équation de Schrödinger et de casser la régression est de procéder à un acte de mesure. La question devient alors : un animal évolué, ou un être vivant très primitif (bactérie), possède-t-il les capacités intellectuelles suffisantes pour effectuer une mesure et résoudre plusieurs branches de Von Neumann en une seule ? Où se situe la limite entre les êtres vivants capables ou non de percevoir leur propre état et de se projeter eux-mêmes sur un état vivant ou mort ? Ou alors serait-ce que les seuls humains ont accès à un niveau suffisant d'introspection pour devenir conscients de leurs propres observations, et réduire le vecteur d'état ? C'est le point de vue de certaines théories, qui alors impliquent qu'un chat peut effectivement rester dans une superposition d'états vivant et mort pendant très longtemps.

La dernière phrase de la citation de Schrödinger donnée plus haut est souvent considérée comme obscure. Il est probable que Schrödinger désire insister sur la différence entre une connaissance incomplète (par une photographie floue) d'un objet bien défini, et un objet qui intrinsèquement n'a pas de frontières bien définies dans l'espace (un nuage) – entre une indétermination qui tient à un manque de connaissance ou une qui est intrinsèque. En d'autres termes, lui aussi remet en question le caractère complet de la mécanique quantique.

2.2 Malentendus

Un malentendu classique consiste à penser que le paradoxe du chat est résolu par la simple évocation de la décohérence, qui explique pourquoi il est en pratique totalement impossible d'observer des interférences quantiques entre des états où un chat est vivant ou mort. En fait, la (dé)cohérence n'a rien à voir avec l'argument de Schrödinger : le chat est en réalité un symbole de l'absurdité d'un état quantique qui comprend deux possibilités incompatibles dans la vie courante, que ce soit de façon cohérente ou pas. Cela ne change rien à l'étrangeté de la situation finale que l'état en question soit un état pur (effectivement sujet à décohérence) ou un mélange statistique (qui y est insensible). D'ailleurs, le chat est déjà lui-même part de l'environnement de l'atome radioactif, ainsi que le détecteur et la bouteille de poison⁶. La chaîne (l'arbre des possibilités) commence à se propager à un niveau microscopique (à partir du noyau radioactif) et se propage de plus en plus loin sans limite apparente ; la difficulté est de l'empêcher d'atteindre le monde macroscopique. Cela n'ajoute donc rien de faire remarquer que la chaîne continue au-delà du chat, le mal est déjà fait. Pour finir, invoquer la décohérence n'est pas répondre à la question, c'est juste la répéter.

(6) Le chat lui-même n'est jamais dans une superposition cohérente de vivant ou mort. En effet, lors de la création de la curieuse superposition, le chat est déjà corrélé quantiquement avec la source radioactive, le système mécanique, et la bouteille de poison ouverte ou fermée, le gaz dans la boîte, etc. Toutes ces composantes agissent déjà comme un environnement et produisent une complète décohérence. Rétablir cette cohérence demanderait de mettre toutes ces composantes dans le même état quantique, une tâche clairement impossible. La propagation de la décohérence encore plus loin dans l'environnement n'ajoute rien de nouveau à l'argument.

La vraie question que pose Schrödinger est comment comprendre l'unicité du monde macroscopique. Comment ce qui était indéterminé peut-il devenir déterminé, et par quel processus ? À quel moment et dans quelles conditions exactes la théorie cesse-t-elle d'être déterministe pour devenir stochastique ? La question qu'il pose n'est donc pas triviale, et il ne suffit pas d'invoquer la décohérence pour y répondre⁷. Schrödinger était d'ailleurs bien au courant des propriétés de l'intrication en mécanique quantique, un mot qu'il a d'ailleurs introduit le premier dans ce contexte (il l'utilise explicitement dans l'article du chat) ; il n'était certainement pas assez naïf pour croire que des chats vivants et morts peuvent interférer. D'ailleurs, dans son article [7] il ne mentionne nulle part le caractère cohérent ou incohérent de la superposition⁸ : pour lui, la question n'est pas d'éviter de se trouver en présence d'une superposition d'états macroscopiques différents, elle est de ne pas avoir de superposition du tout⁹ !

2.3 Les chats nouvelle vague

Il arrive toutefois que le sens des mots change en physique. Dans la littérature récente en électronique et optique quantiques, il est devenu de plus en plus fréquent d'utiliser les mots « chat de Schrödinger », ou « Schrödinger cat (SC) » dans un sens assez différent, voire presque contradictoire avec le sens initial. Au départ, le chat était en effet le symbole d'une impossibilité, un animal qui ne pourra évidemment jamais exister (une gargouille de Schrödinger ?), l'étape finale d'un raisonnement par l'absurde – bref, un symbole de quelque chose qui n'a jamais existé et n'existera jamais. De nos jours, les mêmes mots sont souvent utilisés pour désigner des états qui sont parfaitement réalisables, à savoir toute superposition cohérente d'états qui sont plus ou moins différents à un niveau le plus macroscopique possible (ici la cohérence est essentielle). Avec cette nouvelle définition, l'existence de chats de Schrödinger a été prévue et effectivement observée pour toute une catégorie de systèmes, par exemple un ion qui se trouve localisé à la fois dans deux positions différentes dans un piège ; de tels systèmes subissent évidemment une décohérence rapide du fait de l'apparition de corrélations avec l'environnement. Des calculs théoriques de cette décohérence sont possibles à l'aide de l'équation de Schrödinger, qui peut être utilisée pour calculer comment se déroulent les premières étapes de la chaîne de Von Neumann, et avec quelle rapidité le vecteur d'état tend à se ramifier en plusieurs branches mettant en jeu l'état quantique de l'environnement.

Pour résumer ce §2, le paradoxe met en lumière la composante centrale de la plupart de nos difficultés avec la mécanique quantique ; comme l'écrit Wigner [10], « les mesures qui laissent le système objet-plus-appareil de mesure dans un état où le pointeur de l'appareil est dans une position bien définie ne peuvent être obtenus dans le cadre des lois linéaires de la mécanique quantique ». La question est alors : quel est donc le processus

(7) L'impossibilité d'observer des interférences entre des états à chat mort et chat vivant est bien évidemment une condition nécessaire pour l'unicité macroscopique. Elle est cependant loin d'être suffisante.

(8) Les mots n'apparaissent pas une seule fois dans l'article.

(9) C'est par exemple le but principal des théories mettant en jeu une dynamique de Schrödinger modifiée, souvent non-linéaire : elles introduisent des équations du mouvement où, lorsque le niveau macroscopique est atteint, toutes les probabilités vont vers zéro du fait de la dynamique, sauf une.

exact qui force la Nature à rompre cette linéarité et à faire un choix parmi les différents résultats possibles ? Il est clair que l'émergence d'un seul résultat est une question essentielle. Comme Pearle le résume de façon concise [11], le problème est d'expliquer « pourquoi les événements se produisent » !

3. L'ami de Wigner

Dans une théorie comme la mécanique quantique où l'observateur joue un rôle aussi essentiel, à qui ce rôle peut-il appartenir ? Wigner discute le rôle d'un ami, à qui l'on a demandé d'effectuer une expérience, par exemple une expérience de Stern et Gerlach [12]. L'ami en question travaille à l'intérieur d'un laboratoire totalement fermé, de sorte qu'un observateur extérieur ne peut pas prendre connaissance des résultats de l'expérience avant d'ouvrir la porte du laboratoire (figure 2). Mais quelle est alors la situation juste après que la particule est sortie de l'analyseur et que sa position a été observée dans le laboratoire, tandis qu'elle reste inconnue à l'extérieur ? Depuis dehors, il est naturel de considérer l'ensemble du laboratoire fermé contenant l'expérience et l'ami comme une partie du « système » qui doit être décrit par un grand vecteur d'état. Tant que la porte du laboratoire reste fermée et que le résultat de la mesure est inconnu à l'extérieur, ce vecteur d'état continuera à contenir une superposition des deux résultats ; ce n'est que plus tard, lorsque le résultat est connu, qu'il semble pertinent d'appliquer le postulat de réduction du vecteur d'état. Mais, à l'évidence, pour l'ami de Wigner qui est dans le laboratoire, ce raisonnement est tout simplement absurde ! Que peut faire l'ouverture de la porte de son point de vue ? Il va évidemment préférer considérer que le vecteur d'état est réduit dès que le résultat est observé dans son propre laboratoire. Nous retombons alors sur un point que nous avons déjà discuté, le caractère absolu ou relatif du vecteur d'état : est-ce que cette contradiction signifie que nous devrions prendre en compte deux vecteurs d'état, l'un réduit et l'autre non réduit, pendant la période intermédiaire de l'expérience¹⁰ ? Pour une discussion par Wigner lui-même du problème de la mesure, voir [10].

Une interprétation souvent associée au nom de Wigner¹¹ suppose que la réduction du vecteur d'état est un effet réel qui se produit au moment où un esprit humain acquiert une certaine connaissance du monde physique qui l'entoure, et avec lequel il interagit ; nous y reviendrons dans la suite. On peut par exemple considérer que les courants électriques d'un cerveau humain sont à l'origine de la réduction de l'état quantique des objets mesurés, via un processus physique encore inconnu. Alors, si l'on adopte ce point de vue, la réduction se produit sous l'effet de l'expérimentateur qui se trouve dans le laboratoire (l'ami de Wigner) et la contradiction du paragraphe précédent est levée. Mais, même si on accepte l'idée un peu provocatrice d'une action possible de l'esprit (ou de la conscience) sur l'environnement, ce point de vue ne supprime pas toutes les difficultés logiques :

(10) Hartle considère que la réponse à cette question est « oui » [13] ; voir également l'interprétation relationnelle (Chapitre X).

(11) Le titre de la référence [12] suggère effectivement cette catégorie d'interprétation ; de plus, Wigner y écrit que « il s'ensuit (de l'argument de l'ami de Wigner) que la description quantique des objets est influencée par des impressions pénétrant la conscience ». À la fin de l'article, il discute également l'influence de non-linéarités qui pourraient imposer une limite à la validité de l'équation de Schrödinger, et être caractéristiques de la vie.

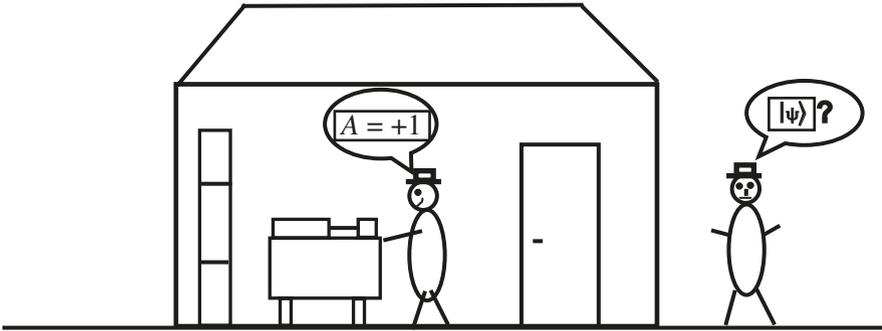


Figure 2. Wigner suppose qu'un physicien à l'extérieur d'un laboratoire a un ami à l'intérieur qui effectue une mesure quantique donnant comme résultats possibles $A = \pm 1$. Lorsque l'ami observe un résultat, par exemple $A = +1$, il décrit le système physique par un vecteur d'état qui inclut cette information, et qui est donc réduit. Cependant, tant que la porte du laboratoire n'est pas ouverte, le physicien dehors décrit le système physique ainsi que son ami par un vecteur d'état qui contient toujours les divers résultats possibles ; pour lui, la réduction ne se produit qu'au moment où il ouvre la porte pour prendre connaissance du résultat. On arrive ainsi à une situation où la même réalité physique est décrite par deux vecteurs d'état différents. Pour éviter ce problème, on peut supposer que c'est la première prise de conscience du résultat (celle de l'ami dans le cas présent) qui déclenche la réduction ; effectivement le système n'a alors plus qu'un seul vecteur d'état, même si pendant un certain temps il reste inconnu de l'observateur extérieur.

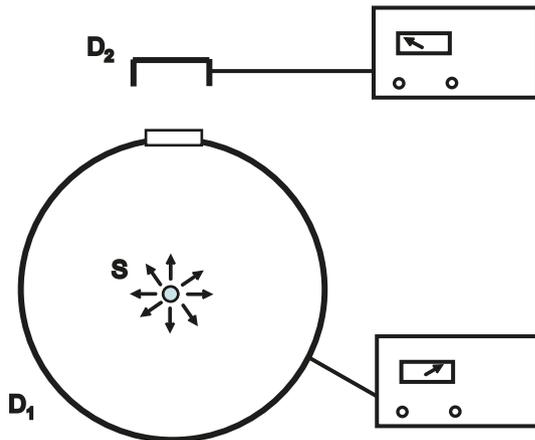


Figure 3. Une source S émet une particule, et se trouve entourée par un détecteur D_1 . Ce dernier capture la particule et enregistre un signal de détection dans un premier appareil de mesure, sauf si la particule passe par un trou correspondant à un petit angle solide (vers le haut sur la figure). Dans ce cas la particule est détectée par D_2 et enregistrée par un second appareil. Nous supposons dans la discussion que les détecteurs sont idéaux avec une efficacité de 100 %.

qu'est-ce qu'un esprit humain, quel niveau de prise de conscience est nécessaire pour réduire l'état, comment agissent les courants électriques correspondants, etc. ?

4. Mesures négatives et « sans interaction »

D'autres situations paradoxales se produisent en mécanique quantique avec les « mesures négatives », ou « mesures sans interaction ». Ces concepts peuvent être illustrés par les exemples suivants :

(i) Considérons une source qui émet une particule avec une fonction d'onde sphérique (qui prend des valeurs indépendantes de la direction dans l'espace, et ne dépend donc que de la distance à la source). La source est entourée par deux détecteurs, comme le montre la figure 3 ; un des détecteurs, D_1 , capture les particules émises dans presque toutes les directions, excepté dans un petit angle solide Ω ; le second détecteur D_2 capture la particule dans cet angle solide, mais à une plus grande distance. Pour simplifier, nous supposons que l'expérience est idéale et que les détecteurs ont une efficacité de 100 %.

Que se passe-t-il maintenant lorsque le paquet d'ondes de la fonction d'onde atteint le premier détecteur ? Deux cas sont possibles :

- ou bien la particule est effectivement détectée par D_1 . Elle disparaît alors, et le vecteur d'état est projeté sur un état sans particule mais avec un détecteur excité (le premier) ; plus tard, le second détecteur D_2 ne peut alors plus jamais détecter une particule. Ce premier cas est le plus fréquent.
- ou bien la particule n'est pas détectée. La probabilité d'un tel événement est faible, puisqu'elle est égale au rapport entre l'angle solide sous-tendu par le trou dans le premier détecteur, vu depuis la source, divisé par 4π (nous supposons la source isotrope), mais néanmoins elle n'est pas nulle. Alors le simple fait que le premier détecteur n'a pas enregistré la particule entraîne une réduction de la fonction d'onde à sa composante contenue dans l'angle solide Ω , ce qui veut dire que le second détecteur va toujours détecter la particule plus tard. Nous sommes alors en face d'une situation fort curieuse où la probabilité de détection par le second détecteur est fortement augmentée par une sorte de « non-événement » qui s'est produit sur le premier, c'est-à-dire sans aucune interaction entre la particule et l'appareil de mesure. Ceci illustre que la nature profonde du processus de mesure est plus subtile que la « perturbation inévitable des appareils de mesure » tant de fois invoquée (microscope de Heisenberg, etc.) ; en réalité, la réduction du paquet d'ondes peut se produire même lorsque l'interaction avec le premier appareil de mesure ne joue aucun rôle.

Bien sûr, si l'on suppose qu'initialement la particule émise avait une direction d'émission bien définie, alors l'interprétation de cette expérience de pensée devient toute simple : le détecteur 2 n'enregistre que la fraction de particules qui se trouvent émises depuis le début dans sa direction. Il n'y a alors rien de surprenant à ce qu'aucune interaction ne soit produite avec le détecteur 1 ! Mais la mécanique quantique orthodoxe postule que cette

direction d'émission bien définie n'existe pas tant qu'aucune mesure n'a été effectuée ; supposer qu'elle existe revient à ajouter des variables supplémentaires, mais qui n'existe pas dans le cadre de l'interprétation standard de la mécanique quantique.

(ii) La figure 4 montre une expérience semblable : une source S émet des particules une par une, chacune décrite par une onde de Schrödinger se propageant vers la droite. Cette onde interagit avec un dispositif de type lame séparatrice qui la scinde en deux parties (les photons, les neutrons, et d'autres particules peuvent ainsi être séparés avec des dispositifs appropriés). Après s'être propagée sur une distance L_1 ou L_2 , chacune des ondes tombe sur un détecteur, D_1 dans un cas, D_2 dans l'autre. Lors de chaque réalisation de l'expérience, une seule particule est émise par S , et une seule particule est détectée, soit par D_1 soit par D_2 . Dans la description de l'expérience purement en termes d'onde de Schrödinger, la situation reste parfaitement symétrique : en chacun des détecteurs, une chaîne de von Neumann intervient, mettant en jeu des états des détecteurs où la particule a été ou n'a pas été enregistrée. Mais la mécanique quantique prédit qu'un seul résultat de mesure est observé : pour une réalisation donnée, soit la particule est détectée en D_1 , soit en D_2 , mais jamais aux deux endroits. Si $L_1 < L_2$, la première mesure est celle en D_1 , et il en résulte un effet de mesure négative semblable au précédent : si D_1 ne détecte pas la particule, elle est toujours détectée en D_2 . Inversement, lorsqu'elle est détectée en D_1 , il devient certain qu'elle ne sera jamais détectée en D_2 . Voilà qui donne déjà un avant-goût de la non-localité quantique : une détection en D_1 rend immédiatement impossible une détection en D_2 , même si la distance entre les détecteurs est arbitrairement grande (de sorte qu'aucune information se propageant à la vitesse de la lumière n'a le temps de se propager de l'un à l'autre). La résolution de la chaîne de von Neumann sur l'un des détecteurs (réduction du vecteur d'état si l'on préfère) est un phénomène non-local dont les conséquences se font immédiatement sentir sur des mesures situées à des distances arbitrairement grandes.

Comme plus haut, on peut remarquer que les mêmes résultats sont facilement explicables par un modèle local : il est suffisant de supposer que, lors de chaque réalisation de l'expérience, la particule « choisit » au hasard une seule direction lorsqu'elle croise la lame séparatrice. La difficulté semble alors ne venir que de la description inhabituelle des phénomènes donnée par la mécanique quantique. On peut montrer qu'il existe des exemples de cas où aucun modèle local ne peut être inventé pour reproduire les prédictions quantiques.

(iii) Considérons maintenant le dispositif schématisé sur la figure 5, avec un interféromètre de Mach-Zehnder dans lequel une source émet une par une des particules, qui sont ensuite comptées sur les détecteurs D_1 et D_2 . Comme le fait la référence [14], nous supposons que les différences de chemins sont réglées de façon à créer une interférence destructive dans la voie de sortie du détecteur D_2 ; aucune particule ne peut alors atteindre ce détecteur de sorte que toutes sont détectées en D_1 (à nouveau, nous supposons les détecteurs parfaits avec un rendement de 100 %). Que se produit-il maintenant si l'on insère un objet opaque O dans le bras inférieur de l'interféromètre ? On annule l'effet d'interférence destructive, ce qui permet à certaines particules d'atteindre D_2 ; cet événement se produit une fois sur 4 si les deux lames semi-réfléchissantes ont des transmissions de 50 %. Dans un tel cas, comme la particule n'a pas été bloquée par l'objet, il semble que

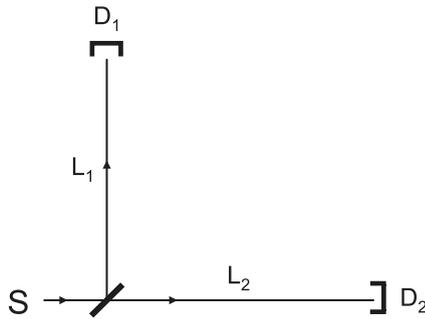


Figure 4. Des particules sont émises une par une par une source S . Les ondes de Schrödinger décrivant les particules sont scindées en deux par une lame séparatrice ; chaque composante se propage vers un détecteur, D_1 ou D_2 . Dans une expérience idéale, lors de chaque réalisation la particule est toujours détectée, soit en D_1 soit en D_2 et de façon totalement aléatoire ; la particule n'est jamais détectée aux deux endroits.

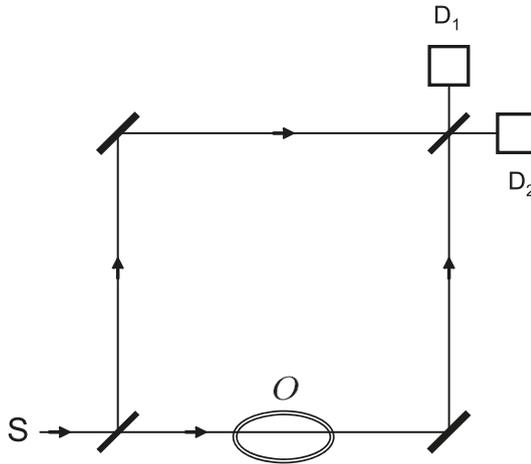


Figure 5. Une source S émet une série de particules, une par une, vers un interféromètre (Mach-Zehnder). La différence de chemin de ce dernier est ajustée de façon que toutes les particules atteignent le détecteur D_1 et qu'aucune particule ne puisse atteindre D_2 . Lorsqu'un objet opaque O est inséré afin de bloquer un des chemins pour la particule, l'effet d'interférence destructive ne se produit plus et des particules sont parfois détectées en D_2 . Dans un tel événement, la présence d'un objet est mesurée avec certitude, alors qu'il semble qu'aucune interaction avec l'objet n'est mise en jeu, puisque la particule détectée est nécessairement passée par le chemin supérieur dans l'interféromètre (sinon elle aurait été absorbée).

c'est nécessairement qu'elle est passée par le bras du haut de l'interféromètre, ce qui veut dire qu'elle n'a jamais rencontré l'objet et pu être absorbée par lui. Mais, inversement, si l'objet n'avait pas été inséré, jamais la particule n'aurait pu atteindre D_2 ! Le résultat final est que la seule observation d'une détection en D_2 révèle la présence d'un objet, bien que le processus exclue toute interaction avec cet objet. Ce phénomène est appelé « mesure sans interaction »¹². Il illustre bien que, tant que la localisation d'une particule n'a pas été mesurée, il est vain en mécanique quantique standard de lui attribuer une position ou une trajectoire unique ; c'est en quelque sorte le mesure positive en D_2 qui « annule » à distance les effets de l'interaction entre la particule et l'objet opaque O, qui ressort totalement inchangé de cette réalisation particulière de l'expérience¹³.

Pour des raffinements de ces idées et la discussion d'expériences reliées aux mesures sans interaction, voir [15, 16]. Hardy a proposé une version mettant en jeu un double interféromètre, un pour un électron et un pour un positron, et l'annihilation mutuelle de ces particules [17].

Une application possible est une méthode appelée « imagerie sans interaction » [18], où des images d'objets peuvent être obtenues sans les perturber. Elle pourrait être utilisée à la réalisation d'une technique non-invasive de microscopie électronique, en particulier pour la visualisation de molécules biologiques sans risque de les détruire [20]. Il a également été suggéré que les mesures négatives puissent se révéler utiles dans le contexte de la cryptographie quantique. L'idée proposée dans [21] est que deux partenaires éloignés, Alice et Bob, effectuent aléatoirement des choix entre deux polarisations orthogonales ; Alice envoie un photon avec la polarisation qu'elle a choisie à Bob, qui renvoie le photon à Alice grâce à un miroir si, et seulement si, sa polarisation diffère du choix local qu'il a effectué. L'ensemble du dispositif comprend un interféromètre qui est réglé de façon que, si le photon revient de Bob vers Alice, la probabilité qu'Alice puisse observer un photon sur un détecteur D_1 s'annule, à cause d'un effet d'interférence destructive tout à fait semblable à celui de l'exemple (ii) ci-dessus. Dans ces conditions, en sélectionnant seulement les événements où Alice observe un photon en D_1 (de sorte qu'alors Bob ne peut détecter la particule), on sélectionne automatiquement des événements où les deux choix aléatoires faits par Alice et Bob se sont trouvés être identiques. Si Alice et Bob se communiquent mutuellement le résultat de chaque expérience (quel détecteur a cliqué ou non), mais conservent secrets leurs choix de polarisations, en faisant une liste de leurs choix binaires locaux pour les événements sélectionnés, ils se constituent progressivement une clé secrète. Une caractéristique remarquable de ce dispositif est que les événements pris en compte pour la transmission secrète de la clé sont en fait ceux où aucun photon n'a été

(12) Même si le phénomène demande que la particule test puisse interagir avec l'objet : il est clair que l'effet ne se produirait pas si l'objet était totalement transparent pour la particule. On peut résumer l'événement en disant que l'objet a absorbé l'onde associée à la particule, mais pas la particule elle-même.

(13) En d'autres termes, le processus de mesure sélectionne effectivement une composante du vecteur d'état qui s'est propagée dans le bras supérieur de l'interféromètre seulement. Cependant, cet événement n'est rendu possible que par le fait que, pendant sa propagation dans le bras inférieur, l'onde de Schrödinger a été absorbée. La chose curieuse est que la particule et son onde semblent dissociées dans ce processus, puisqu'elles se propagent dans des bras différents, situés à une distance arbitrairement grande l'un de l'autre.

transmis, puisqu'il est resté à l'intérieur de l'appareillage utilisé par Alice¹⁴ : on est donc dans une situation analogue à l'exemple (i) ci-dessus (puisque la détection de la particule signifie qu'elle n'a pas pris le chemin contenant l'objet). Du fait que la particule ne suit pas la ligne de transmission entre les deux sites dans les événements pris en compte pour la construction de la clé secrète, le flux de particules sur cette ligne ne contient absolument aucune information concernant les choix aléatoires de polarisations faits par Alice et Bob – d'où une excellente confidentialité.

5. Une grande variété de points de vue

Les citations qui suivent peuvent être utiles pour se faire une idée¹⁵ de la variété des positions intéressantes qui ont été exprimées depuis l'apparition de la mécanique quantique.

Interprétation de Copenhague :

(i) Bohr ([19], 2^e édition, page 204 et [22]) : « Il n'existe pas de monde quantique. Il n'existe qu'une description physique abstraite. Il est faux de penser que la tâche de la physique est de découvrir comment la Nature est réellement. Ce qui concerne la physique est ce que nous pouvons dire sur la Nature ». Ou, de façon similaire : « Il n'existe pas de concept quantique » [23]. Pour ce qui est des phénomènes physiques : « on peut plaider vigoureusement pour une limitation de l'usage du mot *phénomène* au cas où il se réfère exclusivement à des observations, obtenues dans des circonstances bien spécifiées, incluant une description de l'ensemble de l'expérience » [24].

Bohr définit également l'objet de la physique de la façon suivante [25, 26] : « La physique doit être considérée, non pas tellement comme l'étude de quelque chose qui est fourni a priori, mais plutôt comme le développement de méthodes qui permettent de classer et de rendre compte de l'expérience humaine. De ce point de vue, notre tâche doit être de rendre compte de cette expérience d'une façon qui soit indépendante de jugements individuels subjectifs, qui donc est objective au sens qu'elle peut être communiquée de façon non-ambigüe dans un langage humain ordinaire ».

Alors que la mécanique quantique est souvent considérée (y compris de nos jours) comme une théorie complètement nouvelle par rapport à la physique classique (une révolution), Bohr préfère la voir comme son extension logique naturelle. Il considère [27, 28] qu'à l'introduction de la mécanique quantique « le problème auquel les physiciens se sont trouvés confrontés était de développer une généralisation rationnelle de la physique

(14) Les événements utiles sont ceux où Bob n'a pas renvoyé vers Alice l'onde de Schrödinger, mais sans absorber la particule. Chaque fois qu'Alice et Bob choisissent la même polarisation, le vecteur d'état comprend une composante où la particule se propage vers le site de Bob, de sorte qu'on pourrait mesurer sa présence le long de la ligne de transmission ou sur le site de Bob. Mais cette composante s'annule au moment où Alice observe la particule en D_1 .

(15) Avec, bien sûr, la précaution habituelle : il est vrai que de courtes citations peuvent, lorsqu'elles sont isolées de leur contexte, donner une idée un peu superficielle de la position précise de leurs auteurs.

classique¹⁶ permettant d'incorporer de façon harmonieuse le concept de quantum d'action ». Dans ce but, l'outil principal est le « principe de correspondance » [29] : « Le principe de correspondance exprime la tendance à utiliser dans un développement systématique de la théorie quantique chaque caractéristique des théories classiques, en une transcription rationnelle qui soit appropriée au contraste fondamental entre les postulats des théories classiques et quantiques ». Il est donc naturel qu'il ait mis l'accent, à de nombreuses reprises, sur l'importance des concepts classiques pour donner une signification au formalisme de la mécanique quantique ; en particulier, les concepts classiques sont indispensables lorsqu'il faut décrire un processus de mesure.

Bohr a écrit de nombreux textes sur la mécanique quantique, parfois assez tournés vers la philosophie [30,31] ; nous proposerons plus loin d'autres de ses citations, dont certaines illustrent les vues de Bohr sur l'espace-temps. Dans sa fameuse conférence de Côme de septembre 1927 [32], il introduit la notion de « complémentarité », relation entre attributs contradictoires d'un même objet en physique quantique, qu'ensuite il élargit bien au-delà, allant jusqu'à inclure d'autres disciplines que la physique (voir par exemple [30] ou encore [24] où il mentionne la biologie¹⁷, la sociologie et la psychologie ; voir également le §7.2 de [19] ou le chapitre 4 de [6]).

(ii) Born en 1926 (page 804 de [33]) : « Le mouvement des particules se conforme aux lois de la probabilité, mais la probabilité elle-même se propage selon les lois de la causalité ».

Ou peu après dans [34] : « La description théorique quantique... ne répond pas... à la question de savoir où se trouve une certaine particule à un instant donné... Ceci suggère que la mécanique quantique ne répond qu'aux questions statistiques correctement posées, et ne dit rien de l'évolution de phénomènes individuels. Ce serait alors une fusion singulière entre mécanique et statistique ».

(iii) Heisenberg [19, 35] : « Mais les atomes ou les particules élémentaires ne sont pas réels ; ils forment un monde de potentialités ou de possibilités, plutôt qu'un monde de choses et de faits ».

Dans « Physics and philosophy » [35] (chapitre V) : « Les sciences de la nature ne donnent pas simplement une description et une explication de la nature ; elles font partie des interactions entre la nature et nous-mêmes ; elles décrivent la nature telle qu'elle réagit à notre méthode pour lui poser des questions ».

Le chapitre III de ce livre a pour titre « L'interprétation de Copenhague de la théorie quantique », et il y écrit : « Nous ne pouvons complètement objectiver le résultat d'une observation, nous ne pouvons décrire ce qui 'se produit' entre cette observation et la suivante ».

(16) De façon semblable, Bohr voyait probablement la relativité d'Einstein comme une généralisation rationnelle de l'électromagnétisme classique (équations de Maxwell).

(17) À la fin de cet article, il discute le « mode de description par complémentarité » et illustre sa généralité en écrivant « Un exemple est donné par la biologie où les arguments mécaniques et vitalistes sont utilisés d'une façon typique de la complémentarité. En sociologie également, une telle dialectique peut se révéler souvent utile, en particulier dans les problèmes où nous sommes confrontés avec la comparaison entre les différentes cultures humaines... ».

Plus bas, il ajoute : « En conséquence, la transition entre le ‘possible’ et le ‘réalisé’ se produit pendant l’acte d’observation. Si nous voulons décrire ce qui se produit pendant un événement atomique, nous devons réaliser que le mot ‘se produit’ ne peut s’appliquer qu’à l’observation, et pas à l’état des choses entre les deux observations ».

Il conclut ce chapitre avec : « l’appareil de mesure a été construit par l’observateur, et nous devons nous souvenir que ce que nous observons n’est pas la nature en elle-même mais la nature soumise à notre méthode de questionnement. Notre tâche scientifique en physique consiste à poser des questions concernant la Nature dans le langage que nous possédons, et à essayer d’obtenir une réponse de l’expérience par les moyens qui sont à notre disposition. C’est ainsi que la théorie quantique nous rappelle, comme Bohr l’a dit, la vieille sagesse qui dit que, lorsque nous sommes à la recherche d’une harmonie dans la vie, nous ne devons jamais oublier que nous sommes à la fois acteurs et spectateurs dans le drame de la vie. Il est compréhensible que, dans notre relation scientifique avec la nature, notre propre activité devienne très importante lorsque nous nous préoccuons de parties de la nature auxquelles nous n’avons accès que par les outils les plus élaborés ».

(iv) Jordan (tel que cité par Bell dans [36]) : « les observations ne se contentent pas de perturber ce qui doit être mesuré, elles le *produisent*. Dans une mesure de la position, l’électron est forcé de prendre une décision. Nous le contraignons à occuper une position bien précise ; auparavant, il n’était ni ici ni là, il n’avait pris aucune décision concernant une position précise... ».

(v) Landau and Lifchitz, au début du premier chapitre de leur livre sur la mécanique quantique [37] : « La possibilité de la description quantitative du mouvement de l’électron exige également l’existence d’êtres physiques obéissant avec une précision suffisante à la mécanique classique. Si un électron entre en interaction avec un ‘être classique’, alors l’état de ce dernier change en général... Ceci étant, l’être classique est appelé ordinairement *appareil*, et on parle de son processus d’interaction avec l’électron comme d’une *mesure*. Il convient toutefois de souligner qu’on n’a alors nullement en vue un processus de *mesure* où participe un physicien observateur. Par mesure on entend en mécanique quantique tout processus d’interaction d’un être classique et d’un être quantique, se déroulant par ailleurs indépendamment de tout observateur. On doit à N. Bohr d’avoir élucidé le rôle profond de la notion de mesure en mécanique quantique ».

(vi) Dirac, page 7 de [38] : « Le seul objet de la physique théorique est de calculer des résultats qui peuvent être comparés avec l’expérience, et il est tout à fait inutile de donner une description globale de l’ensemble du phénomène ».

Critiques de l’interprétation de Copenhague :

(vii) Schrödinger : « le monde ne m’est donné qu’une seule fois, et pas une fois pour son existence et une autre pour sa perception. Le sujet et l’objet sont un. La barrière qui les sépare ne peut être considérée comme brisée du seul fait d’une expérience en sciences physiques, pour la simple raison que cette barrière n’existe pas » [39]. Dans le §2, nous donnons d’autres citations de Schrödinger.

(viii) Einstein, dans une lettre de 1928 à Schrödinger [40, 41] : « La philosophie rassurante de Heisenberg – ou est-ce une religion ? – est construite de façon tellement subtile que, pour le moment, elle fournit un oreiller de paresse pour le véritable croyant, oreiller d'où il n'est pas possible de le réveiller ».

En 1936 [42] : « La fonction Ψ ne décrit en aucune manière une condition qui pourrait concerner un seul système ; elle concerne en fait un grand nombre d'entre eux, un 'ensemble de systèmes' au sens de la mécanique statistique... si la fonction Ψ ne fournit que des données statistiques sur les grandeurs mesurées... la raison en tient ... au fait que la fonction Ψ ne décrit d'aucune manière l'état du système unique ».

(ix) de Broglie [43] : « L'interprétation de la Mécanique ondulatoire de Bohr et Heisenberg a de nombreuses conséquences qui ouvrent des perspectives philosophiques nouvelles. Le corpuscule n'est plus un objet bien défini dans le cadre de l'espace et du temps ; il n'est plus qu'un ensemble de potentialités affectées de probabilités, il n'est plus qu'une entité qui se manifeste à nous de façon fugitive, tantôt sous un aspect, tantôt sous un autre. M. Bohr, qui est un peu le Rembrandt de la Physique contemporaine, car il manifeste parfois un certain goût pour le 'clair-obscur', a dit des corpuscules qu'ils sont 'unsharply defined individuals within finite space-time limits' ».

Plus récemment :

(x) Bell [2], lorsqu'il décrit la théorie quantique « moderne » (interprétation de Copenhague) et ses relations avec la cosmologie : « cette théorie ne parle jamais d'événements se produisant dans le système, mais seulement des résultats d'observations faites sur lui, ce qui implique l'existence d'un appareillage externe »¹⁸ (si c'est le cas, comment alors décrire l'Univers entier, puisqu'il est impossible de concevoir un appareillage externe dans ce cas ?). « Le problème est le suivant : la mécanique quantique ne s'intéresse qu'aux observations. Elle divise donc nécessairement le monde en deux, une partie qui est observée et une autre qui effectue l'observation. Les résultats dépendent de la façon dont est faite cette division, mais aucune règle précise pour le faire n'est proposée. Tout ce dont nous disposons est une recette qui, du fait des limitations pratiques auxquelles sont sujets les humains, est suffisamment non-ambigüe pour toute question pratique ».

Voir aussi son texte « contre le concept de mesure », où il discute et critique diverses présentations de l'interprétation orthodoxe [44].

(xi) Mermin [45], lorsqu'il résume la « doctrine quantique fondamentale » (interprétation orthodoxe) : « le résultat d'une mesure n'accède à l'existence que par la mesure elle-même, étant une conséquence à la fois de l'état du système mesuré et de l'appareil de mesure. Comment exactement ce résultat précis est obtenu dans une mesure particulière – la transition entre la potentialité et le réel selon Heisenberg – est fondamentalement impossible à savoir ».

(18) On pourrait ajouter « ainsi que des observateurs externes ».

(xii) Shimony [46] : « D'après l'interprétation proposée par Bohr, le changement de l'état est une conséquence de l'hypothèse fondamentale selon laquelle la description de tout phénomène physique demande de faire référence au dispositif expérimental ».

(xiii) Rosenfeld [47], parlant de l'interprétation orthodoxe : « l'observateur humain, que nous avons pris tant de soin à faire sortir du paysage (scientifique), semble s'introduire à nouveau de façon irrésistible,... ».

(xiv) Gottfried [48] (page 188 de la première édition) : « Le postulat de réduction est un axiome indépendant... Le résultat de ces considérations est que la mécanique quantique ne peut pas donner une description complète du monde physique car il doit exister des systèmes (appelés « conscients » par Wigner) qui sortent du domaine d'application de la théorie, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être incorporés dans la partie du monde que nous décrivons par l'équation de Schrödinger ».

(xv) Stapp [49] : « L'interprétation de la théorie quantique est assombrie par les points suivants : (1) On attribue à des concepts classiques non-valides un statut fondamental ; (2) Le processus de la mesure ne peut pas être décrit dans le cadre de la théorie ; (3) La distinction sujet-objet devient floue ; (4) Le système observé doit d'une part être isolé pour être défini, mais d'autre part interagir pour être observé »

Ou, cité par Bell dans [2] : « Comment une théorie qui est *fondamentalement* une procédure par laquelle des créatures macroscopiques grossières, telles que des êtres humains, calculent des probabilités concernant ce qu'ils vont observer dans des circonstances macroscopiques, comment cette théorie pourrait-elle être considérée comme une description complète de la réalité ? »

(xvi) Leggett [50] à propos de l'interprétation de Copenhague : « ... le formalisme de la mécanique quantique connu sous le nom d'interprétation de Copenhague (alors qu'il serait probablement plus correct de l'appeler la non-interprétation de Copenhague, du fait qu'elle implique que toute tentative d'interpréter le formalisme est voué à l'échec)... d'une part nie que des objets microscopiques (électrons, photons, atomes,...) aient nécessairement des propriétés définies en l'absence d'observation, mais d'autre part stipule avec insistance (ou du moins implique) que des objets macroscopiques (compteurs, chats, etc.) possèdent effectivement de telles propriétés, qu'ils soient observés ou non. Cette insistance sur la nécessité de tracer une ligne nette... entre le monde microscopique et le monde macroscopique de la vie de tous les jours (les appareils de mesure inclus) est un thème constamment présent dans les écrits de Niels Bohr... ». Dans [51], il commente : « La difficulté réelle commence seulement quand nous prenons au sérieux le fait que l'appareil de mesure... est lui-même un système constitué d'atomes et d'électrons, de sorte qu'en principe il devrait pouvoir être décrit dans les termes de la mécanique quantique. Il devrait donc être légitime de demander ce qui se produit si, au lieu de traiter la mesure comme quelque chose de complètement étranger au comportement habituel des systèmes physiques, nous la traitons tout simplement comme un type particulier de processus physique et la décrivons par l'équation de Schrödinger linéaire dépendant du temps ».

Puis, dans [52], il commente : « Dans le cadre de l'interprétation conventionnelle de la mécanique quantique, un système ne possède pas de propriétés bien définies jusqu'au moment où, en quelque sorte, nous le forçons à nous indiquer ces propriétés par la réalisation de mesures appropriées. Mais est-ce la seule interprétation possible ?... à un niveau plus profond il est parfaitement possible que les systèmes aient, en fait, des propriétés objectives, que quelqu'un effectue des mesures sur lui ou non... Les résultats apparemment aléatoires prédits par le formalisme quantique seraient alors simplement dus à notre ignorance des détails à un niveau plus profond de description ».

(xvii) Van Kampen [53] a émis le caveat amusant suivant : « Toute personne qui attribuera au vecteur d'état plus de signification que ce qui est nécessaire pour calculer des phénomènes observables sera tenue responsable des conséquences ! » Notons deux autres références [54, 55] qui mettent en pratique cet avertissement.

La situation actuelle :

Comme on peut s'en douter à la lecture de ces citations, loin d'être convergentes ou parfois même contradictoires, aucun consensus général n'a réellement émergé au sein de toute la communauté des physiciens concernant le sens précis du vecteur d'état. L'accord est général en ce qui concerne le formalisme et la façon d'utiliser en pratique le vecteur d'état. Pour toutes les expériences qui ont été réalisées, un choix pragmatique entre les deux postulats d'évolution peut être laissé à l'évaluation du physicien ; pour faire des prédictions concrètes sur une expérience, jusqu'à maintenant un peu de bon sens s'est révélé suffisant, de sorte que les problèmes liés aux fondements de la théorie quantique peuvent parfaitement être mis de côté dans les laboratoires. Mais ceci n'empêche pas qu'il serait préférable de disposer de préceptes mathématiques précis, au lieu de devoir se contenter de recettes physiquement raisonnables ! Il n'est donc pas surprenant de constater que, lorsque la question des fondements revient sur le tapis, ou celle du sens précis des objets mathématiques de la mécanique quantique, le débat recommence, et parfois devient passionné. De plus, on constate que même ceux qui annoncent être en total accord avec l'interprétation standard font usage, dans la pratique, de toute une série de nuances (pouvant parfois aller jusqu'à la contradiction interne...) dès qu'on leur demande d'expliquer en détail leur point de vue.

Pour résumer, le statut du vecteur d'état en mécanique quantique orthodoxe est un mélange subtil entre différents concepts concernant la réalité et la connaissance que nous pouvons avoir de cette réalité. Les fantastiques succès de la théorie quantique standard signifient-ils que le vecteur d'état est réellement la description ultime et la plus précise d'un système quantique que la physique ne donnera jamais dans les siècles à venir ? Faut-il renoncer à toute description réaliste en physique et adopter un point de vue positiviste ? La question n'est pas réglée. Il faut dire que même Bohr est considéré plus comme un réaliste que comme un positiviste ou un opérationnaliste [19]. Comme le dit Jammer ([6], p 157) : « Bohr, comme Von Weizsäcker [56] l'a souligné, n'a jamais rejeté la notion de réalité, il l'a seulement modifiée ». Si on lui avait demandé quelles sont exactement les relations entre la fonction d'onde et la réalité, Bohr aurait probablement dit que la fonction d'onde est assurément un outil très utile, mais que le concept de réalité ne peut

être défini à ce seul niveau de façon correcte ; il doit inclure tous les appareils de mesure macroscopiques qui servent à avoir accès à l'information microscopique.

6. Des arguments peu convaincants

Nous avons déjà souligné combien l'invention de l'interprétation standard (ou de Copenhague) de la mécanique quantique a été, et reste, un des grands triomphes de la physique. On ne peut qu'admirer, plus encore avec le recul, la rapidité et la perspicacité avec laquelle les fondateurs du domaine l'ont conçue, à une époque où les données expérimentales étaient aussi peu nombreuses. Mais, depuis, de multiples expériences ont été réalisées, dont une partie destinées précisément à trouver les limites de cette interprétation ou à la mettre en défaut ; pas une n'y a réussi pour le moment. C'est donc une sorte de miracle de l'analyse et de la logique qui a permis l'émergence de cette fantastique construction intellectuelle.

Cela dit, il faut bien admettre que, parfois, les remarquables auteurs de cette construction sont allés trop loin, poussés par leur désir de convaincre. Par exemple, des affirmations définitives ont été proférées concernant la nécessité logique absolue d'adopter l'interprétation standard, affirmations qui paraissent maintenant quelque peu exagérées avec le recul du temps. D'après elles, l'interprétation orthodoxe donnerait la seule et unique description ultime possible de la réalité physique ; jamais une description plus fine ne serait possible. Ainsi, le caractère fondamentalement indéterministe des phénomènes microscopiques devrait être considéré comme une loi de la Nature gravée dans le marbre pour l'éternité. Mais nous savons maintenant que ce n'est pas nécessairement la seule possibilité logique ; oui bien sûr, chacun est libre de préférer l'interprétation standard, mais ce n'est pas la seule possible à partir d'arguments purement scientifiques. D'autres interprétations restent parfaitement possibles, le déterminisme en lui-même n'étant pas du tout éliminé de façon définitive¹⁹. Comme expliqué dans la référence [45] par exemple, et comme Bell l'a vu clairement très tôt [57, 58], les « preuves d'impossibilité » mises en avant par les défenseurs de l'interprétation de Copenhague ne sont pas rigoureuses, pour une raison toute simple : elles imposent arbitrairement des conditions qui sont peut-être pertinentes au sein de la mécanique quantique (linéarité), mais n'ont aucune raison de l'être dans le cadre des théories à rejeter – n'importe quelle théorie à variables supplémentaires comme celle de Bohm par exemple. Du fait de la stature scientifique exceptionnelle des auteurs de ces preuves d'impossibilité, la communauté des physiciens a mis longtemps avant de réaliser que ces théorèmes étaient non pertinents ; maintenant que ce fait est reconnu, la pluralité des interprétations de la mécanique quantique est acceptée plus facilement.

(19) Pourvu que l'on accepte la non-localité.

Références

- [1] J.S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (1987) ; seconde édition complétée (2004), qui contient la série complète des articles de J. Bell sur la mécanique quantique.
- [2] J.S. Bell, Quantum mechanics for cosmologists, in *Quantum Gravity*, C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama eds., **2**, 611–637, Clarendon Press (1981) ; pages 117–138 de [1].
- [3] N.D. Mermin, Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory, *Phys. Today* **38**, 38–47 (April 1985).
- [4] F. London et E. Bauer, La théorie de l'observation en mécanique quantique, n° 775 des *Actualités scientifiques et industrielles, exposés de physique générale* ; Hermann, Paris (1939) ; traduit en anglais dans The theory of observation in quantum mechanics in *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press, pp. 217–259 (1983) ; voir en particulier §11, mais aussi 13 et 14.
- [5] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) ; *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1955).
- [6] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley (1974).
- [7] E. Schrödinger, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften* **23**, 807–812, 823–828, 844–849 (1935).
- [8] J.D. Trimmer, The present situation in quantum mechanics: a translation of Schrödinger's cat paradox paper, *Proc. Amer. Phil. Soc.* **124**, 323–338 (1980). Also available in pp. 152–167, *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds, Princeton University Press (1983).
- [9] A. Einstein, lettre à Schrödinger du 8 août 1935, reproduite par exemple page 238 de [4].
- [10] E.P. Wigner, The problem of measurement, *Am. J. Phys.* **31**, 6–15 (1963) ; reproduit dans *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, pp. 153–170 ; ou encore dans *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 324–341.
- [11] P. Pearle, Toward explaining why events occur, *Int. J. Theor. Phys.* **18**, 489–518 (1979).
- [12] E.P. Wigner, Remarks on the mind-body question in *The scientist speculates*, I.J. Good ed., Heinemann, London (1961), pp. 284–302 ; reproduit dans E.P. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press (1967), pp. 171–184.
- [13] J.B. Hartle, Quantum mechanics of individual systems, *Am. J. Phys.* **36**, 704–712 (1968).
- [14] A.C. Elitzur et L. Vaidman, Quantum mechanical interaction-free measurements, *Found. Phys.* **23**, 987–997 (1993).
- [15] P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, et M.A. Kasevich, Interaction-free measurement, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4763–4766 (1995).
- [16] L. Hardy, On the existence of empty waves in quantum theory, *Phys. Lett.* **A 167**, 11–16 (1992).

- [17] L. Hardy, Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz invariant realistic theories, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2981–2984 (1992).
- [18] A.G. White, J.R. Mitchell, O. Nairz et P. Kwiat, Interaction-free imaging, *Phys. Rev.* **A 58**, 605–613 (1998).
- [19] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, Mc Graw Hill (1966), deuxième édition (1989).
- [20] W. Putnam et M. Yanik, Noninvasive electron microscopy with interaction-free quantum measurements, *Phys. Rev.* **A 80**, 040902 (2009).
- [21] Tae-Gon Noh, Counterfactual quantum cryptography, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 230501 (2009).
- [22] A. Petersen, The philosophy of Niels Bohr, in *Bulletin of the Atomic Scientists* **XIX**, 8–14 (September 1963).
- [23] C. Chevalley, Niels Bohr's words and the Atlantis of Kantianism, in *Niels Bohr and Contemporary Philosophy*, J. Faye and H. Folse eds., Dordrecht Kluwer (1994), pp. 33–57.
- [24] N. Bohr, On the notions of causality and complementarity, *Dialectica* **2**, 312–319 (1948).
- [25] N. Bohr, The unity of human knowledge (October 1960) ; *Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley (1958 et 1963).
- [26] C. Norris, *Quantum Theory and the Flight from Realism: Philosophical Responses to Quantum Mechanics*, Routledge (2000), p. 233.
- [27] N. Bohr, Quantum physics and philosophy: causality and complementarity, in *Philosophy in the Mid-Century: A Survey* ; R. Klibansky ed., La Nuova Italia Editrice, Firenze (1958). Voir également The quantum of action and the description of nature, in *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge University Press (1934), pp. 92–101.
- [28] P. Bokulich et A. Bokulich, Niels Bohr's generalization of classical mechanics, *Found. Phys.* **35**, 347–371 (2005).
- [29] N. Bohr, Atomic theory and mechanics, *Nature* **116**, 845–852 (1925).
- [30] N. Bohr, *Collected Works*, edited by F. Aaserud, Elsevier (2008) ; voir également *Collected Works, Complementarity beyond Physics (1928– 1962)*.
- [31] N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley (1958), et Dover (2011), voir en particulier « Discussions with Einstein on epistemological problems in atomic physics » ou, avec une bibliographie et un glossaire: C. Chevalley: *Physique atomique et connaissance humaine*, folio essais, Gallimard (1991) ; *Essays 1933 to 1957 on Atomic Physics and Human Knowledge*, Ox Bow Press (1987) ; *Essays 1958–62 on Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley (1963) et Ox Bow Press (1987) ; *Atomic Physics and the Description of Nature*, Cambridge University Press (1934 et 1961).
- [32] N. Bohr, The quantum postulate and the recent development of atomic theory, *Nature*, Supplement April 14, 1928, 580–590 (1928).
- [33] M. Born, Quantenmechanik der Stossvorgänge, *Zeitschrift für Physik* **38**, 803–827 (1926) ; Zur Wellenmechanik der Stossvorgänge, *Göttingen Nachrichten* 146–160 (1926).

- [34] M. Born, Physical aspects of quantum mechanics, *Nature* **119**, 354–357 (1927).
- [35] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy*, Harper & Brothers (1958) ; Harper Perennial Modern Classics (2007).
- [36] J.S. Bell, Bertlmann's socks and the nature of reality, *J. Physique colloques* **C 2**, 41–62 (1981). Cet article est reproduit dans les pages 139–158 de [1].
- [37] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press (1958), Butterworth-Heinemann Ltd (1996).
- [38] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press (1930, 1958).
- [39] E. Schrödinger, *What is Life? Mind and Matter*, Cambridge University Press (1944 et 1967), p. 137.
- [40] A. Einstein, lettre à Schrödinger du 31 mai 1928, reproduite par exemple page 213 de [41].
- [41] F. Balibar, O. Darrigol, et B. Jech, *Albert Einstein, oeuvres choisies I, quanta*, Editions du Seuil et Editions du CNRS (1989).
- [42] A. Einstein, Physik und Realität, *Journal of the Franklin Institute* **221**, 313–347 (1936).
- [43] L. de Broglie, La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?, *Revue des sciences et de leurs applications*, **5**, 289–311 (1952). Académie des Sciences, session du 25 avril 1953, <http://www.sofrphilol.fr/telecharger.php?id=74>
- [44] J.S. Bell, Against measurement, in *Sixty Two Years of Uncertainty: Historical, Philosophical and Physical Enquiries into the Foundations of Quantum Mechanics*, Erice meeting in August 1989, A.I. Miller ed. (Plenum Press) ; reproduit dans pp. 213–231 de l'édition 2004 de [1].
- [45] N.D. Mermin, Hidden variables and the two theorems of John Bell, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 803–815 (1993) ; voir en particulier le §III.
- [46] A. Shimony, Role of the observer in quantum theory, *Am. J. Phys.* **31**, 755–773 (1963).
- [47] L. Rosenfeld, The measuring process in quantum mechanics, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, extra number 222 Commemoration of the thirtieth anniversary of the meson theory by Dr. H. Yukawa (1965).
- [48] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, Benjamin (1966) ; deuxième édition, K. Gottfried et Yan Tun-Mow, Springer (2003).
- [49] H.P. Stapp, S-matrix interpretation of quantum theory, *Phys. Rev.* **D 3**, 1303–1320 (1971).
- [50] A.J. Leggett, Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects, *J. Phys. Condens. Matter* **14**, R415–R451 (2002).
- [51] A.J. Leggett, Macroscopic quantum systems and the quantum theory of measurement, Supplement of the *Progr. Theor. Phys.* n° 69, 80–100 (1980).
- [52] A.J. Leggett, *The Problems of Physics*, Oxford University Press (1987).
- [53] N.G. van Kampen, Ten theorems about quantum mechanical measurements, *Physica A* **153**, 97–113 (1988).

[54] B.G. Englert, M.O. Scully, et H. Walther, Quantum erasure in double-slit interferometers with which-way detectors, *Am. J. Phys.* **67**, 325–329 (1999) ; voir les premières lignes du §IV.

[55] C.A. Fuchs et A. Peres, Quantum theory needs no 'interpretation', *Phys. Today* **53**, March 2000, 70–71 ; voir également diverses réactions à ce texte dans les lettres publiées dans le numéro de septembre 2000.

[56] C.F. von Weizsäcker, *Voraussetzungen des naturwissenschaftlichen Denkens*, Hanser Verlag (1971) et Herder (1972).

[57] D. Bohm et J. Bub, A proposed solution of the measurement problem in quantum mechanics by a hidden variable theory, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 453–469 (1966).

[58] D. Bohm et J. Bub, A refutation of the proof by Jauch and Piron that hidden variables can be excluded in quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 470–475 (1966).

7

Tests expérimentaux de la non localité quantique avec des paires de photons intriqués

Alain Aspect

Institut d'Optique Graduate School, Université Paris-Saclay,
2 avenue Augustin Fresnel, 91128 Palaiseau Cedex - France

Résumé

Depuis leur découverte par Einstein, Podolsky et Rosen en 1935, les états quantiques intriqués n'ont pas cessé de susciter l'intérêt des physiciens. D'abord simples sujets de réflexion sur les fondements de la mécanique quantique, ils sont devenus, après les travaux de John Bell, l'enjeu d'expériences qui ont confirmé la non séparabilité quantique : dans un état intriqué, deux particules, même très éloignées l'une de l'autre, ne peuvent être décrites comme des entités séparées ayant des propriétés individualisées. En parallèle avec l'approfondissement de la réflexion sur la réalité physique et notre représentation du monde, ces travaux débouchent aussi, de façon surprenante, sur des possibilités d'application : cryptographie quantique, téléportation quantique, ordinateur quantique.

Abstract

Since their discovery by Einstein, Podolsky and Rosen in 1935, the entangled quantum states have not ceased to arouse the interest of physicists. First, simple subjects of reflection on the foundations of quantum mechanics, they became, after John Bell's work, the subjects of experiments that confirmed quantum non-separability: in an entangled state, two particles, even very far apart, cannot be described as separate entities with individualized properties. In parallel with the deepening of the reflection on physical reality and our representation of the world, these works also lead, surprisingly, to possibilities of application: quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computer.

Note

Ce texte est la version écrite de la conférence du même nom donnée en 1999 dans le cadre de la cinquième rencontre « Physique et interrogations fondamentales » et publiée dans *L'élémentaire & le complexe*, édité par le regretté Michel Crozon & Yves Sacquin¹, EDP-Sciences (2001).

I. Introduction

Le problème de l'interprétation du formalisme quantique, et en particulier de son caractère probabiliste, a donné lieu entre Bohr et Einstein à un débat commencé à la fin des années 1920, et auquel seule la disparition des protagonistes mettra un terme au début des années 1950. Un moment décisif de ce débat fut la publication en 1935 du célèbre article EPR (Einstein, Podolsky, et Rosen) [1], où fut présenté un état « intriqué » de deux particules éloignées dans l'espace. Einstein nota immédiatement l'étrangeté, à l'aune des concepts habituels issus de la physique classique, des corrélations prévues par la physique quantique dans cette situation. Il pensa pouvoir en déduire que le formalisme quantique devait être complété, ce qui remettait en cause « l'interprétation de Copenhague », et qui fut véhémentement contesté par Bohr. Cette question focalisa l'essentiel du débat ultérieur entre les deux physiciens. Notons d'emblée qu'Einstein ne contestait nullement la correction des prédictions du formalisme quantique : la controverse portait sur l'interprétation de ce formalisme.

La situation fut radicalement bouleversée en 1965, lorsque John Bell découvrit que si l'on suit jusqu'au bout les idées d'Einstein, on aboutit – dans certaines situations très rares du type EPR – à une contradiction quantitative avec les prédictions quantiques [2]. Le débat initialement de nature épistémologique devenait une question scientifique, susceptible d'être tranchée expérimentalement. De telles expériences allaient effectivement être menées à partir des années 1970.

La première partie de cette présentation (parties 2 à 6), vise à expliquer ce que sont le théorème de Bell et les inégalités de Bell, et pourquoi je les trouve si importants. Elle est suivie d'une brève présentation des expériences de première génération, conduites entre 1971 et 1976. Puis je décrirai plus en détail les trois expériences de deuxième génération, réalisées à Orsay entre 1976 et 1982, avec des paires de photons corrélés produites dans des cascades radiatives atomiques excitées par laser. Je présenterai enfin les expériences de troisième génération, développées à partir de la fin des années 1980 : utilisant des sources encore plus efficaces, basées sur la division paramétrique de photons laser, elles ont conduit récemment à des tests des inégalités de Bell encore plus proches du schéma idéal. Permettant l'injection des paires de photons EPR corrélés dans des fibres optiques, ces sources ont par ailleurs ouvert la voie au domaine de la cryptographie quantique et de l'information quantique.

(1) L'AEIS remercie Yves Sacquin pour son aimable autorisation à reproduire cet article

2. Pourquoi des paramètres supplémentaires ? L'expérience de pensée d'Einstein- Podolsky-Rosen-Bohm

2.1 Schéma expérimental

Considérons la variante de Bohm[3] de l'expérience de pensée EPR (figure 1). Une source S émet une paire de photons v_1 and v_2 , s'éloignant dans des directions opposées suivant Oz . Supposons que la partie polarisation du vecteur d'état décrivant la paire puisse s'écrire :

$$|\Psi(v_1, v_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x, x\rangle + |y, y\rangle\} \quad (1)$$

où $|x\rangle$ et $|y\rangle$ sont des états de polarisation linéaire. Cet état est remarquable. Il est impossible de le factoriser en un produit tensoriel de deux états de polarisation définie pour chaque photon. On ne peut donc attribuer de polarisation à chaque photon pris séparément.

Effectuons une mesure de polarisation linéaire sur chacun de ces photons, avec les analyseurs I and II . L'analyseur I , dans l'orientation caractérisée par le vecteur unitaire \mathbf{a} , est suivi de deux détecteurs donnant les résultats $+$ ou $-$, correspondant à une polarisation linéaire parallèle ou perpendiculaire à \mathbf{a} pour le photon v_1 . L'analyseur II , dans l'orientation \mathbf{b} , agit de façon analogue sur le photon v_2 .

Un calcul simple de mécanique quantique fournit les résultats prévus pour ces mesures de polarisation, simples ou en coïncidences. Nous noterons $P_{\pm}(\mathbf{a})$ la probabilité (simple) d'obtenir le résultat \pm sur le photon v_1 ; de même $P_{\pm}(\mathbf{b})$ caractérise le résultat de la mesure de polarisation sur le photon v_2 . La prédiction quantique s'écrit :

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{a}) &= P_-(\mathbf{a}) = 1/2 \\ P_+(\mathbf{b}) &= P_-(\mathbf{b}) = 1/2 \end{aligned} \quad (\text{Q.M.}) \quad (2)$$

Ces résultats sont en accord avec l'observation qu'on ne peut attribuer aucune polarisation particulière à chacun des photons, de telle sorte qu'une mesure individuelle de polarisation donne un résultat aléatoire.

Nous nous intéressons à présent aux probabilités $P_{\pm\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de détection conjointe de v_1 et v_2 dans les canaux $+$ ou $-$ des polariseurs I ou II , orientés suivant \mathbf{a} et \mathbf{b} . La prédiction quantique s'écrit :

(2) Cette situation est en correspondance biunivoque avec l'expérience de pensée EPR Bohm portant sur une paire de spins $1/2$ dans un état singulet, sur lesquels des filtres de Stern-Gerlach orientables effectuent des mesures de composantes de moment cinétique.

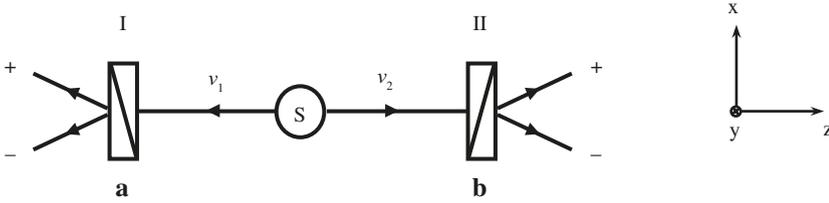


Figure 1. Expérience de pensée d'Einstein-Podolsky-Bohm avec des photons. Les deux photons v_1 and v_2 , émis dans l'état de polarisation $|\Psi(1,2)\rangle$ de l'équation (1), sont analysés par des polariseurs linéaires I et II orientés suivant \mathbf{a} et \mathbf{b} . On peut mesurer les probabilités de détection simples ou conjointes dans les voies de sortie des polariseurs.

$$\begin{aligned}
 P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
 P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})
 \end{aligned}
 \quad (\text{M.Q.}) \quad (3)$$

Nous allons maintenant montrer que ces prédictions ont des conséquences de très grande portée.

2.2 Corrélations

Considérons d'abord la situation particulière $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, où les deux polariseurs sont parallèles. La prédiction quantique pour les probabilités conjointes (équations 3) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \\
 P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

D'après ce résultat, lorsque le photon v_1 est trouvé dans le canal + du polariseur I, alors on est certain de trouver v_2 dans le canal + de II (et de même pour les résultats -). Ainsi, pour des polariseurs parallèles, les résultats de mesure de polarisation sur v_1 et v_2 sont *totalemment corrélés*.

Pour caractériser quantitativement le degré de corrélation entre quantités aléatoires, on utilise le coefficient de corrélation. Pour les mesures de polarisation considérées ici, il s'écrit :

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (5)$$

En reportant dans cette définition les prédictions quantiques (3), on obtient un coefficient de corrélation de polarisation

$$E_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (6)$$

Pour le cas particulier des polariseurs parallèles ($(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$), on trouve $E_{QM}(0) = 1$, ce qui confirme que la corrélation est totale.

En conclusion, les prédictions quantiques suggèrent que, malgré le caractère apparemment aléatoire des résultats individuels, il y a une corrélation entre ces résultats aléatoires. Cette corrélation est caractérisée par l'équation (6). Pour des polariseurs parallèles (ou perpendiculaires), la corrélation est totale ($|E_{QM}| = 1$).

2.3 Difficultés pour construire une image à partir du formalisme quantique

Nous pouvons chercher à trouver une image simple pour comprendre ces corrélations fortes. L'idée la plus naturelle est de suivre le calcul quantique conduisant à (3). En fait, il existe plusieurs moyens de faire ce calcul. L'un des plus directs consiste à projeter le vecteur d'état (1) sur le vecteur propre associé à chaque mesure conjointe particulière. On obtient ainsi immédiatement les résultats (3). Malheureusement, ces calculs portant sur des vecteurs d'états décrivant globalement les 2 photons dans un espace abstrait, il est difficile d'en extraire une image dans notre espace ordinaire.

Pour décrire séparément les deux mesures aux deux extrémités opposées de l'expérience, nous décomposons la mesure conjointe en deux étapes. Supposons par exemple que la mesure sur le photon v_1 soit faite en premier, et donne le résultat +, le polariseur I étant orienté suivant \mathbf{a} que nous prenons parallèle à l'axe Ox pour simplifier ($\mathbf{a} = \mathbf{e}_x$). Ce résultat + a une probabilité de 1/2. Pour continuer le calcul, nous devons utiliser le postulat de réduction du paquet d'onde : à la suite de cette première mesure, le nouveau vecteur d'état $|\Psi'(v_1, v_2)\rangle$ décrivant la paire est obtenu par projection du vecteur d'état initial $|\Psi(v_1, v_2)\rangle$ (équation 1) sur l'espace propre associé au résultat + : cet espace à deux dimensions a pour base $\{|x, x\rangle, |x, y\rangle\}$. En utilisant le projecteur correspondant, on obtient

$$|\Psi'(v_1, v_2)\rangle = |x, x\rangle \quad (7)$$

Cela veut dire qu'immédiatement après la première mesure, le photon v_1 prend la polarisation $|x\rangle$: ceci paraît évident puisque la mesure, faite avec un polariseur orienté suivant Ox , a donné le résultat +. De façon plus étonnante, le photon éloigné v_2 , qui n'a encore interagi avec aucun polariseur, a lui aussi été projeté dans l'état $|x\rangle$, de polarisation bien définie, parallèle à celle trouvée pour v_1 . Cette conclusion surprenante conduit bien au résultat correct (3), puisqu'une application directe de la loi de Malus montre qu'une mesure ultérieure sur le photon v_2 donnera

$$P_{++}(\mathbf{e}_x, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{e}_x, \mathbf{b}) \quad (8)$$

(le facteur $1/2$ correspond à la probabilité $1/2$ d'avoir obtenu $+$ lors de la première mesure sur le photon ν_1).

Le calcul en deux étapes donne donc les mêmes résultats que le calcul direct. Mais il suggère en plus une image en deux étapes, que l'on peut maintenant décrire dans l'espace réel :

1. Le photon ν_1 , qui n'avait pas de polarisation bien définie avant sa mesure au polariseur I , prend la polarisation associée au résultat obtenu, au moment de cette mesure : ceci n'est en rien surprenant.

2. Lorsque la mesure est effectuée sur ν_1 , le photon ν_2 , qui n'avait pas de polarisation définie avant cette mesure, est projeté dans un état de polarisation parallèle au résultat de la mesure effectuée sur ν_1 . Ceci est très étonnant, puisque ce brusque changement dans la description du photon ν_2 se produit instantanément, quelle que soit la distance entre les photons ν_1 et ν_2 au moment de la mesure sur ν_1 .

Cette image apparaît en contradiction avec la relativité. Suivant Einstein, ce qui se passe dans une région donnée de l'espace temps ne peut pas être influencé par un événement se produisant dans une autre région de l'espace temps séparée de la première par un intervalle du genre espace (aucun signal se propageant à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière ne peut connecter les deux événements). Il n'est donc pas surprenant que l'on ait essayé de trouver des images plus acceptables pour décrire les corrélations EPR. Nous allons présenter une telle image.

2.4 Paramètres supplémentaires

Il est courant dans le monde classique d'observer des corrélations entre mesures distantes, sur deux systèmes séparés qui avaient interagi dans le passé. Par exemple, si un système mécanique de moment cinétique total nul se fragmente en deux sous l'effet d'une répulsion interne, les moments cinétiques des deux fragments resteront exactement opposés à tout instant ultérieur, en l'absence de force externe. Plus généralement, même en présence de forces, les deux moments cinétiques resteront corrélés, puisque leurs valeurs à tout instant sont déterminées par les valeurs initiales qui étaient exactement opposées.

Il est tentant d'utiliser une telle image classique pour rendre compte des corrélations EPR, en terme de propriété commune aux deux systèmes. Considérons à nouveau la corrélation de polarisation totale entre les mesures effectuées avec des polariseurs parallèles, $(a,b) = 0$. Quand nous trouvons $+$ pour ν_1 , nous sommes sûrs de trouver aussi $+$ pour ν_2 . Nous sommes alors conduits à admettre qu'il existe une propriété (Einstein parlait d'« élément de réalité physique ») appartenant à cette paire avant les mesures, et déterminant le résultat $++$. Pour une autre paire, conduisant au résultat $--$ nous pouvons de façon analogue invoquer une propriété commune préalable, déterminant le résultat. Il suffit alors d'admettre que la moitié des paires sont émises avec la propriété $++$, et la moitié avec la propriété $--$, pour reproduire tous les résultats obtenus dans cette configuration.

Il faut remarquer ici que de telles propriétés, différentes d'une paire à l'autre, ne sont pas prises en compte par le vecteur d'état quantique $|\Psi(v_1, v_2)\rangle$ qui est le même pour toutes les paires. C'est pour cette raison, qu'*Einstein en tira la conclusion que la mécanique quantique n'est pas complète*. Et c'est pourquoi de telles propriétés supplémentaires sont désignées par le terme de « paramètres supplémentaires », ou encore « variables cachées ».

En conclusion, il semble possible de « comprendre » les corrélations EPR par une image de type classique, impliquant des paramètres supplémentaires différents d'une paire à l'autre. On peut espérer retrouver les prédictions statistiques de la mécanique quantique, lorsqu'on moyenne sur les paramètres supplémentaires. Il semble que telle était la position d'Einstein [4, 5, 6]. Notons qu'à cette étape du raisonnement, une telle position n'est pas en contradiction avec la mécanique quantique : il n'y a aucun problème logique à admettre pleinement les prédictions quantiques, tout en invoquant des paramètres supplémentaires donnant une image acceptable des corrélations EPR.

3. Inégalités de Bell

3.1 Formalisme

Bell traduisit en termes mathématiques les conséquences de la discussion ci-dessus, et il introduisit explicitement des paramètres supplémentaires, notés λ . La distribution de ces paramètres sur un ensemble de paires émises est spécifiée par une densité de probabilité $\rho(\lambda)$, telle que :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &\geq 0 \\ \int d\lambda \rho(\lambda) &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Pour une paire donnée, caractérisée par un paramètre supplémentaire λ , les résultats de mesures sont donnés par des fonctions bivaluées

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \pm 1 \quad \text{au polariseur I (orientation } \mathbf{a}) \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \pm 1 \quad \text{au polariseur II (orientation } \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (10)$$

Une Théorie à Paramètre Supplémentaire particulière est complètement définie par la forme explicite des fonctions $\rho(\lambda)$, $A(\lambda, \mathbf{a})$ et $B(\lambda, \mathbf{b})$. Il est alors facile d'exprimer les probabilités des divers résultats de mesures. Par exemple, nous remarquons que la fonction $1/2[A(\lambda, \mathbf{a}) + 1]$ prend la valeur +1 pour le résultat +, et 0 pour le résultat - (et de façon similaire $1/2[1 - B(\lambda, \mathbf{b})]$ prend la valeur + pour le résultat - et 0 pour le résultat +), nous pouvons en déduire

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{a}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, \mathbf{a}) + 1]}{2} \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, \mathbf{a}) + 1]}{2} \frac{[1 - B(\lambda, \mathbf{b})]}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Finalement, la fonction de corrélation définie à l'équation (5) prend dans un tel formalisme la forme particulièrement simple

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \quad (12)$$

3.2 Un exemple (naïf) de théorie à paramètres supplémentaires

Comme exemple de Théorie à Paramètre Supplémentaire, nous présentons un modèle où chaque photon qui se propage le long de l'axe Oz est supposé posséder une polarisation linéaire bien définie, déterminée par son angle (λ_1 ou λ_2) avec l'axe x . Afin de rendre compte de la forte corrélation, nous supposons que les deux photons d'une même paire sont émis avec la même polarisation linéaire, définie par un angle commun λ (figure 2).

La polarisation des diverses paires est distribuée aléatoirement, ce que nous décrivons par une densité de probabilité isotrope $\rho(\lambda)$:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad (13)$$

Pour compléter notre modèle, nous devons donner une forme explicite pour les fonctions $A(\lambda, \mathbf{a})$ et $B(\lambda, \mathbf{b})$. Nous prenons la forme suivante

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \text{signe}\{\cos 2(\theta_I - \lambda)\} \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \text{signe}\{\cos 2(\theta_{II} - \lambda)\} \end{aligned} \quad (14)$$

où les angles θ_I et θ_{II} indiquent les orientations des polariseurs. Remarquons que ces formes sont tout à fait raisonnables. La fonction $A(\lambda, \mathbf{a})$ prend la valeur +1 quand la polarisation du photon v_1 fait un angle de moins que $\pi/4$ avec la direction d'analyse \mathbf{a} , et la valeur -1 pour le cas complémentaire (la polarisation est alors plus proche de la perpendiculaire à \mathbf{a}).

Avec ce modèle explicite, nous pouvons utiliser les équations (11) pour calculer les probabilités de diverses mesures. Nous trouvons par exemple des probabilités simples (15) identiques aux prédictions quantiques :

$$P_+(\mathbf{a}) = P_-(\mathbf{a}) = P_+(\mathbf{b}) = P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \quad (15)$$

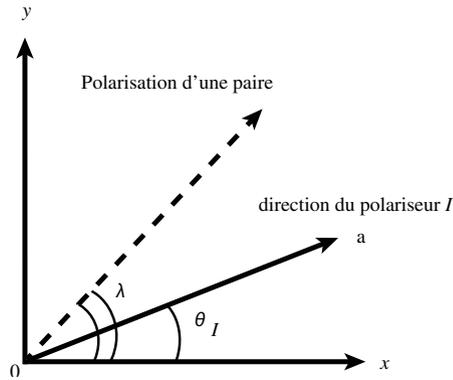


Figure 2. Exemple de théorie à paramètres supplémentaires. Chaque paire de photons a une “direction de polarisation”, définie par λ , qui est le paramètre supplémentaire du modèle.

Le modèle nous permet également de calculer la fonction de corrélation de polarisation, et nous trouvons à partir de l'équation (12) :

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - 4 \frac{|\theta_I - \theta_{II}|}{\pi} = 1 - 4 \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{\pi} \quad (16)$$

pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_I - \theta_{II} \leq \frac{\pi}{2}$

Ce résultat est remarquable. Notons d'abord que $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dépend seulement de l'angle relatif (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , entre les polariseurs, comme la prédiction de la mécanique quantique (6). De plus comme on le voit sur la figure 3, il y a une différence modérée entre les prédictions du modèle simple à paramètre supplémentaire et les prédictions quantiques. Les prédictions sont en accord parfait pour les angles 0 et $\pi/2$, c'est-à-dire dans les cas de corrélation totale. Ce résultat, obtenu avec un modèle à paramètre supplémentaire extrêmement simple, est très encourageant et l'on pourrait espérer qu'un modèle plus sophistiqué serait capable de réduire plus exactement les prédictions quantiques. *La découverte de Bell est que la recherche de tel modèle est sans espoir*, comme nous allons le montrer maintenant.

3.3 Inégalités de Bell

Il y a de nombreuses formes différentes, et des démonstrations variées, des inégalités de Bell. Nous donnons ici une démonstration très simple conduisant à une forme directement utilisable pour les expériences³.

(3) Il est important de faire la distinction entre les inégalités qui montrent une contradiction mathématique avec la mécanique quantique, mais sans possibilité d'un test expérimental avec des appareils (nécessairement) imparfaits, et des inégalités qui permettent un test expérimental dès lors que les imperfections expérimentales n'excèdent pas certaines limites.

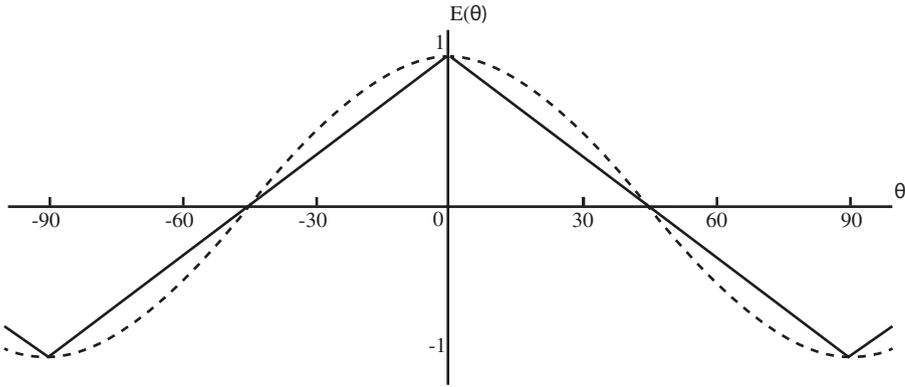


Figure 3. Coefficient de corrélation de polarisation, en fonction de l'orientation relative des polariseurs : (i) ligne pointillée : prédiction de la mécanique quantique ; (ii) ligne continue : notre modèle simple.

Considérons la quantité

$$\begin{aligned} s &= A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b}') + A(\lambda, \mathbf{a}')B(\lambda, \mathbf{b}) + A(\lambda, \mathbf{a}')B(\lambda, \mathbf{b}') \\ &= A(\lambda, \mathbf{a})[B(\lambda, \mathbf{b}) - B(\lambda, \mathbf{b}')] + A(\lambda, \mathbf{a}')[B(\lambda, \mathbf{b}) + B(\lambda, \mathbf{b}')] \end{aligned} \quad (17)$$

En se souvenant que les 4 nombres A et B ne peuvent prendre que les valeurs ± 1 , on voit immédiatement sur l'équation (17)

$$s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \pm 2 \quad (18)$$

La moyenne sur λ des quantités s est donc comprise entre $+2$ et -2

$$-2 \leq \int d\lambda \rho(\lambda) s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (19)$$

En utilisant l'équation (12), nous récrivons ces inégalités

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (20)$$

avec

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \quad (21)$$

Nous avons obtenu ainsi les inégalités B.C.H.S.H., qui sont les inégalités de Bell généralisées par Clauser, Horne, Shimony, Holt [7]. Elles portent sur une combinaison S des quatre coefficients de corrélation associés à deux directions d'analyse pour chaque polariseur (\mathbf{a} et \mathbf{a}' pour le polariseur I , \mathbf{b} et \mathbf{b}' pour le polariseur II).

4. Conflit avec la mécanique quantique

4.1 Mise en évidence

Nous pouvons utiliser les prédictions (6) de la mécanique quantique pour les paires EPR, pour évaluer la quantité $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ définie par l'équation (21). Pour les orientations particulières indiquées sur la figure 4a, le résultat est

$$S_{QM} = 2\sqrt{2} \quad (22)$$

Cette prédiction de la mécanique quantique est clairement en conflit avec les inégalités de Bell (20) qui sont valables pour n'importe quelle théorie à paramètre supplémentaire de la forme générale définie au §3.1.

Nous avons donc trouvé une situation où les prédictions de la mécanique quantique ne peuvent pas être reproduites (simulées) par des théories à paramètres supplémentaires. Ceci constitue l'essence du théorème de Bell : il est impossible de trouver une théorie à paramètres supplémentaires, de la forme générale définie au § 3.1 qui reproduise **toutes** les prédictions de la mécanique quantique. Cette affirmation est la généralisation de ce que l'on voit sur la figure 3. Dans le cas particulier du modèle supplémentaire présenté au § 3.2 : le modèle reproduit exactement les prédictions de la mécanique quantique pour certains angles ($0, \pi/4, \pi/2$), mais il en diffère à d'autres angles. *L'importance du théorème de Bell est qu'il n'est pas restreint à un modèle particulier mais qu'il est général.*

4.2 Conflit maximum

Il est intéressant de chercher la violation maximale des inégalités de Bell par les prédictions quantiques. Considérons la valeur de S prévue par la mécanique quantique :

$$S_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') = \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + \cos 2(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \cos 2(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \quad (23)$$

Cette quantité est fonction des 3 variables indépendantes (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{b}, \mathbf{a}')$ et $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$. Notons que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}') + (\mathbf{a}', \mathbf{b}')$.

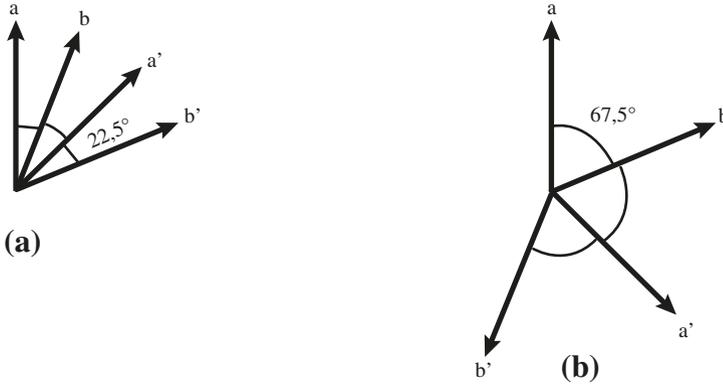


Figure 4. Orientations donnant le conflit maximum entre les inégalités de Bell et la mécanique quantique.

Afin de trouver les valeurs extrêmes de S_{QM} , nous écrivons que les trois dérivées partielles sont nulles. On en déduit

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}') = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \theta \quad (24)$$

et

$$\sin 2\theta = \sin 6\theta \quad (25)$$

Nous avons tracé sur la figure 5 la fonction $S_{QM}(\theta)$ évaluée avec des angles soumis à la contrainte (24). Ce graphe montre que les maximum et minimum absolus de S_{QM} sont

$$S_{MQ} = 2\sqrt{2} \quad \text{pour} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{8} \quad (26)$$

$$S_{MQ} = -2\sqrt{2} \quad \text{pour} \quad \theta = \pm \frac{3\pi}{8} \quad (27)$$

Ces valeurs sont bien solutions de (25). Les ensembles d'orientation correspondants sont indiqués sur la figure 4. Ils donnent les violations maximales des inégalités de Bell.

Plus généralement, la figure 5 montre qu'il y a un grand intervalle d'orientation conduisant à un conflit entre les prédictions quantiques et les inégalités de Bell. Cependant il est également clair que toutes les orientations ne donnent pas un tel conflit.

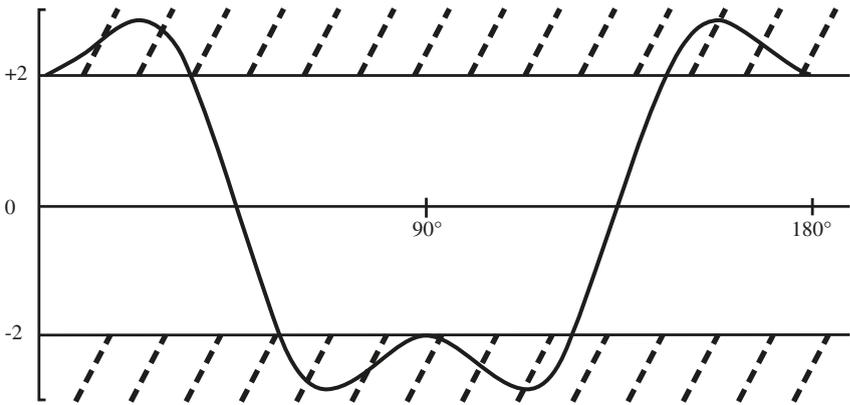


Figure 5. Quantité $S(\theta)$ prédite par la mécanique quantique pour des paires EPR. Le conflit avec les inégalités de Bell se produit quand $|S|$ est plus grand que 2, et il est maximal pour les orientations indiquées sur la figure 4.

5. Discussion : la condition de localité de Bell

A ce point du raisonnement, nous avons établi le théorème de Bell : la mécanique quantique est en conflit avec n'importe quelle théorie à paramètres supplémentaires telle que nous l'avons définie au § 3.1 ; en effet, la mécanique quantique viole les inégalités de Bell, mais ces inégalités s'appliquent automatiquement à toutes les théories à paramètres supplémentaires du type défini au § 3.1 . Il est intéressant de regarder en détail les hypothèses qui sous-tendent ce formalisme introduit au § 3.1, dans le but de mettre en évidence une hypothèse particulière responsable du conflit.

Dans le paragraphe 3.1, on fait d'abord l'hypothèse de l'existence de paramètres supplémentaires. Comme nous l'avons vu, ces paramètres sont introduits pour rendre compte des corrélations à distance. Cette hypothèse est étroitement liée à une conception du monde, défendue par Einstein, où la notion de réalités physiques séparées pour des systèmes séparés a une signification. Il est en fait possible de déduire l'existence de paramètres supplémentaires à partir de définitions très générales sur la réalité physique, dans l'esprit des idées d'Einstein [8]. Quel que soit le point de départ, une hypothèse dans cet esprit semble absolument nécessaire pour obtenir des inégalités en conflit avec la mécanique quantique.

La seconde hypothèse repose sur la remarque que le formalisme de la section 3.1 est déterministe : une fois que λ est fixé, les résultats $A(\lambda, a)$ et $B(\lambda, b)$ des mesures de polarisation sont certains. On a suggéré que ce caractère déterministe pourrait être une raison cruciale du conflit avec le formalisme non déterministe de la mécanique quantique. En fait, comme John Bell [9], et d'autres l'ont montré [10], il est facile de généraliser le formalisme de la partie 3.1 à des théories à paramètres supplémentaires *stochastiques*, où les fonctions déterministes $A(\lambda, a)$ et $B(\lambda, b')$ sont remplacées par des fonctions aléatoires. On trouve alors qu'il y a encore des inégalités de Bell, et que le conflit avec la mécanique quantique demeure. On peut en conclure que le caractère déterministe du formalisme n'est pas la raison du conflit [11].

Finalement, une troisième hypothèse implicite a été faite, comme l'a soulignée J. Bell dans tous ses articles : il s'agit de l'*hypothèse de localité*. Remarquons en effet que, dans le formalisme de la partie 3.1, nous avons supposé implicitement que le résultat $A(\lambda, \mathbf{a})$ de la mesure par le polariseur I ne dépend pas de l'orientation \mathbf{b} du polariseur éloigné II , et vice-versa. De même, on suppose que la densité de probabilité $\rho(\lambda)$ (qui décrit la façon dont les paires sont émises) ne dépend pas des orientations \mathbf{a} et \mathbf{b} . Cette *condition de localité* est cruciale : les inégalités de Bell ne s'appliqueraient pas à un formalisme ne le respectant pas. On constate en effet sans difficulté que la démonstration du § 3.3 n'est plus valable avec des fonctions telles que $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ou $\rho(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

En conclusion, deux hypothèses semblent absolument nécessaires pour obtenir les inégalités de Bell et donc un conflit avec la mécanique quantique :

- Les corrélations à distance peuvent s'interpréter en introduisant des Paramètres Supplémentaires associés à chacune des deux particules séparées, dans l'esprit de l'idée défendue par Einstein que des objets séparés ont des réalités physiques séparées.
- Les quantités $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, et $\rho(\lambda)$ obéissent à la *condition de localité*, qui stipule qu'elles ne dépendent pas des orientations des polariseurs éloignés.

L'ensemble de ces deux hypothèses constitue ce que l'on appelle parfois *la séparabilité d'Einstein*. Comme ces deux hypothèses conduisent à un conflit avec la mécanique quantique, on en conclut que *la mécanique quantique est non séparable*.

On pourrait se demander laquelle de ces deux hypothèses est plus particulièrement responsable du conflit. En fait, il semble difficile de garder l'une sans l'autre. Cela a-t-il un sens de considérer un système séparé dans l'espace temps caractérisé par des propriétés propres, si ce système est en interaction non locale avec des systèmes éloignés ? Il nous semble donc que l'idée même de système séparé est indissociable de celle de localité, et il ne nous paraît pas illégitime de confondre séparabilité d'Einstein et localité. C'est en ce sens que l'on pourra dire que *la mécanique quantique est non locale*.

6. Expérience de pensée avec des polariseurs variables : la condition de localité comme conséquence de la causalité d'Einstein

Dans des expériences statiques, où les polariseurs sont fixes pendant toute la durée d'une expérience, la condition de localité doit être posée comme une hypothèse. Bien qu'extrêmement raisonnable, cette condition n'est prescrite par aucune loi physique fondamentale. Comme l'écrit J. Bell [2] « les réglages des instruments sont faits suffisamment à l'avance pour leur permettre d'atteindre des états coordonnés par échange de signaux se produisant à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière ». Dans ce cas, le résultat $A(\lambda)$ de la

mesure au polariseur I pourrait dépendre de l'orientation \mathbf{b} du polariseur éloigné II , et vice-versa. La Condition de Localité ne s'appliquerait alors plus, ni les inégalités de Bell.

Après cette remarque, Bell insiste sur l'importance des « expériences du genre proposées par Bohm et Aharonov [4], dans laquelle les réglages sont modifiés pendant la propagation des particules »⁴. Dans une telle *expérience dépendant du temps*, la condition de localité deviendrait une conséquence de la causalité d'Einstein, qui interdit toute influence plus rapide que la lumière.

Comme nous l'avons montré dans notre proposition de 1975 [12], il suffit en fait, pour être dans un tel schéma, de commuter rapidement chaque polariseur entre deux orientations particulières (\mathbf{a} et \mathbf{a}' pour I , \mathbf{b} et \mathbf{b}' pour II). Il devient alors possible de tester expérimentalement une classe très vaste de théories à paramètres supplémentaires : toutes celles qui obéissent à la causalité d'Einstein. Dans de telles théories, la réponse du polariseur I à l'instant t peut dépendre de l'orientation \mathbf{b} (ou \mathbf{b}') du polariseur II , mais seulement aux instants antérieurs à $t - L/c$ (L est la distance entre les polariseurs). Une dépendance retardée analogue est prise en compte pour la densité de probabilité $\rho(\lambda)$, qui décrit l'émission des paires par la source. Pour des instants de commutation aléatoire, sans corrélation mutuelle entre les deux côtés éloignés, les prédictions de ces théories générales appelées « théories séparables à paramètres supplémentaires », sont contraintes par des inégalités de Bell généralisées, basées sur la causalité d'Einstein et non plus sur la condition de localité de Bell [12].

Par ailleurs, on peut montrer [13] que les corrélations de polarisation prédites par la mécanique quantique dépendent seulement des orientations \mathbf{a} et \mathbf{b} à l'instant précis de la mesure et ne mettent en jeu aucun terme de retard L/c . Pour un choix convenable d'un ensemble d'orientations ($\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$) – par exemple les ensembles indiqués dans la figure 4 – les prédictions de la mécanique quantique sont encore en conflit avec les inégalités de Bell généralisées.

Dans une expérience avec des polariseurs variables, le théorème de Bell établit donc l'incompatibilité entre la mécanique quantique et toutes les théories à paramètres supplémentaires obéissant à la causalité d'Einstein. Remarquons à nouveau ici que la causalité d'Einstein jouait déjà un rôle central dans les discussions conduisant à la notion de paramètres supplémentaires, ou de façon équivalente à l'existence d'une réalité physique indépendante pour chaque sous système séparé [5]. Il ne semble donc pas exagéré de conclure que dans une expérience avec des polariseurs variables, le théorème de Bell établit une *contradiction entre la mécanique quantique et une description du monde dans l'esprit des idées d'Einstein*. Insistons cependant sur le fait qu'*Einstein ne connaissait pas le théorème de Bell*, et pouvait logiquement penser que sa conception du monde était compatible avec toutes les prédictions mathématiques de la mécanique quantique. Nous ne pouvons donc pas savoir quelle aurait été sa réaction devant la contradiction révélée par les inégalités de Bell.

(4) Cette idée était déjà indiquée dans le livre de Bohm [3].

7. Du théorème de Bell à une expérience réelle

7.1 Test expérimental des inégalités de Bell

Après le théorème de Bell, le débat sur la possibilité (ou la nécessité) de compléter la mécanique quantique avait changé radicalement. Ce n'était plus une question de position philosophique (réalisme contre positivisme) ni de goût personnel. Il devenait possible de trancher la question par une expérience.

En effet, si l'on peut produire des paires de photons (ou de particules de spin 1/2) dans un état EPR, et si l'on mesure les 4 taux de coïncidence $N_{\pm\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ avec des détecteurs placés dans les canaux de sortie des polariseurs (ou des filtres de Stern-Gerlach) on en tire directement le coefficient de corrélation de polarisation, pour des polariseurs dans les orientations \mathbf{a} et \mathbf{b} :

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{N_{++}(\mathbf{a},\mathbf{b}) - N_{+-}(\mathbf{a},\mathbf{b}) - N_{-+}(\mathbf{a},\mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{N_{++}(\mathbf{a},\mathbf{b}) + N_{+-}(\mathbf{a},\mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a},\mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a},\mathbf{b})} \quad (28)$$

En répétant 4 mesures de ce type, dans les orientations (\mathbf{a},\mathbf{b}) , (\mathbf{a},\mathbf{b}') , (\mathbf{a}',\mathbf{b}) , et $(\mathbf{a}',\mathbf{b}')$, on obtient une valeur mesurée $S_{\text{exp}}(\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}')$ de la quantité S définie par l'équation (21). En choisissant une situation où la mécanique quantique prédit que ces quantités violent les inégalités de Bell (20), on a un test permettant de discriminer entre la mécanique quantique et l'ensemble des théories à paramètres supplémentaires locales. Si de plus on travaille dans un schéma avec des polariseurs variables, on teste la classe plus générale des théories à paramètres supplémentaires « séparables » (causales au sens relativiste).

7.2 Les situations sensibles sont rares

La mécanique quantique a été vérifiée dans tellement d'expériences que le théorème de Bell pourrait apparaître simplement comme une preuve de l'impossibilité des paramètres supplémentaires. En fait, les situations dans lesquelles le conflit révélé par les inégalités de Bell se produit (situations « sensibles ») sont si rares que, en 1965, aucune n'avait été réalisée expérimentalement.

Pour mieux comprendre ce point, notons d'abord que les inégalités de Bell sont compatibles avec la totalité de la physique classique, c'est-à-dire la mécanique classique, (y compris relativiste), mais aussi l'électrodynamique classique. Il est en effet facile de montrer que ces théories classiques entrent dans le cadre des formalismes à paramètres supplémentaires obéissant à la causalité d'Einstein. Par exemple en mécanique classique, les paramètres λ seraient les positions et les vitesses initiales des particules qui déterminent l'évolution future. De même en électrodynamique classique les λ seraient les courants et les charges dans les sources, dont on peut déduire les champs électromagnétiques et leur action sur l'appareil de mesures.

De plus, même dans les situations que l'on ne peut décrire que par la mécanique quantique, il n'y a que rarement un conflit avec les inégalités de Bell. Plus précisément lorsqu'on étudie les corrélations entre deux systèmes quantiques séparés (qui peuvent avoir interagi dans le passé), nous pouvons identifier deux conditions nécessaires pour avoir un conflit avec les inégalités de Bell :

- Les deux sous-systèmes séparés doivent être dans un état non-factorisable (état intriqué) analogue à (1) (ou à l'état singulet dans le cas de deux spin $1/2$).
- Pour chaque sous-système, il doit être possible de choisir la quantité mesurée parmi au moins deux observables qui ne commutent pas (comme par exemple des mesures de polarisation suivant deux directions a and a' , qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires).

Mais dans de telles situations, nous avons vu que le conflit n'existe que pour des quantités bien choisies (jeux d'orientations particuliers). Comme on le voit sur la figure 5, il y a beaucoup d'orientations pour lesquelles les prédictions quantiques ne violent pas les inégalités de Bell.

Les physiciens se rendirent compte en 1965 qu'il n'existait aucun résultat expérimental mettant en évidence une violation des inégalités de Bell. Comme ces inégalités sont obtenues à partir d'hypothèses extrêmement raisonnables, on pouvait imaginer que la violation des inégalités de Bell pointe du doigt une situation où la mécanique quantique est en défaut. Il était donc tentant de concevoir et réaliser une *expérience sensible*, c'est-à-dire une expérience où les prédictions de la mécanique quantique violent de façon non ambiguë les inégalités de Bell. Une telle expérience devrait trancher de façon claire entre la mécanique quantique et les théories à paramètres supplémentaires obéissant à la condition de localité de Bell.

7.3 Source de paires de photons EPR

Dans leur article, C.H.S.H. [7] remarquèrent que les paires de photons émises dans certaines cascades radiatives atomiques sont de bons candidats pour un test sensible. Considérons par exemple une cascade atomique $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$ (figure 6). Supposons que nous sélectionnions, avec des filtres en longueur d'onde et des collimateurs, deux ondes planes de fréquences ν_1 et ν_2 se propageant dans des directions opposées suivant l'axe Oz (figure 7).

On peut montrer, en invoquant les conservations de la parité et du moment cinétique, que la polarisation de la paire (ν_1, ν_2) est décrite par le vecteur d'état :

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|R, R\rangle + |L, L\rangle] \quad (29)$$

où $|R\rangle$ et $|L\rangle$ sont des états de polarisation circulaire droite et gauche. En décomposant $|R\rangle$ et $|L\rangle$ sur une base de polarisation linéaire, on obtient finalement l'état (1)

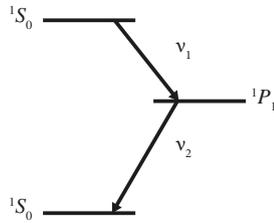


Figure 6. Cascade radiative émettant des paires de photons corrélés en polarisation.

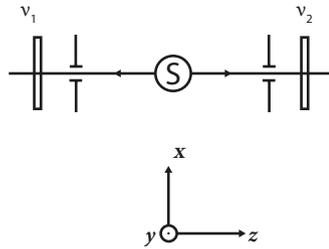


Figure 7. Configuration idéale (angles de détection infinitésimaux).

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |x, x\rangle + |y, y\rangle \}$$

Avec cet état EPR il est possible d’envisager une expérience sensible.

7.4 Expérience réaliste

Une expérience réelle diffère de l’expérience idéale à plusieurs égards. Par exemple la lumière est collectée dans un angle fini $2u$, aussi grand que possible (figure 8). Dans cette situation, on peut montrer [14] que le contraste de la fonction de corrélation décroît, et l’équation (6) est remplacée par :

$$E_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F(u) \cdot \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{30}$$

Où $F(u) \leq 1$

La figure 9 montre $F(u)$ pour une cascade radiative $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$ (atome alcalino-terreux sans structure hyperfine). On voit qu’il est possible d’utiliser de grands angles de corrélation sans perte notable. Ainsi pour $u = 32^\circ$ (nos expériences), on a $F(u) = 0,984$.

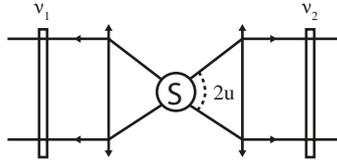


Figure 8. Configuration réaliste (angles de détection finis).

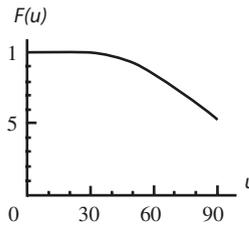


Figure 9. Facteur de réduction $F(u)$ pour une cascade $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$.

Tous les défauts expérimentaux (inefficacité des polariseurs, biréfringence fortuite, etc...) vont de façon analogue conduire à une diminution du contraste de la fonction de corrélation $E(a,b)$. La fonction $S_{QM}(\theta)$ (figure 5) est donc multipliée par un facteur inférieur à 1 et le conflit avec les inégalités de Bell diminue, et peut même disparaître. On voit donc qu'une expérience réelle doit être conçue très soigneusement, et que tout effet annexe doit être évalué. Tous les paramètres importants doivent être contrôlés parfaitement car on peut imaginer qu'un effet oublié serait susceptible lui aussi de conduire à une diminution ou une disparition du conflit. Par exemple, on sait que la présence d'une structure hyperfine réduit considérablement $F(u)$, de telle sorte qu'il faut se limiter à des isotopes sans structure hyperfine [14].

7.5 Conditions temporelles

Nous avons indiqué dans la partie 6, que la condition de localité de Bell pouvait être considérée comme une conséquence de la causalité d'Einstein, si l'expérience remplit les conditions suivantes :

1. Les mesures distantes sur les deux sous-systèmes doivent être *séparées par intervalle du genre espace*.
2. Les choix entre les quantités mesurées sur les deux sous-systèmes séparés doivent être effectués aléatoirement, et être *séparés par un intervalle du genre espace*.

La seconde condition est manifestement plus difficile à remplir.

8. Expériences de première génération

L'article C.H.S.H. [7], publié en 1969, montrait la possibilité d'expériences sensibles, avec des photons corrélés produits dans certaines cascades radiatives atomiques. Deux groupes lancèrent des expériences, une à Berkley, une à Harvard. Leurs résultats étaient contradictoires, et une troisième expérience fut montée à College Station (Texas). Ces trois expériences utilisaient un schéma expérimental simplifié, notablement différent du schéma réel car il utilisait des polariseurs à une voie.

8.1 Expérience avec des polariseurs à une voie

Dans le schéma expérimental simplifié, on utilise des polariseurs qui transmettent la lumière polarisée parallèlement à \mathbf{a} (ou \mathbf{b}), mais qui absorbent la polarisation orthogonale. Par rapport au schéma de la Figure 1, on détecte donc seulement les résultats $+$, et les mesures de coïncidence fournissent seulement le taux de coïncidence $N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ entre les voies $+$. Pour compléter aux données manquantes, on effectue des mesures complémentaires dans lesquelles un polariseur, ou l'autre, ou les deux sont effacés (par convention on note ∞ la situation où un polariseur est effacé). Nous pouvons écrire des relations entre les taux de coïncidences mesurés $N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $N_{++}(\mathbf{a}, \infty)$ et $N_{++}(\infty, \mathbf{b})$ et des taux de coïncidence non mesurés :

$$\begin{aligned} N_{++}(\infty, \infty) &= N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ N_{++}(\mathbf{a}, \infty) &= N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ N_{++}(\infty, \mathbf{b}) &= N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (31)$$

En substituant ces relations dans l'expression (28) du coefficient de corrélation de polarisation, et dans les inégalités (21), on peut éliminer toutes les quantités non mesurées et obtenir de nouvelles inégalités B.C.H.S.H. :

$$-1 \leq S' \leq 0 \quad (32)$$

où la quantité S'

$$S' = \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - N(\mathbf{a}', \infty) - N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} \quad (33)$$

s'exprime en fonction des seuls taux de coïncidence mesurée (nous avons omis les indices implicites $++$ dans l'expression ci-dessus).

Pour les jeux d'orientation indiqués sur la figure 4, les prédictions de la mécanique quantique violent les inégalités de Bell (32), puisqu'elles donnent :

$$\begin{aligned} S_{QM}^{\prime Max} &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{pour } \theta = \pi/8 \\ S_{QM}^{\prime Min} &= \frac{-\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{pour } \theta = 3\pi/8 \end{aligned} \quad (34)$$

Il est donc possible de faire un test sensible avec des polariseurs à une voie.

Notons cependant que la démonstration des inégalités de Bell modifiées (32) nécessite une hypothèse supplémentaire. En effet, les efficacités de détection étant faibles, à cause des ouvertures angulaires finies et des faibles efficacités de détection des photons, les probabilités apparaissant dans l'expression de $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ doivent être redéfinies sur un ensemble restreint de paires, celles qui seraient détectées avec les polariseurs effacés. Cette procédure est valable seulement si on accepte une hypothèse raisonnable sur les détecteurs. Par exemple l'hypothèse de C.H.S.H. [7] admet que « pour une paire de photons émergeant du polariseur, la probabilité de détection en coïncidence est indépendante des orientations du polariseur » (ou du fait qu'ils sont effacés). Clauser et Horne [10] ont discuté une autre hypothèse, conduisant aux mêmes inégalités. Le statut de ces hypothèses est discuté de façon approfondie dans la référence [15].

8.2 Résultats

Dans l'expérience de Berkeley [16], Clauser et Freedman construisirent une source où des atomes de calcium étaient excités par ultraviolet vers des états atomiques élevés. Parmi les diverses possibilités d'excitation, l'atome avait une certaine probabilité d'émettre une paire de photons verts ou violets (cascade radiative) ($4p^2 \ ^1S_0 \rightarrow 4s4p \ ^1P_1 \rightarrow 4s^2 \ ^1S_0$). Dans cette expérience, le signal était particulièrement faible. De nombreuses cascades radiatives différentes de celles intéressantes se produisaient, et il fallut plus de 200 heures de mesures pour obtenir un résultat statistiquement significatif. Ce résultat fut trouvé en accord avec la mécanique quantique, et une violation des inégalités de Bell (32) fut observée (par 5 écarts type).

A la même époque, à Harvard, Holt et Pipkin [17] trouvèrent un résultat en désaccord avec la mécanique quantique et en accord avec les inégalités de Bell. Leur source de paires de photons corrélés reposait sur la cascade radiative $9^1 P_1 \rightarrow 7^3 P_1 \rightarrow 6^3 P_0$ du mercure (isotope 200) excitée par bombardement électronique. Les données furent accumulées pendant 150 heures. Le même schéma expérimental fut repris quelques années plus tard par Clauser avec l'isotope 202 du mercure. Il trouva un résultat en accord avec la mécanique quantique conduisant à une violation significative des inégalités de Bell [18].

En 1976, à Texas A&M, Fry et Thompson [19] construisirent une source de photons corrélés nettement plus efficace, basée sur la cascade radiative $7^3 S_1 \rightarrow 6^3 P_1 \rightarrow 6^3 S_0$ du mercure 200. Ces auteurs pouvaient exciter sélectivement le niveau supérieur de la cascade, grâce à l'utilisation d'un laser continu monomode accordable (instrument exceptionnel à l'époque). Le signal était plus grand de plusieurs ordres de grandeurs, par rapport aux expériences précédentes, et il suffisait de 80 minutes d'accumulation de données pour obtenir des résultats significatifs. Ces résultats étaient en excellent accord avec la mécanique quantique, et on trouva une violation des inégalités de Bell (32) de quelques écarts types.

9. Les expériences d'Orsay (1980-1982) [13]

9.1 Source de photons corrélés

Dès le début de notre programme en 1975, notre but était de mettre en place des schémas expérimentaux plus sophistiqués que les précédents [12], et nous avons d'abord consacré de gros efforts au développement d'une source bien contrôlée de photons corrélés, de haute efficacité, et très stable. Ce résultat a été obtenu (figure 10) par une excitation sélective à deux photons [20] de la cascade radiative $4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1 \rightarrow 4s^2\ ^1S_0$ du calcium déjà utilisée par Clauser et Freedman. Cette cascade est très bien adaptée aux exigences des mesures en coïncidence, car la durée de vie τ , du niveau intermédiaire est relativement courte (5 ns). S'il est possible d'atteindre un taux d'excitation de l'ordre de $1/\tau$, on obtient un rapport signal-bruit optimal pour les mesures en coïncidence effectuées sur cette cascade.

Nous avons été capables d'atteindre ce taux optimal en utilisant deux lasers : un laser à krypton ($\lambda_K = 406$ nm) et un laser accordable ($\lambda_D = 581$ nm) réglés exactement à résonance pour le processeur à deux photons. Les deux lasers étaient monomodes. Ils étaient focalisés sur un jet atomique de calcium (sur environ 50 μm). Deux boucles d'asservissement permettaient d'obtenir une excellente stabilité de la source (meilleure que 0.5 % pendant plusieurs heures) : la première boucle contrôle la longueur d'onde du laser accordable pour maximiser le signal de fluorescence ; la deuxième boucle contrôle l'angle entre les polarisations des lasers, ce qui permet d'ajuster le taux d'excitation pour compenser les fluctuations du taux d'émission des paires de photons. Il était possible avec quelques dizaines de milliwatts de chaque laser, d'obtenir un taux de cascades de $N = 4 \times 10^7\ \text{s}^{-1}$. Une augmentation de ce taux au-delà de cette valeur n'aurait pas amélioré le rapport signal-bruit des comptages en coïncidence, car le taux des coïncidences fortuites croît comme N^2 , tandis que le taux des coïncidences vraies croît comme N . Avec ce taux de cascade, le taux de coïncidence détecté avec des polariseurs parallèles était d'environ $10^2\ \text{s}^{-1}$, beaucoup plus grand que dans les expériences précédentes. Il était alors possible d'obtenir une précision statistique de 1 % pour une durée de mesure 100 secondes seulement.

9.2 Détection – Comptage en coïncidence

La lumière de fluorescence était collectée par deux lentilles asphériques de grande ouverture (demi angle $u = 32^\circ$, suivant la définition de la figure 8). Dans chaque voie de détection se trouvaient un filtre interférentiel (respectivement à 551,3 nm et 422,7 nm), un système de transport optique, un polariseur, et un tube photomultiplicateur. Les sorties des photomultiplicateurs étaient connectées à une électronique de comptage en coïncidence, comportant un convertisseur temps-amplitude et un analyseur multicanal. On obtient ainsi le « spectre temps » des détections en coïncidence (figure 11). Ce spectre comporte un fonds plat dû aux coïncidences fortuites (entre deux photons émis par des atomes distincts), tandis que les coïncidences vraies (entre les photons émis par le même atome) apparaissent comme un pic montant brutalement à l'origine, et décroissant exponentiellement avec une constante de temps $\tau_c = 5$ ns (durée de vie du niveau intermédiaire de la cascade). Le signal de coïncidence vrai est l'aire de ce pic.

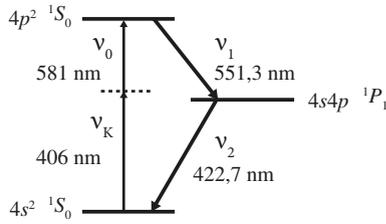


Figure 10. Excitation sélective à deux photons de la cascade radiative du calcium fournissant des paires de photons corrélés.

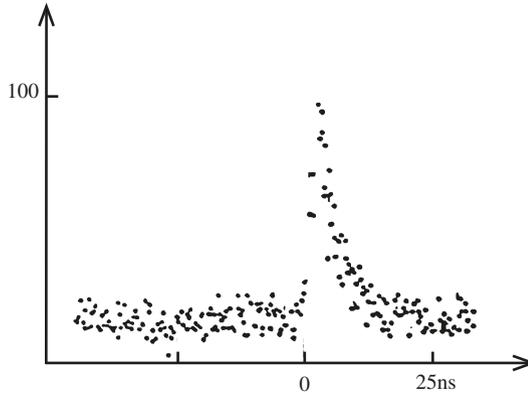


Figure 11. Spectre temps : nombre de paires détectées en fonction du retard entre les instants de détection des deux photons.

En parallèle un circuit de coïncidence standard, ayant une fenêtre de coïncidence de 19 ns, enregistre le taux de coïncidences autour du retard nul, tandis qu'un deuxième circuit avec un grand retard sur l'une des voies d'entrée enregistre le taux de coïncidences fortuites. Il est alors possible de vérifier que le taux de coïncidences obtenu par soustraction est égal à l'aire du pic du spectre-temps.

Dans les deuxième et troisième séries d'expériences décrites ci-dessous, nous avons utilisé un quadruple système de coïncidence, comportant un quadruple analyseur multi-canaux et quatre doubles circuits de coïncidence standards. L'ensemble des données était collecté et traité automatiquement par ordinateur.

9.3 Expérience avec polariseurs à une voie [21]

Nos premières expériences furent réalisées avec des polariseurs à une voie. Il s'agissait de polariseurs à « pile de glace », comportant dix lames de verre de qualité optique à l'angle de Brewster, montées dans une mécanique de précision garantissant une excellente invariance par rotation. Pour de la lumière parfaitement polarisée, les transmissions maximale et minimale de ces polariseurs à une voie valaient respectivement $0,975 \pm 0,005$ et $0,030 \pm 0,005$.

Grâce à notre source de haute efficacité, les incertitudes statistiques étaient de l'ordre de 1% dans chaque acquisition de 100 s. Ceci nous permit de réaliser de nombreux tests statistiques et vérifications expérimentales, par exemple sur l'invariance par rotation des signaux (pour toutes ces mesures, la stabilité à long terme de la source, de l'ordre de 0.5%, se révéla cruciale).

Un test direct des inégalités de Bell (32) adapté au cas des polariseurs à une voie, fut réalisé, on trouva pour la quantité S' (équation 33)

$$S'_{\text{exp}} = 0.126 \pm 0.014 \quad (35)$$

Ce résultat viole les inégalités (32) par 9 écarts type, et il est en bon accord avec les prédictions quantiques prenant en compte l'efficacité finie de nos polariseurs et l'ouverture des lentilles :

$$S'_{QM} = 0.118 \pm 0.005 \quad (36)$$

L'incertitude indiquée dans S'_{QM} tient compte de l'incertitude sur les mesures des coefficients de transmission des polariseurs.

L'accord entre les données expérimentales et les prédictions de la mécanique quantique a pu être vérifié dans un intervalle d'orientations de 360° (figure 12).

Ces expériences furent répétées avec des polariseurs éloignés de la source, chacun à une distance de 6,5 m. A une telle distance (4 longueurs de cohérence associées à la durée de vie t .) les *détections sont des événements séparés par un intervalle du genre espace*, et nous remplissons donc la première condition temporelle indiquée au paragraphe 7.5. Dans cette nouvelle configuration, on n'a observé aucune modification des taux de coïncidence, et on a trouvé une violation des inégalités de Bell par la même quantité.

9.4 Expérience avec polariseurs à deux voies [22-24]

Avec des polariseurs à une seule voie, les mesures de polarisation sont par nature incomplètes. Lorsqu'une paire a été émise et qu'aucune détection n'est observée à l'un des

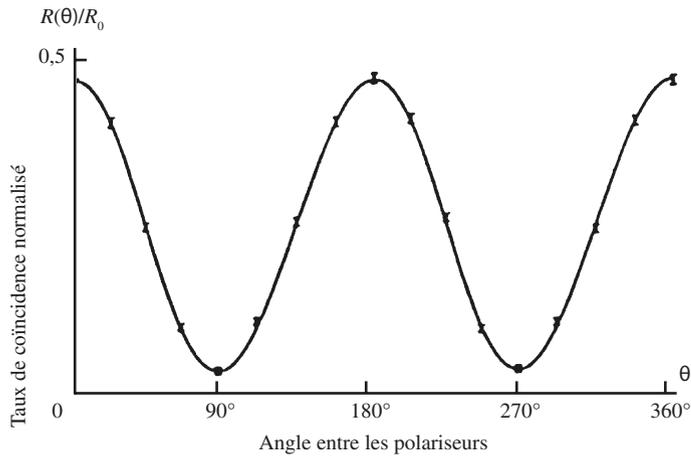


Figure 12. Expérience avec polariseurs à une voie. On indique le taux normalisé de coïncidences en fonction de l'orientation relative des polariseurs. Les incertitudes indiquées sont ± 1 écart type. La courbe obtenue n'est pas un ajustement aux données, mais la prédiction de la mécanique quantique sans aucun paramètre ajustable.

détecteurs, il n'y a aucun moyen de savoir si la détection a été manquée par le détecteur ou si le photon a été arrêté par le polariseur (ce dernier cas correspondant à un résultat - pour la mesure). C'est pourquoi il faut utiliser des expériences auxiliaires, et un raisonnement indirect utilisant des hypothèses supplémentaires, pour pouvoir réaliser un test des inégalités de Bell adapté aux polariseurs à une seule voie.

Avec des polariseurs à deux voies, il devient possible de suivre beaucoup plus étroitement le schéma idéal de la figure 1 [22, 23, 25]. Nous avons mené à bien une telle expérience, en utilisant des cubes polariseurs basés sur des multicouches diélectriques qui transmettent une polarisation et qui réfléchissent la polarisation orthogonale. Un séparateur de polarisation de ce type et deux photomultiplicateurs placés dans les deux voies de sortie, sont fixés dans une monture orientable. L'ensemble est un polarimètre qui fournit le résultat + ou le résultat - pour une mesure de polarisation linéaire suivant la direction choisie par l'expérimentateur. Il s'agit d'un analogue optique d'un analyseur de Stern-Gerlach pour une particule à spin 1/2.

A l'aide de deux polarimètres *I* et *II* orientés suivant **a** et **b**, et grâce à un quadruple système de comptage en coïncidence, nous sommes capables de mesurer en une seule période d'acquisition les quatre taux de coïncidence $N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, et d'en déduire directement le coefficient de corrélation de polarisation $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (cf. équation 28). Il est alors suffisant de refaire une mesure analogue pour trois autres orientations, et les inégalités de Bell (20) peuvent être testées directement.

Ce schéma expérimental est beaucoup plus proche du schéma idéal de la figure 1 que les expériences précédentes avec des polariseurs à une voie, et en particulier il n'est pas nécessaire d'invoquer certaines hypothèses supplémentaires sur les détecteurs. Cependant, il faut noter que l'on est loin de détecter tous les photons, car l'efficacité de détection dans chaque voie est très inférieure à l'unité, d'abord à cause de l'angle solide de détection, et ensuite à cause du rendement quantique du photomultiplicateur. Un avocat des théories variables cachées pourrait alors soutenir que nous ne sommes pas sûrs que l'échantillon sur lequel porte la mesure reste le même lorsqu'on change les orientations. En toute logique, pour pouvoir confronter les mesures aux inégalités de Bell, il faut donc une hypothèse supplémentaire : on doit supposer que l'ensemble des paires effectivement détectées est indépendant de l'orientation des polariseurs.

Cette hypothèse est très raisonnable dans notre schéma expérimental symétrique, où les deux canaux de sorties d'un polariseur sont traitées sur le même pied (les efficacités de détection dans les deux canaux d'un polarimètre sont égales). De plus, nous avons vérifié expérimentalement que la somme des quatre taux de coïncidence $N_{\pm\pm}(a,b)$ reste constante lorsque les orientations changent, et ceci alors que chaque taux de coïncidence individuel est modulé à 100% : ceci prouve que la taille de l'échantillon sélectionné est constante. Evidemment, cela ne démontre pas de façon irréfutable la validité de l'hypothèse, mais au moins ces résultats ne contredisent pas cette hypothèse. Notons que l'on peut invoquer une hypothèse plus forte, mais plus facile à présenter : il s'agit de « l'hypothèse d'échantillonnage non biaisé », qui consiste à admettre que l'ensemble des paires détectées est un échantillon non biaisé représentatif de l'ensemble de toutes les paires émises. L'hypothèse envisagée plus haut est manifestement une conséquence de cette hypothèse plus forte.

Nous avons fait l'expérience décrite ci-dessus, dans les orientations de la figure 4a, pour lesquelles on prédit un conflit maximal. Nous avons trouvé

$$S_{\text{exp}} = 2.697 \pm 0.015 \quad (37)$$

ce qui viole les inégalités (21) ($|S| \leq 2$) par plus de 40 écarts type. Notons de plus que le résultat est en parfait accord avec les prédictions de la mécanique quantique qui sont, compte tenu des imperfections des polariseurs et de l'ouverture des lentilles :

$$S_{QM} = 2.70 \pm 0.05 \quad (38)$$

L'incertitude indiquée sur S_{QM} prend en compte une très légère dissymétrie des deux voies de sortie d'un polariseur ($\pm 1\%$). Nous avons calculé l'effet de ces dissymétries qui ne peuvent pas donner une variation de S_{QM} supérieure à 2 %.

Nous avons répété les mesures des coefficients de corrélation de polarisation $E(a,b)$ à diverses orientations, et effectué une comparaison directe avec les prédictions de la mécanique quantique (figure 13). L'accord est manifestement excellent.

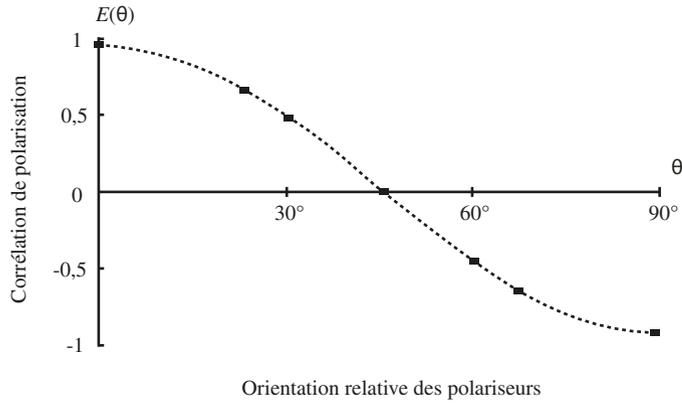


Figure 13. Expérience avec polarisateurs à deux voies. Coefficient de corrélation de polarisation en fonction des orientations relatives des polarimètres. Les incertitudes portées sur la figure sont de ± 2 écarts type. La courbe en pointillé n'est pas un ajustement aux données mais représente les prédictions de la mécanique quantique pour l'expérience réelle. Si l'expérience était parfaite, la courbe atteindrait les valeurs ± 1 . On constate que l'expérience réelle est très voisine de l'expérience idéale.

9.5 Expérience avec polariseurs variables [26]

Comme nous l'avons souligné dans les parties 6 et 7.5, un test idéal des inégalités de Bell devrait offrir la possibilité d'un changement des orientations des polariseurs à des instants aléatoires [12]. Alors la condition de localité de Bell deviendrait une conséquence de la causalité d'Einstein. En 1982, nous avons fait un premier pas vers une telle expérience idéale en utilisant le schéma modifié indiqué sur la figure 14.

Chaque polariseur (à une seule voie) est remplacé par un système comportant un commutateur suivi de deux polariseurs dans deux orientations : \mathbf{a} et \mathbf{a}' du côté I, \mathbf{b} et \mathbf{b}' du côté II. Chaque commutateur (aiguillage optique) est capable de diriger la lumière incidente soit vers un polariseur, soit vers l'autre, avec un temps de basculement très bref. Chaque dispositif est donc équivalent à un polariseur variable basculant d'une orientation à l'autre. Dans notre expérience, la distance L entre les deux commutateurs vaut 13 m, et L/c vaut 43 ns.

Le basculement de la lumière s'effectue par interaction acousto-optique avec une onde stationnaire ultrasonique dans de l'eau. L'angle d'incidence (angle de Bragg) et la puissance acoustique sont réglés pour un basculement total entre les ordres de diffraction 0 et 1. La fonction de commutation est donc de la forme $\sin^2(\pi/2 \cos \Omega_a t)$, la fréquence acoustique $\Omega_a/2\pi$ étant de l'ordre de 25 MHz. Les changements d'orientation équivalents se produisent donc au bout d'intervalles de temps de 6,7 ns et 13,3 ns. Comme ces intervalles entre deux commutations, aussi bien que l'intervalle de temps séparant les émissions des deux photons d'une même paire (valeur moyenne $\tau_r = 5$ ns), sont petits devant L/c (43 ns), l'événement constitué par la détection d'un côté est séparé par un intervalle du genre espace de l'événement

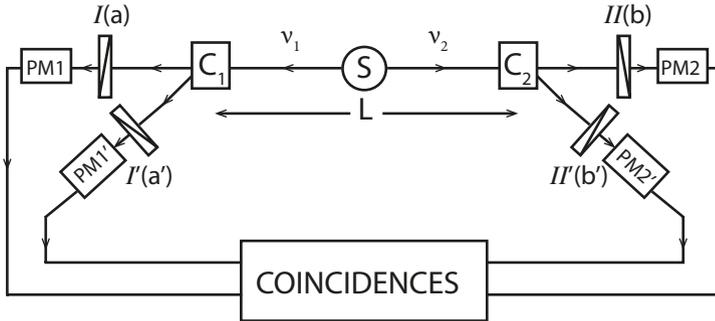


Figure 14. Expérience avec polariseurs variables. Le commutateur C_1 dirige les photons ν_1 soit vers le polariseur I soit vers I' , dans les orientations a et a' . De même le commutateur C_2 dirige les photons ν_2 soit vers le polariseur II soit vers II' , dans les orientations b et b' . Les deux commutateurs sont pilotés par des générateurs indépendants. Les intervalles de temps entre les commutations sont respectivement de 6,7 ns et 13,3 ns.

associé au changement d'orientation correspondant de l'autre côté. La deuxième condition temporelle de la partie 5 est vérifiée, au moins partiellement. Nous notons en effet que la commutation était quasi périodique et non totalement aléatoire (voir discussion ci-dessous).

En fait, cette expérience de 1982 avec des polariseurs variables était loin d'être parfaite sur plusieurs autres points. D'abord, afin d'adapter les faisceaux de photons aux commutateurs, nous avons dû réduire leur taille par un facteur 3, entraînant une diminution du taux de coïncidence d'un ordre de grandeur. Dans ces conditions, pour obtenir une précision statistique suffisante, la durée de l'accumulation des données devait être notamment plus longue, et des problèmes de dérive sont apparus. Il a donc fallu effectuer des moyennes des diverses quantités mesurées.

Par ailleurs, pour des faisceaux qui ne sont pas parfaitement collimatés, le contraste de la fonction de commutation n'est pas de 100%, car l'angle d'incidence n'est pas exactement l'angle de Bragg pour tous les rayons. Dans notre expérience, le minimum de la fonction de commutation dans chaque canal valait 20% (au lieu de 0 dans le cas idéal).

Notons enfin que dans cette expérience nous avons utilisé des polariseurs à une seule voie; ce qui nous a permis de réaliser ces mesures avec le même système de coïncidence quadruple que l'expérience statique décrite au paragraphe 9.4.

Malgré toutes ces imperfections, cette expérience avec des polariseurs variables était la première à tester la non séparabilité quantique au sens d'Einstein. Le test des inégalités de Bell proprement dit porte sur des données accumulées pendant 8000 s avec 4 polariseurs dans les orientations de la figure 4.a. Par ailleurs, un total de 16 000 s était consacré à des mesures avec une partie ou la totalité des polariseurs effacés. A cause des effets de dérives systématiques, les mesures étaient alternées toutes les 400 s entre les diverses orientations, et le résultat total résulte donc d'une moyenne. Nous avons ainsi obtenu

$$S'_{\text{exp}} = 0.101 \pm 0.020 \quad (39)$$

ce qui viole la limite supérieure des inégalités de Bell (32) par 5 écarts type. Notons que ce résultat est en bon accord avec la prédiction quantique pour l'expérience réelle :

$$S'_{QM} = 0.113 \pm 0.005 \quad (40)$$

Nous avons effectué d'autres mesures des taux de coïncidences en fonction de l'orientation relative des polariseurs. La figure 15 montre que ces résultats sont en excellent accord avec la prédiction quantique.

A la lumière de ces résultats expérimentaux, les théories à paramètres supplémentaires obéissant à la causalité d'Einstein (théories à variables cachées séparables) semblent devoir être rejetées. Néanmoins, comme nous l'avons déjà mentionné, notre expérience est loin d'être idéale sur plusieurs points, et il reste plusieurs échappatoires pour un avocat des théories à variables cachées. D'abord, étant donné que nous utilisons des polariseurs à une seule voie, l'expérience n'est significative que si l'on accepte des versions fortes de l'hypothèse d'échantillonnages non biaisés. Quant au caractère temporel de cette expérience, un avocat des théories à variables cachées peut tirer argument du fait que le commutateur n'était pas total. Notons cependant qu'une proportion élevée des paires (80%) subit la commutation forcée. Si les inégalités de Bell s'appliquaient à ces paires, tandis que les autres suivraient les prédictions quantiques, on aurait dû observer une différence notable entre les résultats expérimentaux et les prédictions quantiques.

Le point le plus important, relatif au caractère temporel, est le fait que les commutateurs n'étaient pas réellement aléatoires, puisque les commutateurs acousto-optiques étaient pilotés par des générateurs périodiques. Notons néanmoins que les deux générateurs pilotant les deux commutateurs étaient totalement indépendants, et opéraient à des fréquences différentes (23,1 MHz et 24,2 MHz), avec des dérives en fréquence non corrélées. Notons en outre, qu'il existe un caractère aléatoire de l'intervalle de temps entre l'émission des 2 photons d'une seule paire (distribution exponentielle de constante de temps $\tau_r = 5$ ns, comme on le voit sur la figure 11), ce qui ajoute un caractère aléatoire aux instants de détection associés à l'un ou l'autre polariseur.

En conclusion, cette expérience qui est restée jusqu'en 1998 la seule mettant en jeu des modifications rapides des orientations des polariseurs, avait suffisamment d'imperfections pour ne pas exclure certains modèles à paramètres supplémentaires ad hoc respectant la causalité d'Einstein. Notons néanmoins que plusieurs modèles de ce type peuvent être éliminés par l'ensemble des résultats expérimentaux, qui sont non seulement la valeur de S' indiquée en (39), mais aussi de nombreuses autres données et en particulier des *spectres temps qui ne montrent aucun accident observable sur la décroissance exponentielle* ; si les résultats de mesure étaient différents suivant qu'ils sont séparés par un intervalle du genre temps ou espace, cela aurait dû se traduire par un accident sur les spectres temps.

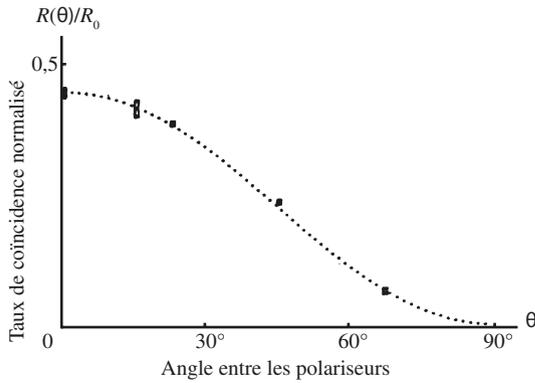


Figure 15. Expérience avec commutateur optique : taux de coïncidence normalisés en fonction de l'orientation relative des polariseurs. Les incertitudes indiquées sont de ± 1 écart type. La courbe en pointillés n'est pas un ajustement mais représente les prédictions de la mécanique quantique pour l'expérience réelle.

10. Expérience de troisième génération : paire de photons produite par division paramétrique

Comme nous l'avons déjà souligné, la cascade radiative du calcium utilisée dans nos expériences était excitée à un taux optimal au-delà duquel on ne peut plus améliorer le rapport signal à bruit. Sachant que cette cascade était a priori très favorable (à cause de la très courte durée de vie dans l'état intermédiaire), il ne restait guère de possibilités d'amélioration avec des sources utilisant des cascades radiatives atomiques [27].

Vers la fin des années 80, un nouveau type de source de paires de photons corrélés a été développé simultanément par deux groupes [28, 29]. Dans ces sources, une paire de photons rouges est produite par division paramétrique d'un photon ultraviolet. Du fait de la condition d'accord de phase dans le cristal non linéaire utilisé, il y a une corrélation forte entre les directions d'émission des 2 photons d'une même paire et l'on peut donc en principe, par un filtrage spatial adapté, capturer avec certitude les 2 photons d'une même paire. Les taux de détection simple ou en coïncidence sont alors du même ordre de grandeur (au rendement quantique de détection près). Ceci est un progrès notable par rapport aux cascades radiatives atomiques dans lesquelles les deux photons d'une même paire sont émis dans des directions très peu corrélées [14] : le taux de coïncidences est a priori dans ce cas $\Omega/4\pi$ fois plus faible que le taux de détection simple (ici encore au rendement quantique de détection près). Le nouveau schéma permet de s'affranchir de ce facteur de réduction et ceci a des conséquences importantes, à la fois pratiques et fondamentales. Sur le plan pratique, on peut obtenir des taux de coïncidence beaucoup plus élevés : dans le cas le plus favorable [30] le taux de coïncidence est supérieur de plus d'un ordre de grandeur à celui observé dans nos meilleures expériences. De plus, les photons sont produits dans des faisceaux de petite étendue (petit nombre de Fresnel). De tels faisceaux peuvent être facilement injectés dans des composants optiques de petite taille, et même dans des fibres optiques, ce qui ouvre de nombreuses possibilités nouvelles.

Ces nouvelles sources peuvent produire des paires de photons corrélés en polarisation [28-31], dans des états analogues à celui décrit par l'équation (1). Mais on peut aussi produire des états intriqués donnant lieu à des corrélations EPR entre des observables autres que la polarisation. Une situation intéressante [32] porte sur des paires de photons dont les membres sont émis « à deux instants différents ». Dans ce cas, l'observable pertinente est l'instant d'émission des photons. Plusieurs expériences ont été réalisées avec ce schéma [33-35]. Notons qu'un tel schéma expérimental, où la polarisation n'est pas l'observable mesurée, est particulièrement intéressant pour des expériences avec des fibres optiques, où le contrôle de la polarisation est un point particulièrement délicat. Une autre expérience intéressante utilise comme observable les directions d'émission des photons [36] : chaque photon d'une paire implique la superposition de deux directions d'émission différentes, respectivement corrélés aux deux directions d'émission du second photon. Une expérience de ce type a été réalisée [37].

Comme le souligne la référence Horn *et al.* [37], toutes ces expériences peuvent être présentées dans le cadre général des « interférences à deux particules » : effectivement, les probabilités conjointes des résultats de mesure se présentent comme le carré de la somme de deux amplitudes (chacune de ces amplitudes implique les deux photons), dont la phase relative peut être contrôlée expérimentalement. En fait, le schéma original EPR est un exemple très clair de cette situation. Par exemple, dans la version présentée au paragraphe 2, l'état (1) peut être réécrit (cf. équation 29) comme la superposition d'un état $|L, L\rangle$ où les deux photons ont une hélicité gauche et d'un état $|R, R\rangle$ où les deux photons ont une hélicité droite. Pour chacun de ces deux états, l'amplitude quantique associée à la détection conjointe dans un couple donné de canaux de sortie (voir la figure 1), a une phase qui dépend de l'orientation relative des polariseurs. L'addition des amplitudes associées respectivement à $|L, L\rangle$ et $|R, R\rangle$ conduit donc à une interférence responsable des variations sinusoïdales de la probabilité conjointe (cf. équation 3).

Ces nouvelles sources et ces nouveaux schémas ont conduit à une série de tests des inégalités de Bell *qui ont tous confirmé la mécanique quantique*. Des violations non ambiguës des inégalités de Bell ont été observées, sous l'hypothèse de l'échantillonnage non biaisé. Notons en particulier une violation des inégalités de Bell par 100 écarts type dans une expérience durant seulement quelques minutes [30].

On peut citer une série d'expériences mettant en jeu des fibres optiques, avec des bras de plus en plus longs entre source et détecteurs. Ainsi, une violation claire des inégalités de Bell a été observée alors qu'un des bras de l'appareil était constitué d'une fibre optique de 4 km de long [34]. Puis, les corrélations EPR ont été observées avec des photons se propageant dans plusieurs dizaines de kilomètres de fibres optiques pour télécommunications [38]. Mais surtout, ces expériences à fibres optiques ont ouvert la voie à une expérience avec polariseurs variables (paragraphe 7.5 et 9.5), quasiment idéale.

Cette expérience [39] a complètement pris en compte les conditions temporelles relativistes du paragraphe 7.5. Rappelons que dans le schéma idéal [12], il faut des polariseurs dont les orientations puissent être modifiées à des instants aléatoires avec un temps caractéristique de changement d'orientation plus court que le temps de propagation de la lumière L/c entre les deux polariseurs. Avec les nouveaux schémas utilisant les fibres

optiques, il est devenu possible de travailler avec des systèmes électrooptiques intégrés, à des distances de la source correspondant à des temps de propagation de plusieurs microsecondes. On peut alors, *pendant ce temps propagation*, effectuer un tirage aléatoire de l'orientation du polariseur, puis positionner la direction d'analyse suivant la direction choisie [39]. Ultime raffinement de cette expérience, les coïncidences ne seront dépouillées qu'après la fin de la période d'acquisition. Pendant l'acquisition proprement dite, on « se contente » en effet d'enregistrer à chaque polariseur l'ensemble des paramètres de chaque événement détecté : orientation du polariseur, résultat obtenu, instant de détection (mesuré avec une horloge atomique). C'est la comparaison a posteriori des événements détectés aux deux extrémités qui permet de déterminer les corrélations. Le résultat a confirmé sans ambiguïté la violation des inégalités de Bell, et donné un remarquable accord avec les prévisions quantiques.

A cause de la corrélation quasi parfaite entre les directions d'émission des photons, cette troisième génération d'expériences devrait également permettre de fermer l'échappatoire liée aux faibles efficacités de détection, lorsque des détecteurs avec des efficacités quantiques de l'ordre de l'unité deviendront disponibles, ce qui ne devrait guère tarder⁵.

II. Conclusion

Nous avons donc aujourd'hui une quantité impressionnante de résultats obtenus dans des schémas expérimentaux sensibles et qui donnent des violations non ambiguës des inégalités de Bell. De plus, ces résultats sont en excellent accord avec des prédictions quantiques qui prennent en compte toutes les caractéristiques connues des expériences réelles. Bien que toutes les échappatoires n'aient pas encore été fermées, et donc que des expériences améliorées restent encore souhaitables, il est légitime de discuter les conséquences de la réjection des théories à paramètres supplémentaires obéissant à la causalité d'Einstein [40].

Il semble possible de conclure qu'il est possible d'observer dans la nature *la non localité quantique*, au sens expliqué aux paragraphes 5 et 6, et ceci sur des distances très grandes, à l'échelle du kilomètre. Notons cependant que cette non localité quantique est de nature très subtile, et par exemple qu'on ne peut pas l'utiliser pour une « télégraphie plus rapide que la lumière ». On peut en effet montrer [41] que dans un schéma où l'on voudrait utiliser les corrélations EPR pour envoyer un message, il serait nécessaire d'envoyer aussi une information classique complémentaire transitant par un canal classique. Aucun message utilisable n'est donc disponible avant le délai relativiste prescrit par la causalité d'Einstein. Cela rappelle les schémas de téléportation quantique [42], qui permettent de transporter un état quantique de façon non locale, mais en utilisant aussi une information classique passant par un canal classique. Il y a en fait beaucoup à apprendre, et à comprendre, sur la non localité quantique, par une analyse approfondie des schémas de téléportation quantique [43].

(5) De telles expériences ont effectivement été menées à bien en 2015, voir par exemple : Alain Aspect, Closing the door on the Einsteins and Bohr's Quantum Debate, *Physics* 8, 123 (2015). Available at URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/Physics.8.123> .

Chaque fois que l'on se replonge dans le problème que nous venons de présenter, on ne peut s'empêcher de se poser la question : *y a-t-il un problème réel ?* Il faut reconnaître que la réponse à cette question peut varier, même pour les plus grands physiciens. En 1963, R. Feynman donnait une première réponse à cette question dans son fameux cours de physique [44] : « *Ce point ne fut jamais accepté par Einstein... Il devint connu sous le nom de paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen. Mais lorsque la situation est décrite comme nous l'avons fait ici, il ne semble pas y avoir quelque paradoxe que ce soit...* »⁶. Deux décennies plus tard, Feynman exprimait une opinion radicalement différente [45], toujours sur la situation EPR : « *nous avons toujours eu une très grande difficulté à comprendre la vision du monde que la mécanique quantique implique ... Il ne m'est pas encore apparu évident qu'il n'y ait pas de problème réel... Je me suis toujours illusionné moi même, en confinant les difficultés de la mécanique quantique dans un recoin de plus en plus petit, et je me retrouve de plus en plus chagriné par ce point particulier. Il semble ridicule de pouvoir réduire ce point à une question numérique, le fait qu'une chose est plus grande qu'une autre chose. Mais voilà : – elle est plus grande ...* »⁷

Que rajouter ?

Références

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Review* **47**, 777 (1935).
See also Bohr's answer : N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete?* *Phys. Review* **48**, 696 (1935).
- [2] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, *Physics* **I**, 195 (1964).
- [3] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs (1951). Republished by Dover (1989).
- [4] D. Bohm and Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky*, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).
- [5] *Einstein philosopher scientist*, P.A. Schilp ed. (Open court and Cambridge university press, 1949).
- [6] *Correspondance* entre A. Einstein and M. Born (traduction française : Seuil, Paris, 1972).
- [7] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [8] B. d'Espagnat, *Use of inequalities for the experimental test of a general conception of the foundation of microphysics*, *Phys. Rev.* **D11**, 1424 (1975).
L. Hardy, *Quantum Mechanics, Local Realistic Theories, and Lorentz-Invariant Realistic Theories*, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2981 (1992).

(6) « *This point was never accepted by Einstein... It became known as the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. But when the situation is described as we have done it here, there doesn't seem to be any paradox at all...* » [44]

(7) « *We always have had a great deal of difficulty in understanding the world view that quantum mechanics represents... It has not yet become obvious to me that there is no real problem... I have entertained myself always by squeezing the difficulty of quantum mechanics into a smaller and smaller place, so as to get more and more worried about this particular item. It seems almost ridiculous that you can squeeze it to a numerical question that one thing is bigger than another. But there you are – It is bigger...* » [45].

- [9] J.S. Bell, *Introduction to the Hidden-Variable Question*, in : « Foundations of Quantum Mechanics », B. d'Espagnat ed., Academic, N.Y. (1972).
- [10] J. F. Clauser and M. A. Horne, *Experimental consequences of objective local theories*, Phys. Rev. **D10**, 526 (1974).
- [11] Cette conclusion n'est pas partagée par tous les auteurs. Ainsi, on a pu écrire que les théories stochastiques à paramètres supplémentaires de Bell [9] ou de Clauser et Horne [10] ne sont pas vraiment plus générales, car on peut les reproduire (les simuler) par des théories déterministes : A. Fine, *Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **48**, 291 (1982).
- [12] A. Aspect, *Proposed Experiment to Test Separable Hidden-Variable Theories*, Phys. Lett. **54A**, 117 (1975).
A. Aspect, *Proposed Experiment to test the nonseparability of Quantum Mechanics*, Phys. Rev. **D14**, 1944 (1976).
- [13] A. Aspect, *Trois tests expérimentaux des inégalités de Bell par mesure de corrélation de polarisation de photons*, thèse d'Etat, Orsay (1983).
- [14] E.S. Fry, *Two-Photon Correlations in Atomic Transitions*, Phys. Rev. **A8**, 1219 (1973).
- [15] J.F. Clauser and A. Shimony, *Bell's Theorem : Experimental Tests and Implications*, Rep. Progr. Phys. **41**, 1881 (1978).
- [16] S.J. Freedman and J.F. Clauser, *Experimental test of local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [17] F.M. Pipkin, *Atomic Physics Tests of the Basics Concepts in Quantum Mechanics*, in : « Advances in Atomic and Molecular Physics », D.R. Bates and B. Bederson, ed., Academic (1978).
- [18] J.F. Clauser, *Experimental Investigation of a Polarization Correlation Anomaly*, Phys. Rev. Lett. **36**, 1223 (1976).
- [19] E.S. Fry, and R.C. Thompson, *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **37**, 465 (1976).
- [20] A. Aspect, C. Imbert, and G. Roger, *Absolute Measurement of an Atomic Cascade Rate Using a Two Photon Coincidence Technique. Application to the $4p^2S_0 - 4s4p\ ^1P_1 - 4s^2S_0$ Cascade of Calcium excited by a Two Photon Absorption*, Opt. Comm. **34**, 46 (1980).
- [21] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [22] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [23] P. Grangier, Thèse de troisième cycle, Orsay (1982).
- [24] A. Aspect and P. Grangier, *About Resonant Scattering and Other Hypothetical Effects in the Orsay Atomic-Cascade Experiment Tests of Bell Inequalities : A Discussion and some New Experimental Data*, Lett. Nuovo Cimento **43**, 345 (1985).

- [25] A. Garruccio and V. A. Rapisarda, *Bell's inequalities and the four-coincidence experiment*, Nuovo Cimento **A18**, 269 (1982).
- [26] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Variable Analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [27] W. Perrie, A. J. Duncan, H. J. Beyer, and H. Kleinpoppen, *Polarization Correlation of the Two Photons Emitted by Metastable Atomic Deuterium : A test of Bell's Inequality*, Phys. Rev. Lett. **54**, 1790 (1985) et **54**, 2647 (E). Although the statistical significance of the results was limited as a test of Bell's inequalities, this experiment was a remarkable « tour de force » in atomic physics.
- [28] Y. H. Shih and C. O. Alley, *New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion*, Phys. rev. Lett. **61**, 2921 (1988).
- [29] Z.Y. Ou and L. Mandel, *Violation of Bell's Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment*, Phys. Rev. Lett. **61**, 50 (1988).
- [30] P.G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon-Pairs*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).
Note that the reported violation of Bell's inequalities by 100 standard deviations relies on a stronger version of the « fair sampling hypothesis » than our second experiment (Section 9.4), since this experiment uses one channel polarizers and not two channel polarizers.
- [31] T.E. Kiess, Y.H. Shih, A.V. Sergienko, and C.O. Alley, *Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Type-II Parametric Down-Conversion*, **71**, 3893 (1993).
- [32] J.D. Franson, *Bell Inequality Position and Time*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2205 (1989).
- [33] J. Brendel, E. Mohler, and W. Martienssen, *Experimental Test of Bell's Inequality for Energy and Time*, Europhys. Lett. **20**, 575.
- [34] P.R. Tapster, J.G. Rarity, and P. C. M. Owens, *Violation of Bell's Inequality over 4 km of Optical Fiber*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1923 (1994).
- [35] W. Tittel, J. Brendel, T. Herzog, H. Zbinden and N. Gisin, *Non-local two-photon correlations using interferometers physically separated by 35 meters*, Europhys., Lett. **40**, 595 (1997).
- [36] M.A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger, *Two-Particle Interferometry*, Phys. rev. Lett. **62**, 2209 (1989).
- [37] J.G. Rarity and P.R. Tapster, *Experimental Violation of Bell's Inequality Based on Phase and Momentum*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1990).
- [38] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, *Violation of Bell's Inequalities by Photons more than 10 km Apart*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3563 (1998).
- [39] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, *Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions*, Phys.Rev.Lett. **81** 5039 (1998).
- [40] J.S. Bell, *Atomic cascade Photons and Quantum-Mechanical Nonlocality*, Comments on Atom. Mol.Phys. **9**, 121 (1981).

- [41] A. Aspect, Expériences basées sur les inégalités de Bell, *J. Physique Colloque* **C2**, 940 (1981).
- [42] C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Josza, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Experimental quantum teleportation*, *Nature* **390**, 575 (1997).
D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, and S. Popescu, *Experimental Realization of Teleporting an unknown pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, submitted to *Phys. Rev. Lett.* (1997).
- [43] S. Popescu, *Bell's inequalities versus teleportation : what is non locality ?* *Phys. Rev. Lett.* **72**, 797 (1994).
- [44] *The Feynman Lectures on Physics*, vol. III, chapter 18.
- [45] R. P. Feynman, *Simulating Physics with Computers*, *Intern. Journ. of Theoret. Phys.* **21**, 467 (1982).

8

La théorie de de Broglie-Bohm comme façon rationnelle de compléter la mécanique quantique

Jean Bricmont

Université catholique de Louvain, Belgique

Résumé

La mécanique quantique, telle qu'elle est habituellement formulée, se limite à prédire les « résultats de mesure » et ne dit rien sur le monde en dehors des laboratoires. La théorie de de Broglie-Bohm, par contre, donne une dynamique de la matière en mouvement, où les particules sont guidées par une onde, qui est solution de l'équation de Schrödinger. Cette théorie permet de retrouver les prédictions habituelles de la mécanique quantique et explique ce qui se passe lors de « mesures », qui sont en fait des interactions entre un système macroscopique et le système quantique « mesuré », interactions qui sont entièrement décrites par la théorie, sans faire de la « mesure » un *deus ex machina*, comme c'est le cas dans la présentation usuelle de la mécanique quantique.

Abstract

The de Broglie-Bohm theory as a rational completion of quantum mechanics

Quantum mechanics, as it is ordinary formulated, limits itself to predict « results of measurements » and does not speak of the world outside of laboratories. On the other hand, the de Broglie-Bohm theory, gives a dynamics of matter in motion, where particles are guided by the wave that solves Schrödinger's equation. This theory recovers the usual predictions of quantum mechanics and explains what happens during "measurements", the latter being interactions between a macroscopic system and a measured quantum system, interactions that are entirely described by the theory, without turning measurements into deus ex machina, as is done in the usual presentations of quantum mechanics.

I. Introduction

La théorie quantique est sans doute la théorie scientifique la plus spectaculairement confirmée qui soit. Elle est à la base d'un grand nombre de technologies et n'a jamais été mise en défaut.

Néanmoins, ce qu'elle signifie comme théorie physique a été débattu depuis ses origines et l'est encore. Une façon simple de poser la question est de savoir ce que veut dire, pour un système physique, d'avoir ou d'être représenté par un état quantique ?

C'est-à-dire par un vecteur Ψ dans un espace de Hilbert !

La réponse standard (orthodoxe) est que, d'une part, cet état évolue selon l'équation de Schrödinger (voir (13) plus loin) ou une équation similaire, tant que l'on n'effectue pas de mesure sur le système. Cette évolution est *continue dans le temps, déterministe et linéaire*.

Mais, d'autre part, si l'on mesure dans le système physique représenté par l'état Ψ , une quantité « observable » représentée par un opérateur A , ayant une base de vecteurs propres Ψ_n avec valeurs propres λ_n , alors on obtient le résultat λ_k avec probabilité $|c_k|^2$, où

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n \quad (1)$$

est le développement de l'état Ψ dans la base des Ψ_n ¹. Comme (1) est un développement dans une base orthonormale, on a nécessairement que $\sum_n |c_n|^2 = 1$, ce qui permet d'interpréter chaque $|c_k|^2$ comme une probabilité.

(1) Nous mettons de côté ici la question des spectres continus, qui peuvent être traités de façon conceptuellement similaire.

Et, après la mesure de l'observable représentée par l'opérateur A , l'état « saute » ou « est réduit » à l'état Ψ_k .

Cette opération de réduction est *discontinue dans le temps* (l'état « saute »), *aléatoire* (on ne donne que certaines probabilités $|c_k|^2$ pour ces sauts), et non linéaire (le résultat Ψ_k est indépendant des coefficients c_k dans (1)).

Le problème est que le seul sens attribué à l'état quantique dépend entièrement des mesures ; si l'on demande ce que signifie physiquement un état attribué à un système hors du laboratoire, aucune réponse claire n'est donnée (en dehors justement de ce qui se passerait si l'on amenait ce système dans le laboratoire pour le « mesurer »).

Mais comment a fonctionné par exemple l'évolution naturelle ? Les processus biologiques reposent en principe sur la chimie qui elle-même est fondée sur la mécanique quantique. Comment décrire ce qui se passait avant l'apparition d'observateurs humains ?

Et que se passe-t-il dans l'univers en dehors des laboratoires ?

Est-ce que vraiment la physique n'a pas d'autre but que de décrire ce qui se passe dans les laboratoires ? Et si c'était le cas, pourquoi construire des laboratoires ? En principe, les expériences servent à tester nos théories sur le Monde, mais si celles-ci ne disent rien sur le Monde, à quoi servent les expériences ?

Et pourquoi a-t-on cette dualité dans l'évolution de l'état quantique : une évolution continue dans le temps, déterministe et linéaire en dehors des mesures et une évolution discontinue dans le temps, aléatoire, et non linéaire pendant celles-ci ?

Parfois une réponse pragmatique est donnée à ces questions : puisque cela fonctionne, pourquoi s'en faire ? Mais c'est justement *parce que* cela fonctionne si bien qu'il vaut la peine de se demander *pourquoi* cela fonctionne si bien. Si la théorie marchait une fois sur deux, pour ainsi dire, ou si elle n'était qu'un « modèle » physique parmi d'autres, dont le domaine d'application est limité mais connu, alors il n'y aurait effectivement aucune question à se poser.

Nous allons d'abord discuter deux réponses, dont l'une au moins est sans doute implicite dans l'esprit des physiciens qui pensent que la mécanique quantique ne pose pas de problème conceptuel.

Après avoir expliqué pourquoi aucune de ces réponses n'est satisfaisante, nous introduirons une description des systèmes physiques plus détaillée que celle donnée par l'état quantique et qui permet effectivement de résoudre les problèmes conceptuels de la mécanique quantique : la théorie de de Broglie-Bohm.

2. Deux « solutions » qui n'en sont pas

La première « solution » est de considérer qu'une analyse du processus de mesure, qui traiterait l'appareil de mesure de façon quantique, permettrait d'éviter cette opération de réduction, ou plutôt la ferait apparaître comme une conséquence de l'évolution temporelle de l'état du système 'total' constitué par le système mesuré et l'appareil de mesure. Après tout, l'appareil de mesure est nécessairement macroscopique et l'objet quantique mesuré microscopique ; est-ce que la différence d'échelle entre les deux pourrait nous permettre de résoudre le problème ? On pourrait raisonner par analogie : les lois microscopiques sont réversibles sous le renversement du temps et les lois macroscopiques ne le sont pas, mais la mécanique statistique explique comment déduire les unes (les lois macroscopiques) des autres (les lois microscopiques)². Est-ce que la réduction de l'état quantique ne pourrait pas être un phénomène du même type ?

Malheureusement, il n'en est rien.

2.1 Une analyse quantique de l'appareil de mesure

Considérons un système très simple, composé du spin d'une particule (et dont nous négligeons la fonction d'onde, c'est-à-dire la partie spatiale de l'état quantique), dont l'état initial est :

$$c_1|1 \uparrow\rangle + c_2|1 \downarrow\rangle, \quad (2)$$

où $|1 \uparrow\rangle$ dénote l'état de spin « up » dans une direction donnée, notée 1 (et $|1 \downarrow\rangle$ l'état « down ») et où c_1, c_2 sont des nombres (a priori, complexes). La formule (2) est un cas particulier de (1), et on a donc $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

L'appareil de mesure est représenté dans les figures 1-3, et est réduit à un pointeur, qui est initialement dans une position horizontale et, à la fin de la mesure, pointe vers le haut ou vers le bas, selon que le spin mesuré est « up » ou « down ».

Pour décrire de façon quantique l'appareil de mesure, nous devons lui associer un état quantique. Soit $\varphi_0(z)$ la fonction d'onde initiale associée au pointeur, avec $\varphi_0(z)$ centrée en $z = 0$, ce qui veut dire que le pointeur est comme dans la première image de la figure 1. Évidemment, l'appareil de mesure est composé d'un grand nombre de particules et sa description complète ne peut être réduite à la variable z . Mais cette variable est une fonction des autres variables caractérisant le pointeur et est suffisante pour dire si le pointeur pointe vers le haut, vers le bas, ou horizontalement.

Soit :

$$\Psi_0 = \varphi_0(z) [c_1|1 \uparrow\rangle + c_2|1 \downarrow\rangle], \quad (3)$$

(2) Voir par exemple [15].

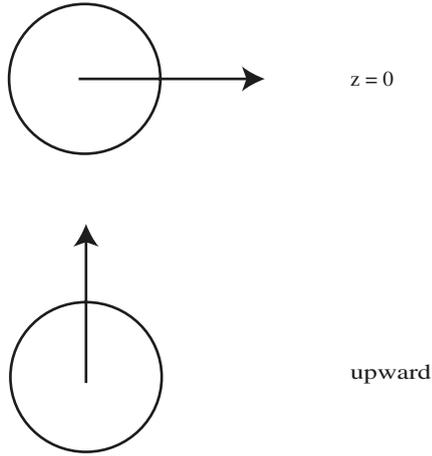


Figure 1. Évolution du pointeur pendant une mesure lorsque l'état initial est donné par (4).

l'état qui décrit l'état initial du système composé du spin de la particule et du pointeur.

Pour comprendre ce qui se passe, considérons d'abord un autre état initial, qui correspond au spin de la particule étant dans l'état « up » :

$$\Psi_0^\uparrow = \varphi_0(z)|1 \uparrow\rangle. \tag{4}$$

Alors, vu que le pointeur va aller vers le haut si le spin est « up », l'état final sera :

$$\varphi^\uparrow(z)|1 \uparrow\rangle,$$

où $\varphi^\uparrow(z)$ correspond au pointeur étant comme dans la deuxième image de la figure 1.

De même, si nous partons de l'état initial :

$$\Psi_0^\downarrow = \varphi_0(z)|1 \downarrow\rangle, \tag{5}$$

l'état final sera : $\varphi^\downarrow(z)|1 \downarrow\rangle$, où $\varphi^\downarrow(z)$ correspond au pointeur étant comme dans la deuxième image de la figure 2.

Voyons maintenant ce qui se passe si l'état initial est Ψ_0 (voir (3)). Vu que cet état est une combinaison linéaire de deux autres états, Ψ_0^\uparrow (voir (4)) and Ψ_0^\downarrow (voir (5)), et que l'évolution temporelle est linéaire, le résultat final sera nécessairement :

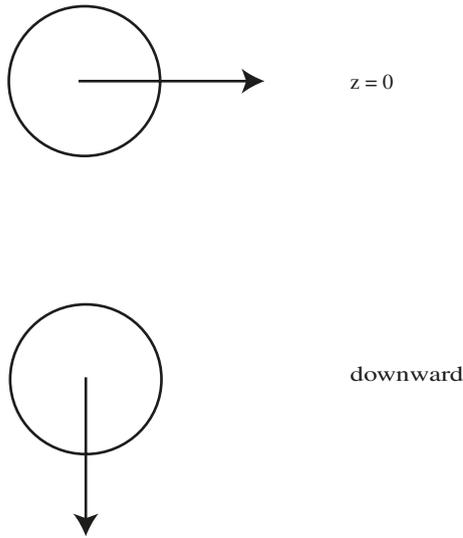


Figure 2. Évolution du pointeur pendant une mesure lorsque l'état initial est donné par (5).

$$c_1\varphi^\uparrow(z)|1 \uparrow\rangle + c_2\varphi^\downarrow(z)|1 \downarrow\rangle . \quad (6)$$

En ce qui concerne le pointeur, on ne peut interpréter cet état que comme une « superposition » de deux états macroscopiques différents : l'un où le pointeur est orienté vers le haut $\varphi^\uparrow(z)$ et un autre où il est orienté vers le bas $\varphi^\downarrow(z)$. C'est illustré symboliquement dans la figure 3.

Le problème qui se pose alors est que (6) ne représente nullement l'état de l'appareil de mesure tel que nous le connaissons. Le pointeur est orienté soit vers le haut, soit vers le bas, mais n'est pas dans une superposition des deux ! Ou, si l'on préfère, la description *complète* de l'appareil après la mesure n'est sûrement pas une superposition, puisqu'une description plus fine (vers le haut ou vers le bas) est obtenue simplement en regardant le résultat. Le problème est que les mesures ont des résultats bien définis, et le formalisme de la mécanique quantique ne rend pas compte de ce fait. Il est parfois suggéré que le problème soulevé ici ne se pose pas parce qu'il est impossible de produire des effets d'interférence entre l'état du pointeur orienté vers le haut et celui du pointeur orienté vers le bas comparables à ce qu'on peut faire pour des systèmes composés d'une ou de peu de particules. Ceci est vrai (on appelle ce phénomène la *décohérence*), mais cela ne résout pas le problème, à savoir que la mécanique quantique ne rend pas compte de la réalité. Tout ce que cela prouve est qu'en pratique, on peut prendre l'état qu'on observe (pointeur orienté vers le haut ou pointeur orienté vers le bas) et oublier l'autre sans risquer de se

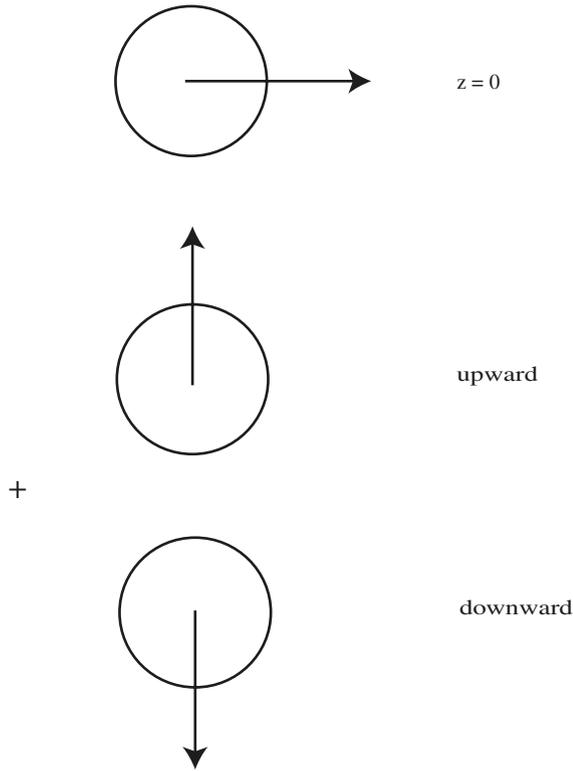


Figure 3. Évolution du pointeur pendant une mesure lorsque l'état initial est donné par (3).

tromper en ce qui concerne l'évolution future du système. Mais le problème conceptuel, à savoir le rôle central de l'observateur, subsiste³.

Pour rendre les choses plus dramatiques, on peut coupler l'appareil à un chat, comme l'a suggéré Schrödinger [20] : on imagine un chat dans une boîte fermée et un mécanisme qui lie la position du pointeur à un marteau qui brise une fiole de poison, si le pointeur est orienté vers le haut et ne la brise pas, s'il est orienté vers le bas. Si la fiole est cassée, le poison tue le chat (voir la figure 4). Raisonnant comme ci-dessus, l'état complet, y compris celui du chat, devient :

$$c_1 \varphi^\uparrow(z) |1 \uparrow\rangle |\text{chat mort}\rangle + c_2 \varphi^\downarrow(z) |1 \downarrow\rangle |\text{chat vivant}\rangle$$

De nouveau, on obtient une superposition macroscopique donnée par la « somme » d'un chat vivant et d'un chat mort, expression qui ne correspond certainement pas à la réalité et à laquelle il est difficile d'attribuer même un sens. Pour dire les choses autrement, cet

(3) Nous verrons dans la section 3.2 que ce phénomène de décohérence est important pour comprendre la théorie de de Broglie-Bohm.

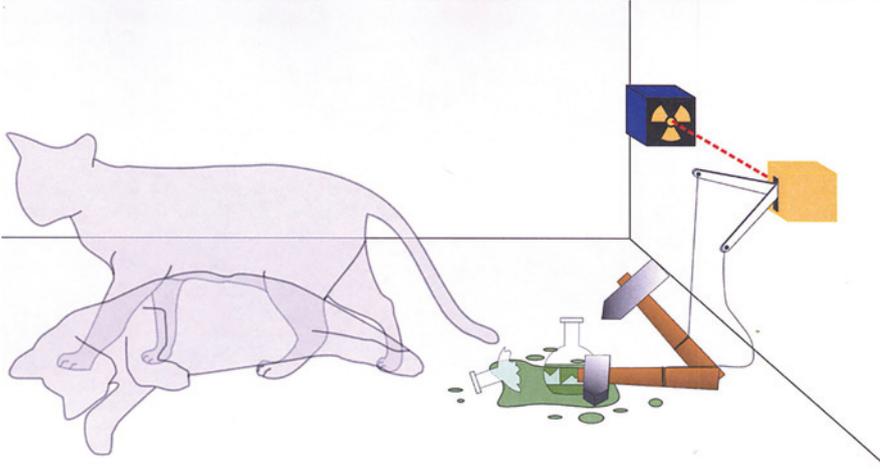


Figure 4. Le chat qui est à la fois vivant et mort.

Par Dhatfield (own work) [CC BY-SA 3.0] (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>), via Wikimedia Commons

argument montre que la mécanique quantique n'est manifestement pas complète, puisque, après la mesure, on peut décrire les systèmes physiques de façon plus complète que ne le fait l'état quantique.

Dire que l'on peut introduire une description physique plus complète que celle qui est donnée par l'état quantique revient, dans la terminologie usuelle sur les fondements de la mécanique quantique à introduire des « variables cachées ». Bien sûr, dans le cas du chat, le fait qu'il est vivant ou mort n'est nullement caché.

Mais on pourrait suggérer que des variables cachées existent à tous les niveaux : pas seulement pour le chat vivant ou mort, ou pour le pointeur dirigé vers le haut ou vers le bas, mais aussi pour la particule dont le spin est mesuré. On pourrait penser qu'un état tel que (2) signifie que le spin a une probabilité $|c_1|^2$ d'être « up » et une probabilité $|c_2|^2$ d'être « down » et que la mesure nous révèle simplement cette valeur du spin. Ou, plus précisément, on pourrait penser que, si l'on prépare un grand nombre de systèmes physiques caractérisés par l'état (2), une fraction égale à $|c_1|^2$ aura son spin « up » et une fraction égale à $|c_2|^2$ aura son spin « down ».

C'est ce qu'on appelle parfois l'interprétation statistique de l'état quantique. La règle de réduction de l'état quantique ne serait alors pas si mystérieuse, puisqu'une mesure nous apprendrait une propriété du système et, comme en probabilité classique, le fait d'apprendre quelque chose sur un système nous amène à modifier les probabilités que nous attribuons à ce système : par exemple si une pièce de monnaie est tombée sur une de ses faces, mais nous ne savons pas laquelle, nous attribuons une probabilité (1/2, 1/2) à chacune des faces ; mais si nous apprenons sur quelle face elle est tombée, nous changeons nos probabilités et nous attribuons une probabilité 1 à la face sur laquelle elle est tombée et 0 à l'autre.

De plus, cette façon de penser est très naturelle : si l'on dit que l'opération de mesure « mesure » quelque chose, alors on pense que ce qui est mesuré préexiste à la mesure : si je mesure la longueur d'une table, je suppose que la table a une certaine longueur avant que je ne la mesure ; sinon que voudrait dire le mot « mesure » ?

Cette vision des choses était, d'une certaine façon, celle d'Einstein lorsqu'il résuma sa position à propos de la mécanique quantique en 1949 :

Je suis en fait fermement convaincu que le caractère essentiellement statistique de la théorie quantique contemporaine est uniquement dû au fait que cette théorie fonctionne avec une description incomplète des systèmes physiques [...].

Albert Einstein [9, p. 666]

Si l'interprétation statistique de l'état quantique pouvait fonctionner nos problèmes seraient résolus. Malheureusement, des théorèmes mathématiques relativement peu connus mais faciles à démontrer montrent que cela ne fonctionne pas.

2.2 L'impossibilité d'une interprétation statistique de l'état quantique

Pour discuter de l'idée de variables cachées, il faut d'abord l'exprimer de façon précise. Soit A une observable (nous ne distinguons pas ici entre l'observable physique, comme le spin, et l'opérateur qui la représente mathématiquement) ; dire que la mesure de A , dans un système physique particulier, va révéler la valeur que ce système a pour l'observable A signifie qu'il existe une valeur $v(A)$ propre à ce système. Vu que différentes mesures peuvent être faites sur un système physique donné, il faut supposer qu'il existe une fonction v définie sur un ensemble d'observables et qui donne, pour chaque observable, la valeur que cette observable a dans le système considéré.

Cette fonction doit être telle que $v(A)$ soit un des résultats possibles obtenus lors de la mesure de la quantité A , ce qui implique que la fonction $v(A)$ satisfasse deux propriétés :

$$v(A) \in \{\text{valeurs propres de la matrice } A\} \quad (7)$$

et, $\forall A, B$, si $[A, B] = 0$, alors

$$v(AB) = v(A)v(B). \quad (8)$$

En effet, (7) dit simplement que si la mesure révèle une valeur préexistante de la quantité représentée par l'opérateur A , $v(A)$ doit être une des valeurs propres de cet opérateur (par exemple, pour le spin discuté ci-dessus, la valeur prise par v sera « up » ou « down », ou

+1 ou -1, si l'on veut associer à « up » et « down » des nombres). Quant à (8), elle exprime aussi une contrainte inévitable si la mesure en mécanique quantique révèle des valeurs préexistantes de quantités physiques. En effet, si les opérateurs A et B commutent alors, on peut les mesurer l'un et l'autre sans perturber les valeurs obtenues (du moins, d'après la mécanique quantique standard) ; on peut également mesurer la quantité AB et les valeurs correspondantes doivent satisfaire (8).

Donc, les contraintes (7) et (8) peuvent être considérées comme purement empiriques. Elles ne dépendent pas de la véracité de l'ensemble de la théorie quantique, mais uniquement de certaines de ses prédictions qui sont amplement vérifiées expérimentalement.

Cependant, et là est le problème, on peut facilement démontrer le
Théorème sur l'inexistence de « variables cachées »⁴

Il n'existe pas de fonction $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

où \mathcal{A} = ensemble des matrices sur un espace vectoriel de dimension au moins égale à 3, telle que $\forall A, B \in \mathcal{A}$, les contraintes (7) et (8) soient satisfaites.

Démonstration⁵

Soient $\sigma_x^i \sigma_y^i$ $i = 1, 2$ des paires de matrices de Pauli dans les directions x et y associées à deux « spins » différents, notés 1 et 2, où l'usage de produits tensoriels est implicite :

$$\sigma_\alpha^1 = \sigma_\alpha \otimes 1 \quad \sigma_\alpha^2 = 1 \otimes \sigma_\alpha \quad \alpha = x, y.$$

On a les relations :

$$(\sigma_x^i)^2 = (\sigma_y^i)^2 = 1 \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_x^i \sigma_y^i = -\sigma_y^i \sigma_x^i \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_\alpha^1 \sigma_\beta^2 = \sigma_\alpha^2 \sigma_\beta^1 \quad \alpha, \beta = x, y.$$

En utilisant les relations ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_y^1 \sigma_y^2 = \\ & -\sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_x^1 \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_y^1 \sigma_y^2 = -1. \end{aligned} \tag{9}$$

Introduisons les matrices :

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 \\ Y &= \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_y^1 \sigma_y^2. \end{aligned}$$

(4) Ce théorème est dû, sous différentes formes, à Bell [1], Kochen-Specker [11], Mermin [16], Perez [17]. Voir [6], section 2.5 pour plus de détails.

(5) La démonstration donnée ici n'est valide que dans un espace vectoriel de dimension égale à 4 et peut facilement être étendue à un espace dont la dimension est un multiple de 4. Voir [6], Appendice 2.F pour plus de détails sur la situation générale.

$$\text{On a } \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_y^1 \sigma_y^2 = XY$$

et, par les relation de commutation et d'anti-commutation ci-dessus : $[X, Y] = 0$

$$\text{et donc } v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_y^1 \sigma_y^2) = -1 = v(XY) = v(X)v(Y),$$

par les hypothèses (7) (qui implique $v(-1) = -1$) et (8).

On peut écrire : $X = A \cdot B$

$$\text{Où } A = \sigma_x^1 \sigma_y^2 \quad B = \sigma_x^1 \sigma_x^2 \text{ et}$$

$$Y = C \cdot D \text{ où}$$

$$C = \sigma_x^1 \sigma_x^2 \quad D = \sigma_y^1 \sigma_y^2.$$

On peut vérifier que : $[A, B] = [C, D] = 0$.

$$\text{Et donc, en utilisant (8) : } \begin{aligned} v(X) &= v(A)v(B) \\ v(Y) &= v(C)v(D). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$-1 = v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_y^1 \sigma_y^2) = v(XY) = v(X)v(Y) = v(A)v(B)v(C)v(D).$$

A, B, C, D sont des produits de matrices qui commutent (parce qu'ayant des indices 1 et 2).
Donc, toujours par (8) :

$$v(A) = v(\sigma_x^1)v(\sigma_y^2)$$

$$v(B) = v(\sigma_y^1)v(\sigma_x^2)$$

$$v(C) = v(\sigma_y^1)v(\sigma_x^2)$$

$$v(D) = v(\sigma_y^1)v(\sigma_y^2).$$

Ce qui implique :

$$-1 = v(A)v(B)v(C)v(D) \tag{10}$$

$$= v(\sigma_x^1)v(\sigma_y^2)v(\sigma_y^1)v(\sigma_x^2)v(\sigma_x^1)v(\sigma_x^2)v(\sigma_y^1)v(\sigma_y^2) \tag{11}$$

$$= v(\sigma_x^1)^2 v(\sigma_y^2)^2 v(\sigma_y^1)^2 v(\sigma_x^2)^2. \tag{12}$$

L'expression $v(\sigma_x^1)^2 v(\sigma_y^2)^2 v(\sigma_y^1)^2 v(\sigma_x^2)^2$ est un nombre positif (en fait égal à +1) et ne peut pas être égal à -1. Cette dernière relation est donc une contradiction et cela établit la non-existence d'une quelconque fonction v ayant les propriétés supposées (7) et (8).

Soulignons que ce théorème ne signifie pas simplement qu'il n'existe pas d'états quantiques donnant une valeur bien déterminée simultanément à une série d'observables (ce qui est bien connu) mais quelque chose de bien plus profond : il est impossible d'ajouter des variables supplémentaires qui permettraient de comprendre l'opération de mesure comme signifiant ce que ce mot veut dire, c'est-à-dire, la mise en évidence d'une propriété préexistante à la mesure.

Une autre façon d'exprimer le contenu de ce théorème est de dire que l'appareil de mesure joue nécessairement un rôle « actif » en ce sens qu'il n'enregistre pas passivement une donnée déjà là (la valeur $v(A)$). C'est un aspect des choses sur lequel Bohr a toujours insisté, par exemple dans sa discussion avec Einstein en 1949, lorsqu'il soulignait :

[...] l'impossibilité de toute séparation nette entre le comportement des objets atomiques et leur interaction avec les instruments de mesure serrant à définir les conditions sous lesquelles le phénomène se manifeste.

Niels Bohr [5, p. 207] (italiques dans l'original)

Mais la mécanique quantique ordinaire ne nous dit absolument pas en quoi consiste ce rôle actif, puisque l'appareil de mesure est, dans le formalisme usuel, un *deus ex machina*.

2.3 Conclusions

Nous faisons face à un sérieux problème. Si nous essayons de comprendre la réduction de l'état quantique comme une propriété « émergente » au niveau macroscopique, nous voyons que le formalisme quantique n'en rend pas compte. Et si nous essayons de donner une interprétation statistique naturelle à l'état quantique et à sa mesure, nous arrivons à une contradiction.

Néanmoins, il est probable que de nombreux physiciens qui ne se posent pas de questions sur la mécanique quantique adhèrent implicitement à l'une de ces deux positions.

Il y a trois réactions possibles à cette situation :

1. Déclarer que le monde microscopique est incompréhensible et que nous ne pouvons parler que de ses manifestations expérimentales. Par exemple, que si l'on refait de nombreuses expériences avec un état tel que (2), dans une fraction $|c_1|^2$ des cas, à la fin de l'expérience, le pointeur des figures (1, 2) sera dirigé vers le haut et dans une fraction $|c_2|^2$ des cas, il sera dirigé vers le bas.

2. Introduire, par *fiat*, une distinction nette entre monde quantique et monde classique. On décide que, par définition, certains objets comme les pointeurs ou les

chats ont des propriétés bien définies, alors que les objets microscopiques n'en ont pas. Le problème avec cette approche est qu'elle introduit une coupure totalement arbitraire : si un atome est régi par les lois quantiques, que deux atomes le sont quid de dix atomes ou d'un million d'atomes ? Où mettre la séparation ? Soulignons que ce n'est pas la même chose qu'une limite (comme en mathématique ou lorsqu'on parle de « limite classique ») dont on peut s'approcher de plus en plus, parce qu'ici il s'agit d'un saut qualitatif entre « ne pas avoir de propriétés bien définies » et « en avoir ».

3. Finalement, on pourrait chercher à obtenir une théorie plus complète que la mécanique quantique ordinaire. Les théorèmes sur l'inexistence des variables cachées montrent que ce n'est pas si simple à trouver.

Les deux premières réactions sont associées à l'interprétation de Copenhague et sont essentiellement les positions « orthodoxes ». La troisième réaction sera discutée dans la section suivante et est illustrée par la théorie de de Broglie-Bohm.

3. La théorie de de Broglie-Bohm

La théorie de de Broglie-Bohm, élaborée par de Broglie en 1924-1927 (voir [7]) et redécouverte et développée par Bohm en 1952 [4] est une :

- théorie de « variables cachées » ;
- qui ne sont nullement cachées ;
- théorie qui élimine entièrement le rôle de l'observateur ;
- qui n'est pas réfutée par les théorèmes sur les variables cachées comme celui de la Sect.2.2 ;
- qui rend compte de toutes les expériences justifiant la mécanique quantique ;
- qui permet de comprendre le rôle « actif » de l'appareil de mesure, c'est-à-dire l'intuition de Bohr (mais sans en faire un a priori philosophique) ;
- qui explique, dans la mesure où c'est possible, la non-localité⁶.

3.1 Les équations de la théorie de de Broglie-Bohm

Pour expliquer cette théorie, commençons par l'expérience bien connue des deux trous : on envoie des électrons (un par un en principe) vers un mur dans lequel deux

⁽⁶⁾Nous n'aborderons pas cet aspect de la théorie. Voir [6] chapitre 4 et section 5.2.1 pour une discussion de la non-localité.

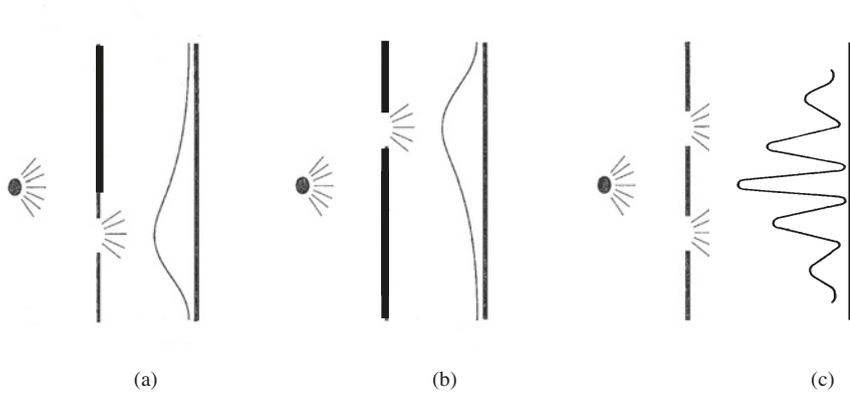


Figure 5. Expérience des deux trous.

trous peuvent être ouverts ou fermés et l'on détecte les électrons sur un deuxième mur, derrière le premier. Dans la figure 5, on dessine la densité de détection des électrons sur le deuxième mur selon qu'un trou est ouvert (a), ou l'autre (b) ou les deux (c).

La façon habituelle de décrire cette expérience est de dire que, lorsqu'un seul trou est ouvert, les électrons se comportent comme des particules (parties (a) et (b) de la figure 5), et lorsque les deux trous sont ouverts, ils se comportent comme des ondes (partie (c) de la figure 5). Mais comment les électrons peuvent-ils être à la fois des ondes et des particules ? Et comment peuvent-ils savoir à l'avance combien de trous sont ouverts et comment ils doivent se comporter ?

On pourrait répondre : élémentaire mon cher Bohr ! Ce sont des particules *guidées* par des ondes.

Dans la théorie de de Broglie-Bohm, l'état complet d'un système physique est une paire ($|\text{état quantique}\rangle, X$), où $|\text{état quantique}\rangle$ est l'état usuel et $X = (X_1, \dots, X_N)$ représente les positions de particules qui existent indépendamment du fait qu'on les « regarde » ou qu'on les « mesure ».

Ces positions sont les « variables cachées » en ce sens qu'elles ne sont pas incluses dans la description purement quantique $|\text{état quantique}\rangle$, mais elles ne sont nullement cachées : ce sont ces positions que l'on détecte directement, par exemple sur l'écran dans l'expérience des deux trous.

L'évolution temporelle de l'état est composée de deux lois :

I. L'évolution usuelle de $|\text{état quantique}\rangle$, pour tous les temps et en toutes circonstances que l'on « mesure » quelque chose ou non. Si l'état est simplement la fonction d'onde $|\text{état quantique}\rangle = \Psi(x_1, \dots, x_N)$, on a l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t\Psi = \mathcal{H}\Psi \tag{13}$$

où

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Delta + V \tag{14}$$

est l'hamiltonien quantique ($\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$) avec, pour simplifier, $\hbar = 1$, et toutes les masses égales à 1. L'état quantique n'est jamais réduit et ne fait jamais de « saut ».

2. Les positions des particules évoluent au cours du temps $X = X(t)$ selon une équation pilote déterminée par l'état quantique : leur vitesse est une fonction de la fonction d'onde. Si l'on écrit⁷ :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = R(x_1, \dots, x_N)e^{iS(x_1, \dots, x_N)},$$

alors :

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = \nabla_k S(X_1(t), \dots, X_N(t)). \tag{15}$$

Ou encore :

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = V_{\Psi}^k(\mathbf{X}(t)) = \frac{\text{Im}(\Psi^*\nabla_k\Psi)}{\Psi^*\Psi}(X_1(t), \dots, X_N(t)). \tag{16}$$

L'origine de cette équation n'a rien de mystérieux ; elle est la forme :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\mathbf{J}}{\rho} \tag{17}$$

où $\mathbf{J} = \text{Im}(\Psi^*\nabla\Psi)$ est le courant associé à la « conservation » de la probabilité $\rho = |\Psi|^2$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{18}$$

équation qui se déduit aisément de l'équation de Schrödinger (13).

On peut penser à Ψ comme étant analogue à l'hamiltonien en mécanique classique : celui-ci est aussi défini partout (sur l'espace de phase) et guide le mouvement des particules là où elles se trouvent.

(7) Nous utilisons des lettres minuscules pour désigner les arguments génériques de la fonction d'onde et des lettres majuscules pour les positions effectives des particules.

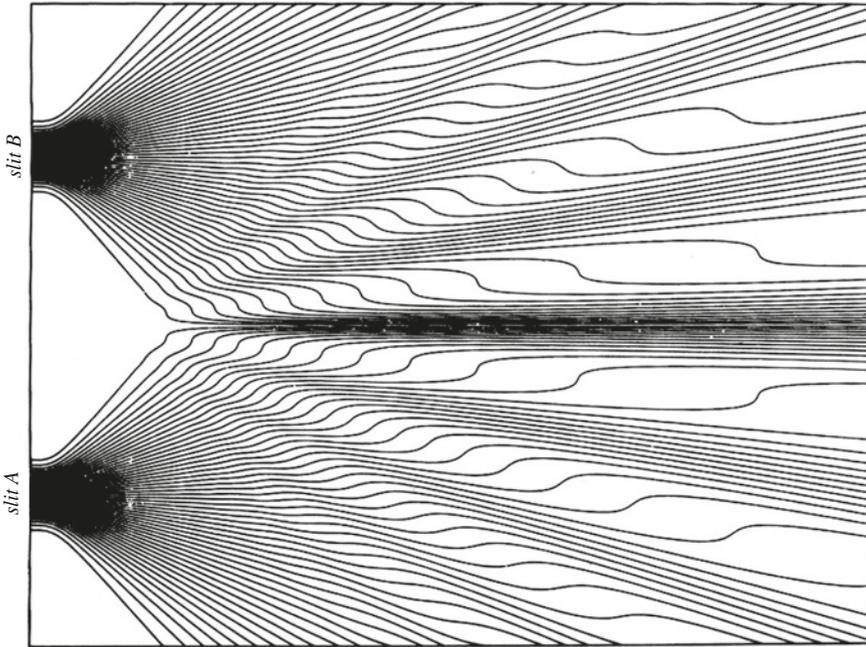


Figure 6. Les trajectoires de la dynamique de de Broglie-Bohm dans l'expérience des deux trous. Calcul numérique dû à [18].

Bohm a réécrit cette équation sous la forme d'une équation du deuxième ordre dans le temps, c'est-à-dire d'une équation de Newton avec un potentiel modifié : $V_{class} \rightarrow V_{class} + V_Q(\Psi)$ où $V_Q(\Psi) = -\frac{\Delta|\Psi|}{2|\Psi|}$. Si l'on tient compte du $V_Q(\Psi)$, on peut raisonner plus ou moins « classiquement ».

Revenons à l'expérience des deux trous : il existe des solutions numériques de la dynamique de de Broglie-Bohm dans ce cas-là, voir figure 6.

On remarquera que le mouvement *dans le vide* au-delà des trous est hautement *non classique* ! La première loi de Newton (mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces) n'est pas respectée. Si l'on raisonne, comme le faisait Bohm, en terme de potentiels, au-delà des trous $V_{class} = 0$, mais $V_Q(\Psi) \neq 0$, vu que V_Q dépend de la fonction d'onde, qui se propage au-delà des trous.

Notons que l'on peut déterminer a posteriori le trou par lequel la particule est passée ! Remarquons aussi la présence d'une ligne nodale : comme il existe une symétrie entre le haut et le bas de l'image, le gradient de Ψ est tangent à la ligne séparant ces deux parties de l'image : donc, par (15), la vitesse de la particule est aussi tangente à cette ligne et les particules ne peuvent pas la traverser.

Il est intéressant de comparer cette solution numérique à une expérience publiée dans *Science* en juin 2011 [12], et qui montre des trajectoires de photons obtenues à partir d'une série de mesures dite « faibles », qui sont des mesures indirectes. Le profil de ces trajectoires est qualitativement très similaire à celui de la figure 6.

Dans un manuel de mécanique quantique assez standard, on peut lire :

Il est clair que ce résultat [l'expérience à deux trous] ne peut d'aucune manière s'accorder avec la conception du mouvement des électrons sur une trajectoire. [...] En mécanique quantique, la notion de trajectoire d'une particule n'existe pas.

Landau et Lifshitz [13, p. 8]

Mais, est-ce si clair que cela au vu de ce qui précède ? Bell a bien énoncé le caractère naturel de la théorie de de Broglie-Bohm dans le cadre de l'expérience des deux trous :

N'est-il pas évident, étant donné la petitesse des scintillations sur l'écran, que nous avons affaire à une particule ? Et n'est-il pas évident, étant donné les franges d'interférence et de diffraction, que le mouvement de la particule est dirigé par une onde ? De Broglie a montré en détail comment le mouvement de la particule, passant par seulement un des trous de l'écran pouvait être influencé par des ondes se propageant à travers les deux trous. Et influencé d'une façon telle que la particule ne va pas là où les ondes s'annulent, mais est attirée là où elles coopèrent. Cette idée me semble si naturelle et simple pour résoudre le dilemme onde-particule, que le fait qu'elle soit si généralement ignorée me paraît être un grand mystère.

John Bell [3, p. 191]

Pour comprendre pourquoi la théorie de de Broglie-Bohm reproduit les prédictions quantiques usuelles, il faut utiliser une conséquence fondamentale de cette dynamique : *l'équivariance*, qui est illustrée par la figure 7, où chaque ligne décrit une trajectoire possible.

Si la distribution initiale des trajectoires est donnée par une densité ρ_0 , la densité à un temps ultérieur sera donnée par ρ_t :

$$\rho_0(x) = |\Psi(x, 0)|^2 \rightarrow \rho_t(x) = |\Psi(x, t)|^2, \quad (19)$$

où $\Psi(x, t)$ provient de l'équation de Schrödinger (13), et $\rho_t(x)$ provient de l'équation pilote (15)⁸. Cela se déduit facilement des équations (17, 18) (voir [6] Appendix 5.C pour plus de détails).

(8) Pour tout système dynamique déterministe, où une condition initiale x_0 donne lieu à un état x_t au temps t , on peut définir l'évolution d'une densité de particules par la formule : $\rho_t(x) = \rho_0(x_0(x, t))$ où $x_0(x, t)$ est la condition initiale au temps 0 qui donne lieu à l'état $x_t = x$ au temps t .

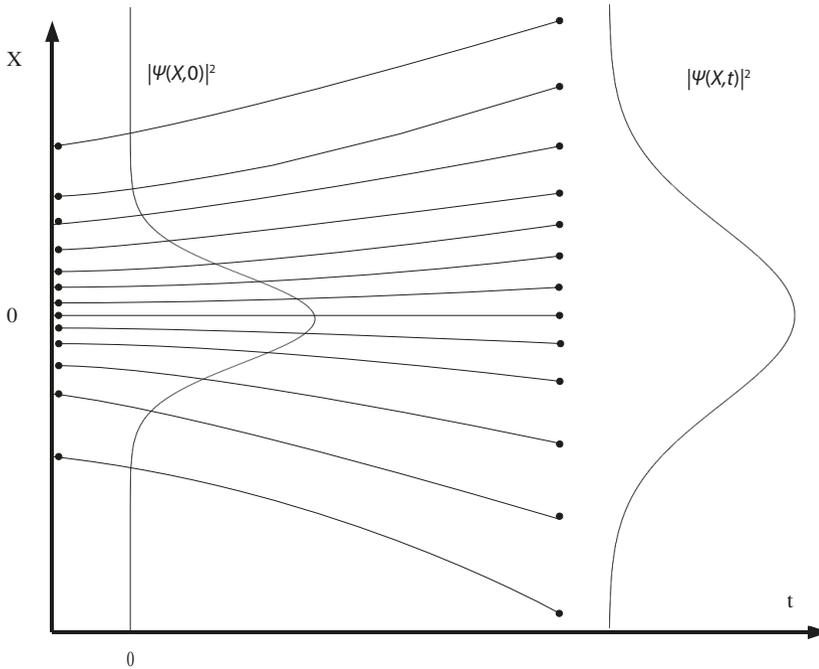


Figure 7. Illustration de l'équivariance de la dynamique de de Broglie-Bohm.

Dans la figure 7 on a représenté une distribution aléatoire de positions initiales dont la densité est approximativement donnée par $|\Psi(x,0)|^2$ (où la variable x est indiquée sur l'axe vertical) et on voit qu'en un temps ultérieur t cette densité sera approximativement donnée par $|\Psi(x,t)|^2$, chaque ligne représentant le résultat de la dynamique de de Broglie-Bohm, pour la position initiale indiquée sur l'axe vertical.

À cause de l'équivariance, les prédictions quantiques pour les mesures de positions seront vérifiées si l'on suppose que la densité des distributions initiales des positions satisfait à $\rho_0(x) = |\Psi(x,0)|^2$. Cette hypothèse sur les distributions initiales est appelée *l'équilibre quantique* ; sa justification est un peu trop longue pour être discutée ici (voir [8] ou [6] section 5.1.7).

Dans la théorie de de Broglie-Bohm, l'état quantique Ψ a donc un double statut :

- il engendre, à travers les équations (15) ou (16) le mouvement des particules ;
- il gouverne également la distribution statistique des positions des particules, donnée par $|\Psi|^2$.

On peut comparer l'état quantique avec l'hamiltonien en physique classique, qui engendre le mouvement des particules à travers les équations de Hamilton et donne également les distributions statistiques à l'équilibre. Formellement, cette dernière analogie est la suivante :

$$\mathcal{H} \sim -\log \Psi \text{ et } |\Psi|^2 \sim \exp(-\beta\mathcal{H}), \text{ avec } \beta = 2.$$

Dans la théorie de de Broglie-Bohm, les seules « variables cachées » qui sont introduites sont les positions des particules. C'est pourquoi la théorie n'est pas réfutée par les théorèmes sur l'impossibilité des variables cachées, qui supposent l'existence d'une fonction v définie sur un ensemble « d'observables », et pas sur une seule comme ici. Il nous reste à comprendre comment fonctionnent les mesures d'observables autres que les positions. Nous allons envisager d'abord le spin et ensuite le moment.

3.2 La « mesure » du spin dans la théorie de de Broglie-Bohm

Une conséquence des théorèmes sur la non existence de variables cachées vu dans la section 2.2 est que ce qu'on appelle une mesure - autre que les mesures de position - ne mesure (en général) aucune propriété préexistante de la particule. Pour comprendre cela dans la théorie de de Broglie-Bohm, considérons la mesure du spin d'une particule dans un état superposé $|1 \uparrow\rangle$ et $|1 \downarrow\rangle$, que nous décrivons de façon très idéalisée :

$$\Psi(z)(|1 \uparrow\rangle + |1 \downarrow\rangle) \quad (20)$$

z étant la direction verticale (voir la figure 8). Nous supposerons que la partie spatiale de l'état, c'est-à-dire la fonction d'onde $\Psi(z)$ est symétrique : $\Psi(z) = \Psi(-z)$. Ce qui implique que la ligne $z = 0$ est une ligne nodale, à travers laquelle le gradient de $\Psi(z)$ est nul et que donc les particules ne peuvent pas franchir, par (15) (la situation est similaire à celle de la figure 6). Ψ est aussi une fonction de la variable horizontale x (la particule effectue un mouvement vers la droite dans la direction x), mais nous laissons de côté cette variable.

Dans la figure 8, H désigne un champ magnétique ; les disques représentent (de façon très idéalisée) le support de la partie spatiale de la fonction d'onde. La partie $|1 \uparrow\rangle$ de l'état quantique va toujours dans la direction du champ (ce qui donne lieu à l'état $\Psi(z-t)|1 \uparrow\rangle$ et la partie $|1 \downarrow\rangle$ va toujours dans la direction opposée $\Psi(z+t)|1 \downarrow\rangle$. Mais la particule, si elle est initialement située dans la partie supérieure de la fonction d'onde, va toujours aller vers le haut, à cause de l'existence d'une ligne nodale $z = 0$, due à la symétrie de la fonction d'onde, que la particule ne peut pas franchir, comme dans la figure 6.

Donc, si l'on renverse le sens du champ, comme dans la figure 9, la particule va encore aller vers le haut. Mais alors, ce qui était « spin up » devient « spin down », bien que l'on « mesure » la même « observable », c'est-à-dire le spin dans la même direction dans les deux dispositifs, mais avec des arrangements différents de l'appareil.

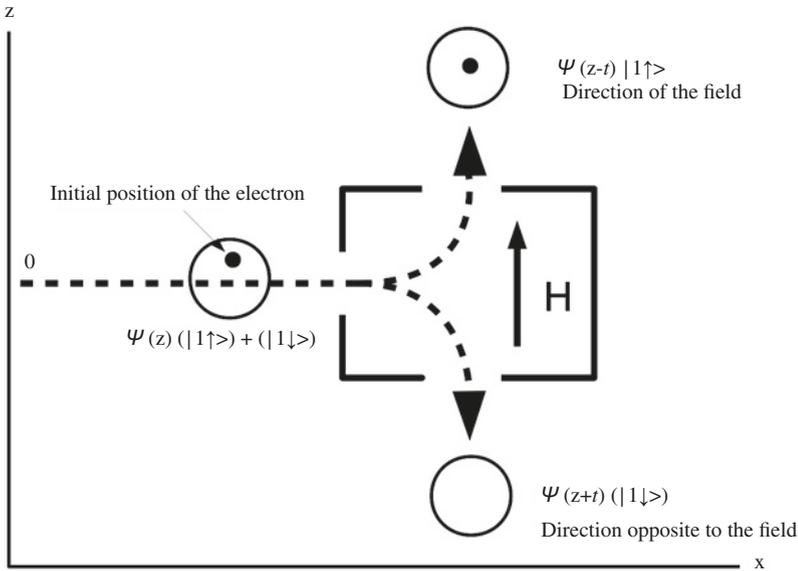


Figure 8. Une mesure de spin idéalisée.

Donc, l'appareil de mesure n'est pas « passif » (il n'enregistre pas simplement quelque chose de préexistant à la mesure) mais « actif ». Ceci justifie l'intuition de Bohr, mais en l'incorporant dans la théorie même, pas comme un *deus ex machina*.

Notons aussi que les deux parties de la fonction d'onde dans les figures 8 et 9 continuent à évoluer selon les équations habituelles. Mais la particule est guidée uniquement par la partie de la fonction d'onde dans le support de laquelle elle se trouve. C'est-à-dire qu'on peut, en pratique et dans certains cas, réduire la fonction d'onde et ne garder que la partie dans le support de laquelle la particule se trouve. Dans les figures 8 et 9, il se pourrait que l'on recombine ultérieurement les deux parties de la fonction d'onde et par conséquent on ne peut pas en oublier une (celle dans le support de laquelle la particule ne se trouve pas).

Mais on peut montrer que lorsque la particule interagit avec un appareil macroscopique et que l'on obtient un état du type (6), alors la recombinaison des fonctions d'onde est en pratique impossible⁹ et on peut, de nouveau en pratique, ne garder que la partie de la fonction d'onde dans le support de laquelle elle se trouve si l'on veut analyser son

(9) Comme mentionné dans la Sect.2.1, c'est ce qu'on appelle la décohérence. Il est important de souligner que, si cette notion est essentielle pour comprendre pourquoi il y a en pratique une réduction de l'état quantique dans la théorie de de Broglie-Bohm, elle n'est nullement suffisante à elle seule, puisque rien ne distingue, dans le formalisme usuel, les deux parties de la fonction d'onde, même si celles-ci « décollent ». Dans la théorie de de Broglie-Bohm, au contraire, ces deux parties sont différenciées par le fait que la particule est dans le support d'une seule d'entre-elles.

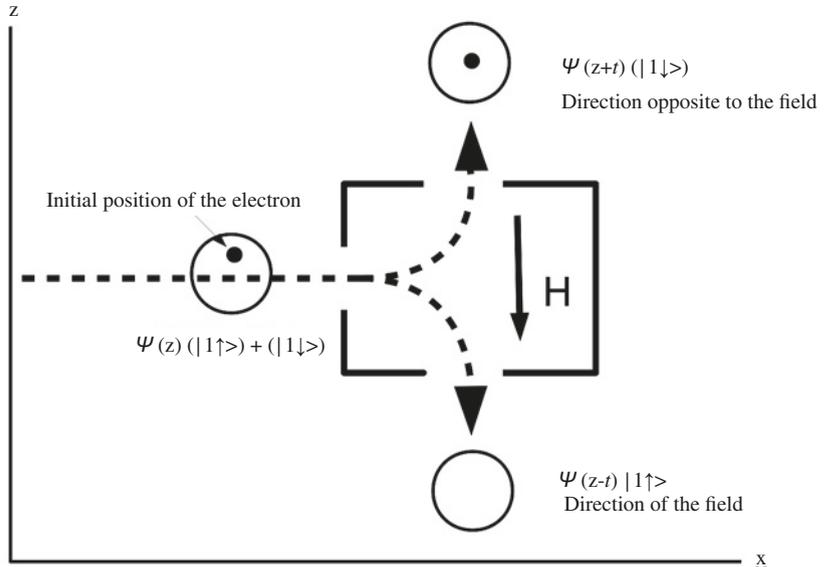


Figure 9. Une mesure de spin idéalisée avec le champ renversé par rapport à la figure 8.

comportement ultérieur. En ce sens, on effectue une « réduction » de l'état quantique et cette opération est « émergente », un peu comme l'irréversibilité des lois macroscopiques en physique classique¹⁰.

3.3 La « mesure » du moment dans la théorie de Broglie-Bohm

Qu'en est-il de la « mesure du moment » ? Si, dans la théorie de de Broglie-Bohm, les particules ont une trajectoire, elles doivent aussi avoir une vitesse à tout instant. Mais est-ce que la possession simultanée de ces deux propriétés n'est pas en contradiction avec les inégalités de Heisenberg ?

Considérons un exemple très simple pour illustrer ce qui se passe, à savoir une particule en une dimension spatiale avec la fonction d'onde initiale $\Psi(x,0) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$. Comme cette fonction est réelle, sa phase S est nulle et toutes particules sont au repos (par l'équation (15) :

$$\frac{d}{dt} X(t) = \frac{\partial S(X(t), t)}{\partial x}$$

(10) Voir [6] section 5.1.6 pour plus de détails.

Néanmoins la mesure du moment p doit avoir, d'après les prédictions quantiques usuelles, une distribution de probabilité dont la densité de distribution est donnée par le carré de la transformée de Fourier de $\Psi(x,0)$, c'est-à-dire par $|\hat{\Psi}(p)|^2 = \pi^{-1/2} \exp(-p^2)$.

N'y a-t-il pas là une contradiction ?

Pour y répondre, il faut d'abord se demander *comment* on mesure ce moment. Une façon de faire est de laisser évoluer la particule et de détecter sa position asymptotique

$X(t)$ quand $t \rightarrow \infty$. On a alors $p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t}$ (si l'on pose la masse $m = 1$).

Considérons l'évolution libre de la fonction d'onde initiale $\Psi(x,0) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$. On a comme solution de l'équation de Schrödinger (13) avec cette condition initiale :

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{(1+it)^{1/2}} \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(1+it)}\right], \quad (21)$$

et donc

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi[1+t^2]}} \exp\left[-\frac{x^2}{1+t^2}\right]. \quad (22)$$

Si l'on écrit $\Psi(x,t) = R(x,t) \exp[iS(x,t)]$, on a (à une constante en x près) :

$$S(x,t) = \frac{tx^2}{2(1+t^2)},$$

et l'équation pilote (15) devient ici :

$$\frac{d}{dt} X(t) = \frac{tX(t)}{1+t^2}, \quad (23)$$

dont la solution est :

$$X(t) = X(0)\sqrt{1+t^2}. \quad (24)$$

Ceci nous donne la dépendance explicite de la position en fonction du temps. Si la particule est initialement en $X(0) = 0$, elle ne bouge pas ; sinon elle se déplace asymptotiquement quand $t \rightarrow \infty$, comme $X(t) \sim X(0)t$.

La densité de probabilité que $X(t) = x$ est donnée par $|\Psi(x,t)|^2$ (par équivariance). Donc, la probabilité que le résultat de la « mesure » du moment appartienne à $A \subset \mathbb{R}$ est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{At} |\Psi(x,t)|^2 dx.$$

Par un changement de variable $x = pt$, on a :

$$\int_{At} |\Psi(x, t)|^2 dx = t \int_A |\Psi(pt, t)|^2 dp \quad (25)$$

et, par (22), on obtient :

$$t \int_A |\Psi(pt, t)|^2 dp = t \int_A \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \exp\left(-\frac{p^2 t^2}{1+t^2}\right) dp, \quad (26)$$

dont la limite, quand $t \rightarrow \infty$ est

$$\int_A \pi^{-1/2} \exp(-p^2) dp = \int_A |\widehat{\Psi}(p, 0)|^2 dp.$$

Ce qui est la prédiction quantique ! Mais cela ne mesure pas la vitesse initiale (qui est nulle pour toutes les particules).

Donc, les particules ont bien une trajectoire et, à tout moment, *une position et une vitesse*.

Mais si l'on comprend comment fonctionnent les « mesures », il n'y a aucune contradiction entre la théorie de de Broglie-Bohm et les prédictions quantiques, en particulier avec les inégalités de Heisenberg⁽¹⁾. Celles-ci sont des relations entre les variances des résultats de mesure, mais n'impliquent rien sur ce qui existe ou n'existe pas en dehors des mesures, puisqu'elles sont des conséquences mathématiques du formalisme quantique et que celui-ci ne dit rien sur le Monde en dehors des mesures.

La leçon à tirer de ce qui précède est que toute mesure autre qu'une mesure de position est une *interaction* entre le système physique microscopique et l'appareil de mesure macroscopique, mais que ce n'est que dans la théorie de de Broglie-Bohm que l'on peut comprendre comment cette interaction fonctionne.

4. Conclusions

Finalement on peut se demander quelle est la relation entre la théorie de de Broglie-Bohm et la mécanique quantique ordinaire ? Une réponse brève serait de dire que c'est la même théorie !

Mais alors, à quoi bon la théorie de de Broglie-Bohm ?

(1) Contrairement à ce que pense, entre autres, Nicolas Gisin [10, p. 75] : « S'il y a des positions cachées, il doit donc y avoir aussi des vitesses cachées. Mais cela contredit le principe d'incertitude d'Heisenberg, principe qui est à la base du formalisme quantique [...] ».

Plus précisément, l'une (la théorie de de Broglie-Bohm) est une théorie sur le Monde, l'autre (la mécanique quantique ordinaire) non. Elle ne se présente d'ailleurs pas ainsi, mais comme un algorithme permettant de calculer les résultats de mesure !

La mécanique quantique ordinaire est simplement la théorie de de Broglie-Bohm tronquée : on oublie les trajectoires, cela n'affecte en rien les prédictions empiriques (qui sont en fait une conséquence de la théorie de de Broglie-Bohm), et cela crée « simplement » quelques bibliothèques remplies de confusions, de mysticisme et de mauvaise philosophie.

À part cela (clarifier nos concepts), la théorie de de Broglie-Bohm n'a aucune utilité¹² !

John Bell a expliqué cela en détail :

Pourquoi y a-t-il cette nécessité de faire référence aux 'appareils' quand nous discutons des phénomènes quantiques ? Les physiciens qui ont été les premiers à rencontrer ces phénomènes les ont trouvés si bizarres qu'ils ont perdu tout espoir de les décrire en termes de concepts ordinaires comme l'espace et le temps, la position et la vitesse. Les pères fondateurs de la théorie quantique ont même décidé qu'aucun concept ne pourrait être trouvé qui permettrait une description directe du monde quantique. Ainsi, la théorie qu'ils ont établie avait seulement pour but de décrire systématiquement la réponse de l'appareil. Et que faut-il de plus, après tout, dans les applications ? [...] Le 'problème' est le suivant : comment le Monde doit-il être divisé exactement entre un appareil parlable ... dont on peut parler ... et un système quantique non parlable, dont on ne peut pas parler ? Combien d'électrons, ou d'atomes ou de molécules, faut-il pour constituer un 'appareil' ? Les mathématiques de la théorie ordinaire requièrent une telle division, mais ne disent rien sur la façon de la faire. En pratique, la question est résolue par des recettes pragmatiques qui ont survécu à l'épreuve du temps, appliquées avec discernement et avec un bon goût né de l'expérience. Mais est-ce qu'une théorie fondamentale ne devrait pas permettre une formulation mathématique exacte ?

À mon avis, les pères fondateurs avaient tort sur ce point. Les phénomènes quantiques n'excluent pas une description uniforme des mondes micro et macro, ... du système et de l'appareil. Il n'est pas essentiel d'introduire une vague division du Monde de ce type.

Cela a été indiqué déjà en 1926 par de Broglie, quand il a répondu à l'énigme onde ou particule ?

par onde et particule.

(12) Ce n'est pas tout à fait exact : il n'y a pas de nouvelles prédictions de la théorie, mais elle a plusieurs applications concrètes, dans les simulations numériques de la fonction d'onde en chimie quantique [22], dans les simulations des problèmes à plusieurs corps [19], ou dans les approximations semi-classiques, (voir [21] et les références dans cet article).

Mais, lorsque cela fut complètement clarifié par Bohm en 1952, peu de physiciens théoriciens voulaient en entendre parler. La ligne orthodoxe semblait entièrement justifiée par les succès pratiques. Même aujourd'hui, l'image de de Broglie-Bohm est généralement ignorée, et n'est pas enseignée aux étudiants. Je trouve que c'est une grande perte. Car cette image stimule l'esprit d'une façon très salutaire. L'image de de Broglie-Bohm élimine la nécessité de diviser le Monde d'une certaine façon entre système et appareil.

John Bell [3, 170-171]

Bell se demandait aussi :

Pourquoi l'image de l'onde-pilote est-elle ignorée dans les ouvrages de mécanique quantique ? Ne devrait-elle pas être enseignée, non pas comme l'unique voie, mais comme un antidote à l'autosatisfaction régnante ? Pour montrer que l'imprécision, la subjectivité, et l'indéterminisme, ne nous sont pas imposés de force par des faits expérimentaux, mais par un choix théorique délibéré ?

John Bell [3, p. 160]

Pour terminer, citons la réaction d'une ex-étudiante en physique, dont les sentiments sont assez proches des miens lorsque j'étais étudiant :

Ce qui m'a toujours intéressé était de comprendre ce que le Monde est. C'est pourquoi j'ai étudié la physique : si la physique est l'étude de la nature, alors pour comprendre la nature, il faut d'abord étudier la physique. Mais mes espoirs ont été déçus par ce qui est (ou semble être) généralement accepté dans beaucoup de départements de physique dans le monde entier : après la mécanique quantique, il faut abandonner l'idée que la physique nous donne une image de la réalité. Au début, j'ai cru que c'était vrai et j'ai été tellement déçue que j'ai décidé d'abandonner mon rêve 'romantique' [...] Mais, à un moment donné, [...] j'ai réalisé que certaines des choses que j'avais acceptées n'étaient pas si manifestement vraies, et j'ai repris l'espoir que la mécanique quantique n'était pas réellement la 'fin de la physique', au sens où je l'entendais. Par conséquent, j'ai commencé une thèse en physique pour élucider la situation. En faisant mon doctorat sur les fondements de la mécanique quantique, j'ai compris que ce que les physiciens considéraient comme étant une vérité inévitable était au contraire une grossière erreur : la mécanique quantique ne nous force pas à abandonner quoi que ce soit, et sûrement pas la possibilité d'étudier la réalité à travers la physique.

Valia Allori¹³

Citons également le jugement le plus bref sur « Copenhague » :

Une extravagance philosophique dictée par le désespoir

Erwin Schrödinger¹⁴

(13) Voir son site web : <http://www.niu.edu/vallon/background.html>.

(14) Cité par Landé dans [14].

Références

- [1] J.S. Bell : On the problem of hidden variables in quantum mechanics, *Reviews of Modern Physics* **38**, 447-452 (1966). Réimprimé comme Chap. 1 dans [3]
- [2] J.S. Bell: Against measurement, *Physics World* **3**, 33-40 (1990). Réimprimé comme Chap. 23 dans [3]
- [3] J.S. Bell: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Collected Papers on Quantum Philosophy*, 2nd edn, with an introduction by Alain Aspect, Cambridge University Press, Cambridge, 2004; 1st edn 1993
- [4] D. Bohm: A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden variables", Parts 1 and 2, *Physical Review* **89**, 166-193 (1952)
- [5] N. Bohr: Discussion avec Einstein sur les problèmes épistémologiques de la physique atomique. Chapitre 4 dans : N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, traduction de l'anglais par Edmond Bauer et Roland Omnès. Edition établie par Catherine Chevalley, Gallimard, Paris, 1991. Original en anglais : Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics. Dans P.A. Schilpp (ed.): *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, The Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois, 1949, 201-241
- [6] J. Bricmont, *Making Sense of Quantum Mechanics*, Springer, Switzerland 2016.
- [7] L. de Broglie: *La physique quantique restera-t-elle in déterministe?*, Gauthier-Villars, Paris, 1953
- [8] D. Dürr, S. Goldstein and N. Zanghi: Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty, *Journal of Statistical Physics* **67**, 843-907 (1992)
- [9] A. Einstein : Remarks concerning the essays brought together in this co-operative volume. Dans P.A. Schilpp (ed.): *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, The Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois, 1949, 665-688
- [10] N. Gisin: *L'impensable hasard. Non-localité, téléportation et autres merveilles quantiques. Préface d'Alain Aspect*, Odile Jacob, Paris, 2012
- [11] S. Kochen and E. P. Specker : The problem of hidden variables in quantum mechanics, *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59-87 (1967)
- [12] S. Kocsis, B. Braverman, S. Ravets, M.J. Stevens, R.P. Mirin, L.K. Shalm and A.M. Steinberg: Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer, *Science* **332**, 1170-1173 (2011)
- [13] L. Landau and E. Lifshitz: *Mécanique quantique. Théorie non relativiste, Physique théorique, tome III*, éditions MIR, Moscou, 1967

- [14] A. Landé, Quantum fact and fiction, *American Journal of Physics*, **33**, Issue 2, 123- 127 (1965)
- [15] J.L. Lebowitz: Microscopic origins of irreversible macroscopic behavior. Round Table on Irreversibility at STATPHYS20, Paris, July 22, 1998, *Physica A* **263**, 516-527 (1999)
- [16] D. Mermin: Hidden variables and the two theorems of John Bell, *Reviews of Modern Physics* **65**, 803-815 (1993)
- [17] A. Peres: Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem, *Journal of Physics A: Math. Gen.* **24**, L175-L178 (1991)
- [18] C. Philippidis, C. Dewdney, B.J. Hiley: Quantum interference and the quantum potential, *Il Nuovo Cimento B* **52**, 15-28 (1979)
- [19] X.O. Pladevall, J. Mompart (eds): *Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology*, Pan Stanford Publishing, Singapore, 2012
- [20] E. Schrödinger: Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften* **23**, 807-812; 823-828; 844-849 (1935). Traduction anglaise : The present situation in quantum mechanics, translated by J.- D. Trimmer; *Proceedings of the American Philosophical Society* **124**, 323-338 (1984). Réimprimé dans: J.A. Wheeler and W.H. Zurek (eds), *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, Princeton, 1983, 152-167
- [21] W. Struyve: Semi-classical approximations based on Bohmian mechanics, preprint arXiv: 1507.04771 (2015)
- [22] R.E. Wyatt, *Quantum Dynamics with Trajectories*, Springer, New York, 2005

9

Atomes et lumière en équilibre thermique : de l'argument d'Einstein aux mélasses optiques

Jean Dalibard

Collège de France et Laboratoire Kastler Brossel, CNRS,
ENS-PSL Research University,
UPMC-Sorbonne Universités,
11 Place Marcelin Berthelot, 75005 Paris, France

Résumé

En 1916-17, Einstein étudie comment un rayonnement de type corps noir peut imposer sa température à une collection d'atomes. À partir des trois processus d'absorption, d'émission dirigée et d'émission spontanée, il montre que la lumière crée une force de friction sur un atome en mouvement. En utilisant ensuite des arguments empruntés à la théorie du mouvement brownien, il explique comment l'assemblée atomique atteint le même état d'équilibre thermique que le corps noir de départ. Près de soixante ans après le travail d'Einstein, les physiciens Hänsch et Schawlow d'une part, Wineland et Dehmelt d'autre part, ont proposé d'exploiter la lumière des lasers accordables pour créer de nouveaux équilibres thermodynamiques, avec un processus de refroidissement étonnamment proche du mécanisme envisagé par Einstein. Cela a constitué le point de départ d'un nouveau domaine de la physique quantique, l'étude de gaz d'atomes refroidis à une température située dans le domaine du microkelvin.

Abstract

Atoms and light in thermal equilibrium: from Einstein's argument to optical molasses

In 1916-1917, Einstein examines how a radiation like the black body radiation can impose its temperature to a collection of atoms. On the basis of the three processes, absorption, directed and spontaneous emission, he shows that light creates a friction force on a moving atom. Then using arguments taken from the Brownian motion, he explains how the atomic assembly reaches the same level of thermal equilibrium as the initial black body. About sixty years after Einstein's work, the physicists Hänsch and Schawlow on one hand and Wineland and Dehmelt on the other hand, proposed to exploit the light of tunable lasers in order to create new thermodynamic equilibriums, with a cooling process amazingly close to the Einstein's mechanism. This was the starting point of a new field of quantum physics, the study of a gas atoms cooled down to a temperature close to a microkelvin.

Le point de départ de cet article sera le rayonnement du corps noir, c'est-à-dire le rayonnement électromagnétique émis par un corps matériel en équilibre thermodynamique avec son environnement. La distribution spectrale de ce rayonnement est une loi universelle qui ne dépend que de la température du corps. Elle est donnée par la loi de Planck [17] :

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (1)$$

où $\rho(\omega) d\omega$ représente l'énergie électromagnétique par unité de volume correspondant à un rayonnement de pulsation comprise entre ω et $\omega + d\omega$.

Considérant la loi de Planck (1) acquise, Einstein [8] étudie comment un rayonnement avec cette densité spectrale d'énergie va imposer sa température à une collection d'atomes. Pour cela, il introduit la notion de force de friction créée par la lumière sur un atome en mouvement, force de friction en tout point identique à celle proposée près de 60 ans plus tard par Hänsch & Schawlow [11] et à l'œuvre dans les mélasses optiques utilisées dans les laboratoires d'aujourd'hui. De plus, le raisonnement d'Einstein pour étudier l'équilibre atteint par l'assemblée d'atomes est également identique à celui utilisé pour décrire le mouvement des atomes dans des faisceaux laser quasi-résonnants : il s'agit d'arguments fondés sur la notion de mouvement brownien, que nous allons également passer en revue dans cet article.

I. Einstein 1916 : absorption et émission

En 1916, alors qu'il vient de publier sa théorie de la Relativité Générale, Einstein revient vers l'étude des processus d'échanges d'énergie et d'impulsion entre atomes et rayonnement [7]. Pour approfondir ce thème qu'il avait abordé dès 1905 dans son étude de l'effet photo-électrique, il va prendre comme fil directeur l'atteinte de l'équilibre thermodynamique.

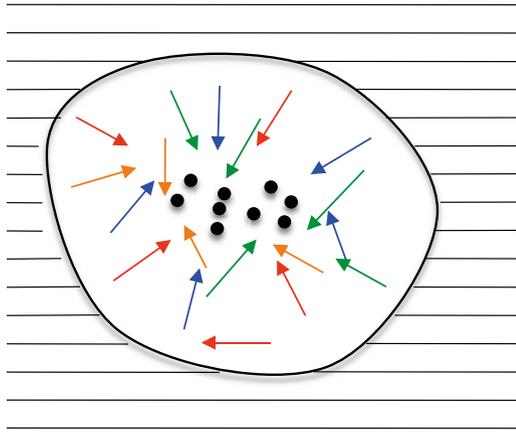


Figure 1. Le problème considéré par Einstein : une assemblée d'atomes indépendants est éclairée par le rayonnement d'un corps noir à température T . Cette assemblée d'atomes va-t-elle se thermaliser avec le corps noir, aussi bien en ce qui concerne ses degrés de libertés internes qu'externes ?

Einstein considère une collection d'atomes éclairés par un rayonnement de type corps noir à température T (figure 1). Son but est de modéliser la manière selon laquelle les atomes et le rayonnement peuvent échanger de l'énergie. La seule contrainte qu'il s'impose est la cohérence de la physique statistique : il faut que la répartition des populations moyennes des différents niveaux d'énergie des atomes soit une distribution de Boltzmann avec la même température T que le rayonnement. Dans un modèle d'atome à deux niveaux, avec un état fondamental g et un état excité e séparés une énergie $\hbar\omega_A$ (figure 2, gauche), le rapport des populations $P_{g,e}$ doit être tel que :

$$\frac{P_e}{P_g} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}\right). \quad (2)$$

I.1 Processus élémentaires et état d'équilibre

Pour expliquer comment un tel état d'équilibre peut être obtenu, Einstein étudie la compétition entre processus d'absorption de photons¹ et processus d'émission :

— Si l'atome est dans l'état fondamental, il peut absorber un photon et passer dans l'état excité (figure 3). Einstein postule que la probabilité pour que ce processus se produise pendant un intervalle de temps infinitésimal dt est proportionnelle à dt et à la densité d'énergie du rayonnement ρ , prise à la fréquence² de résonance atomique ω_A :

(1) Einstein n'utilise pas le terme de photon, qui ne sera introduit que bien plus tard (1926) par Lewis.

(2) Nous utiliserons fréquemment la dénomination usuelle *fréquence* pour la quantité ω , bien qu'il s'agisse en réalité d'une *pulsation*, la fréquence étant $\omega/2\pi$.

$$dP_{g \rightarrow e} = B \rho(\omega_A) dt, \quad (3)$$

où B est un coefficient indéterminé à ce stade.

— Si l'atome est dans l'état excité, il peut tomber sur l'état fondamental en émettant un photon. La probabilité pour que cette émission se produise pendant dt est la somme de deux termes. D'une part, même si aucun photon n'est initialement présent, l'atome peut passer de e à g par émission spontanée (figure 4) avec la probabilité :

$$dP_{e \rightarrow g}|_{\text{spont.}} = A dt, \quad (4)$$

c'est-à-dire une loi qui, comme Einstein le remarque, est identique à celle de la décroissance radioactive. D'autre part, l'émission peut être stimulée par le rayonnement déjà présent à la fréquence atomique, avec une probabilité

$$dP_{e \rightarrow g}|_{\text{stim.}} = B' \rho(\omega_A) dt. \quad (5)$$

L'évolution des probabilités $P_{g,e}$ est alors donnée par une équation de taux :

$$\frac{dP_g}{dt} = -B \rho(\omega_A) P_g + [A + B' \rho(\omega_A)] P_e, \quad P_g + P_e = 1, \quad (6)$$

qui entraîne que ces probabilités tendent vers l'état stationnaire

$$P_g = \frac{A + B' \rho(\omega_A)}{A + (B + B') \rho(\omega_A)}, \quad P_e = \frac{B \rho(\omega_A)}{A + (B + B') \rho(\omega_A)}, \quad (7)$$

avec le temps caractéristique

$$\tau_{\text{int.}} = [A + (B + B') \rho(\omega_A)]^{-1}. \quad (8)$$

L'indice « int. » signifie qu'il s'agit ici du temps de mise à l'équilibre des variables internes, différent de celui que nous rencontrerons plus loin pour la mise à l'équilibre du centre de masse de l'atome.

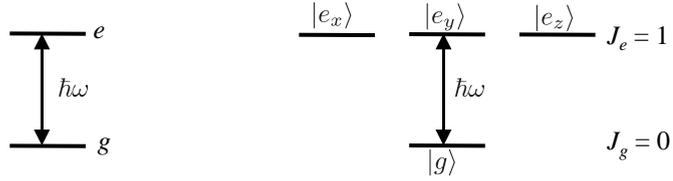


Figure 2. Les deux modèles de transition atomique considérés dans cet article. A gauche, atome à deux niveaux ; à droite, transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ permettant de prendre correctement en compte les phénomènes liés à la polarisation de la lumière. On prendra comme base du niveau excité les états $|e_j\rangle$ dont la projection du moment cinétique sur l'axe j est nulle ($j = x, y, z$).

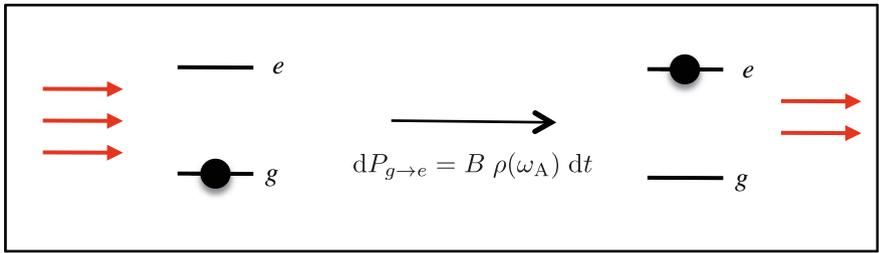


Figure 3. Processus d'absorption.

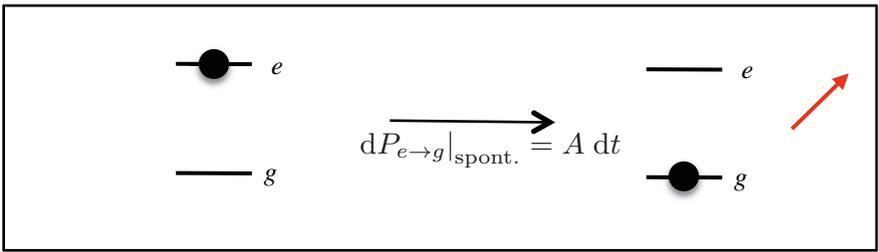


Figure 4. Processus d'émission spontanée : le photon est émis dans une direction aléatoire.

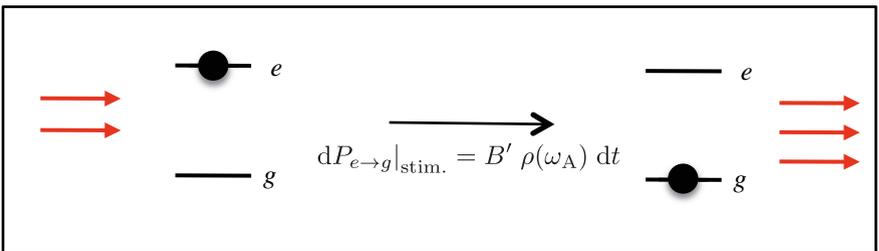


Figure 5. Processus d'émission stimulée.

I.2 Contraintes sur les coefficients d'Einstein

La comparaison de l'état stationnaire trouvé en (7) avec le résultat attendu pour l'équilibre thermodynamique (2) entraîne la contrainte suivante

$$\frac{B \rho(\omega_A)}{A + B' \rho(\omega_A)} = \exp(-\hbar\omega_A/k_B T), \quad (9)$$

qui doit être satisfaite à toute température T , les coefficients A , B , B' étant quant à eux indépendants de la température.

Prenons d'abord la limite haute température, pour laquelle $\rho(\omega) \rightarrow +\infty$: on en déduit immédiatement :

$$B' = B. \quad (10)$$

Les processus d'absorption et d'émission stimulée sont donc intimement liés.

Plus généralement, la contrainte (9) pourra être satisfaite si la densité d'énergie $\rho(\omega_A)$ du rayonnement est égale à :

$$\rho(\omega_A) = \frac{A/B'}{\exp(\hbar\omega_A/k_B T) - 1}. \quad (11)$$

Cette relation est compatible avec la loi de Planck donnée en (1) pourvu que le rapport A/B' soit égal à

$$\frac{A}{B'} = \frac{\hbar\omega_A^3}{\pi^2 c^3}. \quad (12)$$

Avec les contraintes (10) et (12), les hypothèses d'Einstein concernant l'absorption et l'émission de lumière par l'atome conduisent donc bien à une mise en équilibre thermodynamique des populations des niveaux d'énergie atomique avec le rayonnement du corps noir. Einstein conclut son article de 1916 en remarquant que, bien que la vérification de cette mise à l'équilibre ne constitue pas une preuve de validité rigoureuse des hypothèses (3-4-5), il y a une forte probabilité pour que ces processus soient effectivement à la base d'une future construction théorique. Par ailleurs, il note que les coefficients A , B et B' pourraient être calculables *ab initio*, et donc les relations (10,12) testées, si l'on disposait « d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique compatible avec l'hypothèse quantique ». C'est précisément ce que nous allons faire au paragraphe suivant.

Remarque : le cas de niveaux dégénérés. Dans son étude, Einstein considère également le cas où les niveaux d'énergie sont dégénérés. En notant d_e et d_g ces dégénérescences, un raisonnement similaire au précédent conduit à

$$d_g B = d_e B', \quad \frac{A}{B'} = \frac{\hbar \omega_\Lambda^3}{\pi^2 c^3}. \quad (13)$$

Nous rencontrons plus loin le cas d'une transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$, pour laquelle $d_g = 1$ et $d_e = 3$. L'équation d'évolution de la population P_g du niveau g , donnée en (6) pour un système à deux niveaux, devient alors en utilisant $B = 3B'$:

$$\frac{dP_g}{dt} = A \left\{ -3 \frac{B'}{A} \rho(\omega_\Lambda) P_g + \sum_j \left[1 + \frac{B'}{A} \rho(\omega_\Lambda) \right] P_{e,j} \right\}, \quad (14)$$

où l'indice j repère les trois sous-niveaux composant le niveau excité e . Nous verrons un peu plus loin [eq. (33)] une écriture plus compacte de cette relation en terme de nombre de photons par mode.

2. L'approche quantique

Dans ce paragraphe, nous allons reformuler le traitement d'Einstein pour l'absorption et l'émission de lumière par un atome dans un champ lumineux isotrope et incohérent, en nous appuyant sur le formalisme quantique « moderne ». Nous allons utiliser la notion de nombre moyen \bar{n} de photons par mode, légèrement plus facile à manipuler que la densité d'énergie ρ , et considérer une transition atomique réaliste pour laquelle nous pourrions traiter l'interaction atome-champ à partir de la règle d'or de Fermi.

2.1 Densité d'énergie et nombre de photons par mode

Pour retrouver en langage quantique « moderne » les coefficients A et B introduits par Einstein, commençons par relier la densité d'énergie $\rho(\omega)$ au nombre moyen de photons par mode \bar{n} pour un champ électromagnétique confiné dans une boîte de volume L^3 . On considère des conditions aux limites périodiques dans cette boîte, de sorte que les modes du champ sont repérés par leur vecteur d'onde k et leur polarisation ϵ , avec

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = x, y, z \quad (15)$$

et $\epsilon \perp k$. L'énergie totale du champ s'écrit en fonction de $\rho(\omega)$ sous la forme

$$E = L^3 \int_0^{+\infty} \rho(\omega) d\omega \quad (16)$$

et s'exprime d'autre part en terme de l'occupation des modes

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \hbar\omega \bar{n}_{\mathbf{k}, \epsilon}, \quad \omega = ck. \quad (17)$$

Remplaçons la somme discrète par une intégrale dans cette dernière expression, et supposons que la population $\bar{n}_{\mathbf{k}, \epsilon}$ d'un mode ne dépend que de la fréquence ω de ce mode, et est indépendante de la polarisation. On a alors

$$E = 2 \times \frac{L^3}{8\pi^3} \int_0^{+\infty} \hbar\omega \bar{n}(\omega) 4\pi k^2 dk, \quad (18)$$

où le facteur 2 correspond à la somme sur les deux polarisations indépendantes associées à un vecteur k donné. La comparaison de (16) et (18) donne :

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \bar{n}(\omega), \quad (19)$$

soit pour la loi de Planck :

$$\bar{n}(\omega, T) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (20)$$

Si l'on reprend le raisonnement d'Einstein en terme du nombre de photons par mode \bar{n} plutôt que de la densité d'énergie ρ , on est alors conduit à remplacer le coefficient B par le coefficient \tilde{B} tel que

$$B \rho(\omega_A) = \tilde{B} \bar{n}(\omega_A), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tilde{B} = B \frac{\hbar\omega_A^3}{\pi^2 c^3} \quad (21)$$

et idem pour B' . Les contraintes (13) pour atteindre l'équilibre thermodynamique se résument alors à :

$$d_g \tilde{B} = d_e \tilde{B}' \quad \text{et} \quad A = \tilde{B}'. \quad (22)$$

2.2 Transition atomique modèle

Pour pouvoir prendre en compte de manière satisfaisante la nature vectorielle du champ électromagnétique, il est préférable de considérer une structure de niveau légèrement plus compliquée que l'atome à deux niveaux de la section précédente. Nous allons nous intéresser ici à une transition entre un niveau fondamental de moment cinétique nul, donc non dégénéré, et un niveau excité de moment cinétique unité, donc dégénéré trois fois (figure 2, droite). Une base possible de ce niveau excité est obtenue en choisissant un trièdre de référence $u_p, j = x, y, z$, et en considérant les trois états Zeeman orthogonaux $|e_j\rangle$ ayant chacun une projection de moment cinétique nulle le long de l'axe j : $(\hat{J} \cdot u_j) |e_j\rangle = 0$

Le couplage atome-rayonnement s'écrit à l'approximation dipolaire électrique et à l'approximation du champ tournant

$$\hat{V} = d \left(\sum_j \mathbf{u}_j |g\rangle \langle e_j| \right) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(-)} + \text{H.c.} \quad (23)$$

où d est le dipole atomique réduit caractérisant la transition atomique. L'opérateur champ électrique s'écrit en terme des opérateurs de création ($a_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger$) et de destruction ($a_{\mathbf{k},\epsilon}$) d'un photon dans un mode donné :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)} = \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \mathcal{E}_k a_{\mathbf{k},\epsilon}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}, \quad \hat{\mathbf{E}}^{(+)} = \left(\hat{\mathbf{E}}^{(-)} \right)^\dagger, \quad \mathcal{E}_k = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}. \quad (24)$$

2.3 Utilisation de la règle d'or de Fermi

Nous allons maintenant déterminer complètement les coefficients d'Einstein en utilisant l'électrodynamique quantique. Nous allons utiliser la règle d'or de Fermi [3] qui donne, à l'ordre le plus bas non nul, la probabilité par unité de temps pour passer d'un état initial donné vers un continuum d'états.

Décrivons par exemple un processus d'émission, spontanée ou stimulée. L'état initial correspond à l'atome placé dans un de ses états excités $|e_j\rangle$ en présence d'un état donné du champ électromagnétique. Cet état est caractérisé par l'ensemble des nombres d'occupation $\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}$ des modes du rayonnement :

$$|\Psi_{\text{ini}}\rangle = |e_j, \{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}\rangle. \quad (25)$$

L'état final correspond à l'atome dans son état fondamental, en présence d'un état du champ $\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}$:

$$|\Psi_{\text{fin}}\rangle = |g, \{n'_{k,\epsilon}\}\rangle, \quad (26)$$

où tous les $n'_{k,\epsilon}$ sont égaux aux $n_{k,\epsilon}$, sauf un qui est augmenté d'une unité, correspondant à l'émission d'un photon dans ce mode particulier³ :

$$n'_{k_0,\epsilon_0} = n_{k_0,\epsilon_0} + 1, \quad n'_{k,\epsilon} = n_{k,\epsilon} \quad \text{si } (k, \epsilon) \neq (k_0, \epsilon_0). \quad (27)$$

La probabilité de transition par unité de temps depuis l'état Ψ_{ini} vers le continuum d'états Ψ_{fin} est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \left| \langle \Psi_{\text{fin}} | \hat{V} | \Psi_{\text{ini}} \rangle \right|^2 \delta(E_{\text{fin}} - E_{\text{ini}}), \quad (28)$$

ce qui se calcule de manière explicite en terme d'une somme sur le mode k_0, ϵ_0 dont la population a été augmentée d'une unité :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{k_0,\epsilon_0} d^2 \mathcal{E}_{k_0}^2 (\epsilon_0 \cdot \mathbf{u}_j)^2 (n_{k_0,\epsilon_0} + 1) \delta(\omega_0 - \omega_A), \quad (29)$$

où nous avons utilisé

$$\langle \{n'_{k,\epsilon}\} | a_{k_0,\epsilon_0}^\dagger | \{n_{k,\epsilon}\} \rangle = \sqrt{n_{k_0,\epsilon_0} + 1}. \quad (30)$$

Le calcul de la somme (29), que l'on remplace par une intégrale comme en (18), est un « classique » des cours d'optique quantique. Nous supposons comme précédemment que la population moyenne d'un mode (k, ϵ) ne dépend que de la fréquence de ce mode : c'est l'hypothèse d'un état isotrope pour le champ. Donnons simplement le résultat, une fois la moyenne prise sur l'état initial Ψ_{ini} :

$$\mathcal{P}_{\text{émission}} = [\bar{n}(\omega_A) + 1] \Gamma, \quad \Gamma = \frac{d^2 \omega_A^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}, \quad (31)$$

où la quantité Γ est la largeur naturelle de l'état excité, c'est-à-dire la probabilité par unité de temps pour que l'atome se désexcite si le rayonnement est vide de photons.

(3) On ne s'intéresse ici qu'à l'ordre le plus bas, donné par la règle d'or de Fermi. Des processus d'ordre supérieur correspondraient à une diffusion multiple de photons par l'atome, avec plusieurs $n'_{k,\epsilon}$ différents des $n_{k,\epsilon}$.

Un calcul en tout point similaire donne la probabilité par unité de temps pour qu'un atome initialement dans l'état fondamental absorbe un photon et passe dans un des trois états excités :

$$\mathcal{P}_{\text{absorption}} = 3 \bar{n}(\omega_A) \Gamma. \quad (32)$$

L'équation d'évolution d'une des populations, P_g par exemple, est alors donnée par l'équation

$$\dot{P}_g = -3\bar{n} \Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1) \Gamma P_{e_j}, \quad (33)$$

où l'on a posé pour simplifier $\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_A)$. Cette équation est formellement identique à celle que nous avons écrite en (14) à partir du raisonnement d'Einstein, mais son écriture est nettement plus compacte grâce à l'utilisation de la variable \bar{n} au lieu de la densité d'énergie ρ . L'état stationnaire

$$P_g = \frac{\bar{n} + 1}{4\bar{n} + 1}, \quad P_{e_j} = \frac{\bar{n}}{4\bar{n} + 1}, \quad (34)$$

est atteint en un temps de l'ordre de

$$\tau_{\text{int}} = \frac{\Gamma^{-1}}{4\bar{n} + 1}. \quad (35)$$

La structure du résultat, avec les termes d'absorption, d'émission stimulée et d'émission spontanée, correspond bien au résultat pressenti par Einstein avec

$$A = \Gamma. \quad (36)$$

En particulier, à l'équilibre, le rapport entre la population d'un état excité et celle de l'état fondamental :

$$\frac{P_{e_j}}{P_g} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \quad (37)$$

est égal au résultat attendu

$$\frac{P_{e_j}}{P_g} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}\right) \quad (38)$$

si on injecte la loi du corps noir donnée en (20).

Le traitement que nous venons de faire répond donc au souhait d'Einstein quand il écrivait la phrase déjà citée : les coefficients A et B peuvent effectivement être calculés *ab initio*, et donc la relation (12) testée, car on dispose « d'une version modifiée de l'électrodynamique et de la mécanique, compatible avec l'hypothèse quantique ». En d'autres termes, nous avons vérifié la relation de proportionnalité entre A et B , ainsi que la relation $B = 3B'$ à partir des premiers principes de l'électrodynamique quantique. La cohérence de l'interaction matière-rayonnement et de la thermodynamique est donc bien assurée, au moins en ce qui concerne la dynamique atomique interne.

3. Le mouvement brownien

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à la manière selon laquelle les variables atomiques internes, c'est-à-dire les populations des états g et e , atteignent l'équilibre thermique compatible avec la température imposée par le rayonnement du corps noir. Dans la suite de cet article, nous allons considérer le mouvement du centre de masse de l'atome et vérifier que l'état stationnaire de ce mouvement est également compatible avec l'équilibre thermique à température T . Plus précisément, nous voulons vérifier que la distribution de probabilité stationnaire pour l'impulsion de l'atome est la gaussienne

$$P_{\text{stat.}}(\mathbf{p}) \propto e^{-\mathbf{p}^2/2p_0^2} \quad (39)$$

avec

$$\frac{p_0^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T. \quad (40)$$

La thermalisation de l'atome dans le rayonnement résulte de la succession des processus d'absorption et d'émission de photons par l'atome. Comme chaque processus s'accompagne d'un changement de l'impulsion du centre de masse atomique, la situation est voisine de celle du mouvement brownien : l'atome joue le rôle de la particule brownienne et les photons du rayonnement du corps noir jouent le rôle des molécules du fluide. Les outils développés pour l'étude du mouvement brownien sont donc tout à fait adaptés pour étudier le problème qui nous intéresse ici et nous allons les résumer brièvement dans les paragraphes qui suivent (pour en savoir plus, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de Van Kampen [20]). Nous reviendrons ensuite au problème de la thermalisation de l'atome dans le rayonnement thermique.

3.1 L'approche « équation de Langevin »

On suppose dans le cadre de cette approche que l'équation du mouvement de la particule brownienne comporte deux forces :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha\mathbf{p} + \mathbf{F}(t). \quad (41)$$

La première force, déterministe, correspond à un frottement fluide qui amortit l'impulsion en une durée caractéristique α^{-1} . La seconde force $\mathbf{F}(t)$, appelée *force de Langevin*, est aléatoire et caractérisée par ses propriétés statistiques. L'équation (41) est donc une équation différentielle stochastique.

En pratique, on impose les deux premiers moments de la force aléatoire $\mathbf{F}(t)$:

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0, \quad \langle F_i(t)F_j(t') \rangle = 2D_p \delta_{i,j} \delta(t-t'), \quad i, j = x, y, z, \quad (42)$$

où les moyennes sont prises sur différentes réalisations du désordre associé aux positions et vitesses des molécules du fluide. Le coefficient D_p est appelé *coefficient de diffusion en impulsion*, pour une raison qui va apparaître un peu plus loin.

Nous allons maintenant montrer que les deux coefficients α et D_p intervenant dans (41-42) sont reliés si l'on impose que l'état stationnaire de la distribution en impulsion de la particule corresponde à l'équilibre thermique, c'est-à-dire :

$$\left\langle \frac{p_i^2}{2M} \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad i = x, y, z. \quad (43)$$

Pour trouver cette relation, intégrons l'équation du mouvement (41) entre l'instant initial $t = 0$ et un instant t quelconque :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (44)$$

En moyennant cette équation sur différentes réalisations du désordre, on trouve :

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle e^{-\alpha t}. \quad (45)$$

L'impulsion moyenne de la particule tend donc vers 0 avec le temps caractéristique α^{-1} .
Considérons maintenant l'évolution du carré d'une composante de l'impulsion et prenons
à nouveau la moyenne sur le désordre :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} &= 2\langle p_j(t) \frac{dp_j}{dt} \rangle \\ &= -2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle + 2\langle p_j(t) F_j(t) \rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Le deuxième terme se calcule⁴ en injectant le résultat (44) :

$$\begin{aligned} \langle p_j(t) F_j(t) \rangle &= \langle p_j(0) F_j(t) \rangle e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \langle F_j(t') F_j(t) \rangle dt' \\ &= 0 + 2D_p \int_0^t e^{-\alpha\tau} \delta(\tau) d\tau \\ &= D_p \quad (\text{pour } t > 0). \end{aligned} \quad (47)$$

L'impulsion quadratique moyenne évolue donc sous l'effet de deux termes :

$$\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p. \quad (48)$$

Le premier terme correspond à une décroissance exponentielle due à la dissipation, et
le second correspond à une croissance linéaire en temps due aux fluctuations de la force
de Langevin. La pente de cette croissance est $2D_p$, d'où l'appellation *coefficient de diffusion
en impulsion* pour D_p . L'équilibre entre dissipation et fluctuations est atteint en un temps
caractéristique $(2\alpha)^{-1}$ et correspond à

$$\langle p_j^2 \rangle_{\text{stat.}} = \frac{D_p}{\alpha}. \quad (49)$$

Si le bain de molécules dans lequel la particule brownienne est plongée est à la tempéra-
ture T , l'équilibre thermodynamique (43) sera atteint si

$$\frac{\langle p_j^2 \rangle}{2M} = \frac{1}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad \frac{D_p}{M\alpha} = k_B T. \quad (50)$$

Deux situations sont alors possibles :

- Dans une modélisation phénoménologique du mouvement brownien, on
peut estimer le coefficient de friction α à partir de la loi de Stokes, et on impose la
valeur du coefficient de diffusion en impulsion pour que (50) soit satisfaite.

(4) On utilise la relation $\int_0^\infty f(x) \delta(x) dx = 1/2 f(0)$

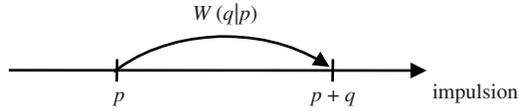


Figure 6. Marche aléatoire dans l'espace des impulsions (modèle unidimensionnel) ; la quantité $W(q|p)$ représente la probabilité de transition par unité de temps pour un saut d'amplitude q partant de l'impulsion p .

- Si on dispose d'un modèle microscopique de l'interaction entre particule brownienne et molécules du fluide, on peut calculer séparément α et D_p : la vérification de la relation (50) est alors un test de la cohérence du modèle.

C'est cette deuxième éventualité que nous allons rencontrer dans ce qui suit. Nous serons donc en mesure de faire ce « test de cohérence » pour la thermalisation du mouvement atomique dans le rayonnement du corps noir.

3.2 L'approche « équation de Fokker-Planck »

L'approche en terme d'équation de Langevin nous a permis de déterminer les deux premiers moments de la distribution en impulsion. On pourrait itérer cette démarche pour obtenir tous les moments, caractériser ainsi l'état stationnaire et vérifier qu'il s'agit bien d'une gaussienne. Toutefois, il est plus rapide d'utiliser pour cela une autre approche, consistant à établir l'équation d'évolution de la distribution en impulsion $\mathcal{P}(p, t)$.

Pour simplifier l'écriture, considérons un problème à une dimension de sorte que l'impulsion p est maintenant un scalaire. Nous nous intéressons à une classe de problèmes pour lesquels l'évolution de $\mathcal{P}(p, t)$ est décrite par une équation pilote du type

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = - \left(\int W(q|p) dq \right) \mathcal{P}(p, t) + \int W(q|p-q) \mathcal{P}(p-q, t) dq. \quad (51)$$

La signification de cette équation est la suivante. La particule brownienne étant initialement dans l'état p , elle a la probabilité $W(q|p) dt$ de gagner l'impulsion q pendant l'intervalle de temps dt . La quantité $W(q|p)$ est donc la probabilité de transition par unité de temps pour un saut d'amplitude q partant de p (figure 6). Le premier terme de (51) correspond au départ total depuis la classe d'impulsion p par des gains d'impulsion q . Le deuxième terme correspond à l'alimentation de la classe d'impulsion p par des sauts d'amplitude q partant de l'impulsion $p-q$. On vérifiera que la normalisation de $\mathcal{P}(p, t)$, c'est-à-dire $\int \mathcal{P}(p, t) dp = 1$, est bien préservée par cette évolution.

Toute la physique du problème est contenue dans le choix de la fonction $W(q|p)$. Par exemple, pour un problème présentant de la friction fluide, cette fonction devra être telle que, pour $p > 0$, les sauts avec $q < 0$ seront favorisés par rapport aux sauts avec $q > 0$ (et inversement pour une impulsion $p < 0$), pour que l'impulsion de la particule soit en moyenne ramenée vers 0.

Faisons maintenant l'hypothèse de sauts d'amplitude faible : nous supposons plus précisément que $W(q|p)$ est piquée autour de la valeur $q = 0$ avec une largeur caractéristique q_c , tout en variant doucement avec l'impulsion de départ p . Supposons par ailleurs que la distribution en impulsion \mathcal{P} est une fonction lentement variable de p à l'échelle de q_c . En particulier q_c doit être petit devant la largeur $\sqrt{Mk_B T}$ attendue pour $\mathcal{P}(p)$ à l'équilibre thermodynamique. Nous allons donc faire un développement du terme intervenant dans le deuxième membre de (51) :

$$\begin{aligned} W(q|p-q) \mathcal{P}(p-q, t) &= W(q|p) \mathcal{P}(p, t) - q \frac{\partial}{\partial p} [W(q|p) \mathcal{P}(p, t)] \\ &+ \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} [W(q|p) \mathcal{P}(p, t)] + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

On peut bien sûr pousser ce développement à un ordre arbitrairement élevé (développement de Kramers–Moyal), mais l'ordre deux sera suffisant pour ce qui suit. Injectons ce développement dans l'équation pilote (51). On obtient alors pour $\mathcal{P}(p, t)$ l'équation aux dérivées partielles (équation de Fokker–Planck) :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p} [\mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t)] + \frac{\partial^2}{\partial p^2} [\mathcal{D}(p) \mathcal{P}(p, t)], \quad (53)$$

avec

$$\mathcal{F}(p) = \int q W(q|p) dq, \quad \mathcal{D}(p) = \frac{1}{2} \int q^2 W(q|p) dq. \quad (54)$$

Le premier terme de (53) correspond à l'évolution de la densité de probabilité $\mathcal{P}(p, t)$ sous l'effet de la force $\mathcal{F}(p)$. Pour s'en convaincre, on peut évaluer l'évolution de l'impulsion moyenne $\langle p(t) \rangle = \int p \mathcal{P}(p, t) dp$ pour une distribution de probabilité relativement piquée autour de p_0 . On trouve après une intégration par parties :

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \int \mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t) dp \approx \mathcal{F}(p_0). \quad (55)$$

Le second terme de (53) correspond à une diffusion dans l'espace des impulsions. Pour le montrer, considérons à nouveau une distribution piquée autour de p_0 et étudions l'évolution de l'impulsion quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} &= 2 \int p \mathcal{F}(p) \mathcal{P}(p, t) dp + 2 \int \mathcal{D}(p) \mathcal{P}(p, t) dp, \\ &\approx 2p_0 \mathcal{F}(p_0) + 2\mathcal{D}(p_0). \end{aligned} \quad (56)$$

On retrouve effectivement une structure similaire à celle obtenue en (48) par l'approche équation de Langevin, avec les deux contributions de la force moyenne et de la diffusion en impulsion.

À ce stade, la classe de problèmes décrits par l'équation de Fokker–Planck est plus générale que celle décrite par l'équation de Langevin (41), puisque la force déterministe \mathcal{F} n'est pas nécessairement linéaire en impulsion et le coefficient de diffusion \mathcal{D} n'est pas nécessairement constant. Nous verrons dans la suite de ce cours que cette généralisation peut être très utile quand il s'agit de modéliser certains types de refroidissement lumineux. Pour l'instant, nous pouvons nous restreindre au cas simple

$$\mathcal{F}(p) = -\alpha p, \quad \mathcal{D}(p) = D_p, \quad (57)$$

et modéliser le mouvement brownien par l'équation de Fokker–Planck linéaire :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial (p \mathcal{P}(p, t))}{\partial p} + D_p \frac{\partial^2 \mathcal{P}(p, t)}{\partial p^2}. \quad (58)$$

Une solution stationnaire de cette équation est la gaussienne

$$\mathcal{P}_{\text{stat.}}(p) = \frac{1}{p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2p_0^2}, \quad \text{avec } p_0^2 = \frac{D_p}{\alpha}, \quad (59)$$

ce qui correspond bien à la distribution de Maxwell–Boltzmann attendue pour une particule en contact avec un réservoir à température T , pourvu que $k_B T = D_p / (\alpha) [cf. (50)]$.

4. Einstein 1917 : thermalisation du gaz

Dans son article de 1917, Einstein reprend les arguments développés en 1916 pour dégager les trois processus élémentaires de l'interaction atome-rayonnement : absorption, émission stimulée, émission spontanée. Il développe un raisonnement qui va venir conforter ses conclusions de 1916 : si l'on admet que ces trois processus sont présents, alors non seulement les variables atomiques internes (populations $P_{g,e}$) atteignent l'état d'équilibre thermique attendu, mais également la distribution en impulsion $\mathcal{P}(p)$ du centre de masse de l'atome. Pour établir ce résultat, Einstein développe un formalisme qui est le parent direct du refroidissement Doppler tel qu'on le met en œuvre dans les expériences

modernes. Le but de ce paragraphe est de présenter l'argument d'Einstein, avec des outils qui sont directement transposables à l'étude du refroidissement d'atomes par laser.

Nous allons utiliser ici une approche inspirée du mouvement brownien, en décomposant l'action mécanique du rayonnement sur l'atome en deux parties, d'une part une force de friction $-\alpha p$, d'autre part une diffusion en impulsion caractérisée par le coefficient D_p . Nous allons calculer séparément les deux coefficients α et D_p , puis vérifier que l'équilibre atteint correspond bien à ce qui est attendu, c'est-à-dire que $D_p/\alpha = Mk_B T$, où T est la température du corps noir. En pratique, le calcul du coefficient de diffusion est plus simple que celui du coefficient de friction et nous allons donc commencer par lui.

4.1 Diffusion en impulsion de l'atome

Considérons un atome initialement au repos ($p = 0$). Si l'image du mouvement brownien est correcte, l'évolution de son impulsion quadratique moyenne sous l'effet des chocs aléatoires constitués par les processus élémentaires d'absorption et d'émission est donnée par

$$\frac{d\langle p_j^2(t) \rangle}{dt} = -2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle + 2D_p. \quad (60)$$

L'impulsion quadratique moyenne commence donc par croître linéairement avec une pente D_p pour saturer aux temps longs à la valeur D_p/α .

Considérons un temps Δt suffisamment court pour que la contribution de la friction $-2\alpha \langle p_j^2(t) \rangle$ soit négligeable devant la diffusion, mais suffisamment long pour que plusieurs processus élémentaires puissent avoir lieu (nous vérifierons *a posteriori* qu'un tel intervalle de temps existe). Le taux R avec lequel ces processus se produisent vaut :

$$R = 3\bar{n} \Gamma P_g + \sum_j (\bar{n} + 1) \Gamma P_{e_j}. \quad (61)$$

En utilisant les valeurs stationnaires des populations données en (34), nous obtenons

$$R = 6\Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}. \quad (62)$$

Pendant l'intervalle de temps Δt , $\Delta N = R\Delta t$ processus élémentaires vont se produire, chacun correspondant à un choc transférant à l'atome une impulsion de module $\hbar k$ dans une direction aléatoire. L'impulsion de l'atome effectue donc une marche aléatoire de pas $\hbar k$ et de taux R . Au bout du temps Δt , l'impulsion moyenne de l'atome reste nulle, mais l'impulsion quadratique moyenne selon une des trois directions de l'espace a augmenté de

$$\langle p_j^2(\Delta t) \rangle = \frac{1}{3} \hbar^2 k^2 \Delta N. \quad (63)$$

On en déduit le coefficient de diffusion en impulsion

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{\langle p_j^2(\Delta t) \rangle}{\Delta t}, \quad \text{ou encore} \quad D_p = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{4\bar{n} + 1}. \quad (64)$$

4.2 Force de friction agissant sur l'atome

Considérons maintenant un atome en mouvement à la vitesse $v = p/M$. Nous supposons $v \ll c$ de sorte que la particule est non relativiste. L'origine de la force de friction est l'effet Doppler : dans le référentiel \mathcal{R} en mouvement avec l'atome, le rayonnement du corps noir n'est pas isotrope, contrairement à ce que l'on trouve dans le référentiel du laboratoire. Or l'atome « sonde » le rayonnement dans \mathcal{R} à sa fréquence de résonance ω_A ; il va donc interagir avec des modes du champ qui ne sont pas tous peuplés de manière égale.

Considérons par exemple deux modes de directions opposées, l'un allant dans le même sens que l'atome, l'autre dans le sens opposé, susceptibles d'interagir avec l'atome. Le mode allant dans le même sens que l'atome a pour fréquence ω_A dans le référentiel atomique, donc $\omega_A(1 + v/c)$ dans le référentiel du laboratoire. Le mode allant dans le sens opposé à l'atome a lui aussi pour fréquence ω_A dans le référentiel atomique, donc $\omega_A(1 - v/c)$ dans le référentiel du laboratoire. Or, le nombre de photons par mode $\bar{n}(\omega)$ est une fonction décroissante de ω pour le rayonnement du corps noir. Par conséquent

$$\bar{n}[\omega_A(1 - v/c)] > \bar{n}[\omega_A(1 + v/c)]. \quad (65)$$

L'atome en mouvement « voit » plus de photons résonnants venir à sa rencontre que de photons allant dans le même sens que lui : il y aura donc plus de chocs diminuant la vitesse atomique que de chocs qui l'augmentent : c'est l'origine de la force de friction.

Pour une évaluation quantitative du coefficient de friction α , prenons un atome bougeant selon une direction de l'espace, z par exemple. Notons v_z sa vitesse et supposons cet atome dans l'état fondamental g . Le changement moyen d'impulsion pendant un intervalle de temps infinitésimal Δt se calcule en utilisant un formalisme très similaire à celui qui nous a permis d'évaluer les probabilités d'absorption et d'émission à partir de la règle d'or de Fermi. Il s'obtient en considérant tous les gains d'impulsion $\hbar k$ résultant de l'absorption d'un photon dans un mode donné du champ k_0, ϵ_0 , accompagnée du passage de l'atome dans l'état $e_j, j = x, y, z$:

$$\Delta p_z = \Delta t \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_j \sum_{\mathbf{k}_0, \epsilon_0} \hbar k_z \left| \langle e_j, \{n'_{\mathbf{k}, \epsilon}\} | \hat{V} | g, \{n_{\mathbf{k}, \epsilon}\} \rangle \right|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\text{at}}). \quad (66)$$

La distribution de Dirac $\delta(\omega_0 - \omega_{\text{at}})$ vient sélectionner les modes de fréquence ω_{A} dans le référentiel atomique⁵, donc de fréquence $\omega_{\text{A}} + k_z v_z$ dans le référentiel du laboratoire. La population d'un mode correspondant à cette résonance vaut

$$\bar{n}(\omega_{\text{A}} + k_z v_z) \approx \bar{n}(\omega_{\text{A}}) + k_z v_z \left. \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{A}}}. \quad (67)$$

Le calcul de la somme sur les modes se fait alors d'une manière similaire à celui des taux d'absorption et d'émission. Après une algèbre quelque peu fastidieuse, on trouve pour les processus d'absorption :

$$\frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \hbar k^2 \Gamma \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} v_z \quad (68)$$

et un résultat identique, mais de signe opposé, pour les processus d'émission après moyenne sur les trois états e_j . Au final, en pondérant les changements d'impulsion entre absorption et émission par les populations stationnaires (34), on arrive à la force de friction :

$$F_z = -\alpha p_z \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Gamma}{4\bar{n} + 1} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}. \quad (69)$$

Le coefficient de friction est donc directement proportionnel à la dérivée de la population des modes par rapport à la fréquence, autour de la fréquence de résonance atomique. Ce résultat confirme l'intuition basée sur l'effet Doppler discutée plus haut [cf. (65)] : c'est le différentiel entre la population des modes allant dans le même sens que l'atome et ceux s'opposant à son mouvement qui crée la force de friction.

4.3 Equilibre thermique ?

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les résultats généraux de la théorie du mouvement brownien : le mouvement de l'atome est caractérisé par un coefficient de friction α et un coefficient de diffusion en impulsion D_p , de sorte que la distribution d'impulsion à l'équilibre est une gaussienne à laquelle on peut associer une température effective

$$k_{\text{B}} T_{\text{eff}} = \frac{D_p}{M\alpha} = \hbar \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)}{\left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|}. \quad (70)$$

(5) On peut également faire le raisonnement directement dans le référentiel du laboratoire. La distribution de Dirac exprimant la conservation de l'énergie sélectionne alors des modes de pulsation ω tel que $E_i - E_j = [p^2/2M + \hbar\omega] - [(p + \hbar k)^2/2M + \hbar\omega_{\text{A}}] = 0$, ce qui revient à prendre $\omega = \omega_{\text{A}} + k_z v_z$, à l'énergie de recul $\hbar^2 k^2/2M$ près, qui joue ici un rôle négligeable.

Si l'on injecte dans cette relation l'occupation des modes pour le rayonnement du corps noir :

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (71)$$

on vérifie que le modèle est bien cohérent sur le plan thermodynamique, c'est-à-dire que la température effective associée à la distribution en impulsion de l'atome coïncide avec la température du corps noir :

$$T_{\text{eff}} = T. \quad (72)$$

Pour Einstein, ce résultat constituait la confirmation des hypothèses faites sur la nature des échanges entre atomes et rayonnement. L'argument de 1916, qui portait sur les populations des états internes de l'atome, ne concernait que l'énergie. Au contraire, pour ce problème de la thermalisation, il est essentiel de poser que l'impulsion de l'atome augmente ou diminue de $\hbar k$ quand l'atome absorbe ou émet un photon. Einstein concluait son article sur deux remarques prémonitoires. D'une part, tout en reconnaissant les « faiblesses » de son modèle dans lequel « les instants et les directions des processus élémentaires γ sont livrés au hasard », il indiquait « j'ai pleinement confiance dans la sûreté de la démarche ici suivie ». Par ailleurs, il remarquait que presque toutes les théories du rayonnement thermique ne prenaient en compte que les échanges d'énergie entre lumière et matière, mais pas les échanges d'impulsion : « On s'y croit volontiers autorisé par le fait que les impulsions que transfère le rayonnement sont petites, et donc en réalité presque toujours négligeables devant les autres causes du mouvement ». Il continuait ensuite sur l'importance de prendre ces échanges d'impulsion en compte sur le plan théorique pour une théorie justifiée. Le refroidissement d'atomes par la lumière montre qu'il est également essentiel de prendre ces échanges en compte sur le plan pratique !

4.4 Ordres de grandeur et critère de validité

Nous avons obtenu dans ce qui précède la valeur du coefficient de friction pour le mouvement d'un atome dans le rayonnement d'un corps noir [eq. (69)]. Considérons un atome de sodium et modélisons cet atome par sa raie de résonance à $\lambda = 589$ nm. La température nécessaire pour atteindre $k_B T = \hbar\omega$ est considérable, de l'ordre de 25 000 Kelvins. Même s'il s'agit d'une situation peu réaliste (γ compris en ce qui concerne notre modélisation sous forme d'atome à deux niveaux), on peut calculer le coefficient de friction correspondant et on trouve un temps α^{-1} de l'ordre de 10 minutes. Pour un corps noir de température plus raisonnable, $k_B T \ll \hbar\omega$, le temps de thermalisation diverge exponentiellement :

$$\alpha^{-1} \approx \frac{M}{\hbar k^2} \frac{k_B T}{\hbar \Gamma} e^{\hbar\omega/k_B T}. \quad (73)$$

Un corps noir de 6000 Kelvins (un atome proche de la surface de soleil) conduit ainsi à $\bar{n}(\omega_A) = 0.017$ et à un temps de thermalisation de 40 minutes. La vitesse thermique $v_0 = \sqrt{k_B T/M}$ correspond dans ce cas à 1500 m/s, et la distance moyenne parcourue pendant un temps de thermalisation vaut 3600 km. Même dans un milieu astrophysique, il est probable que d'autres processus de thermalisation, comme les collisions avec d'autres atomes ou molécules, vont limiter le libre parcours moyen de notre atome de sodium à des valeurs bien inférieures. Tout l'intérêt de l'utilisation de sources laser quasi-résonnantes dans les laboratoires d'atomes froids sera de produire des valeurs de $\left| \frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \right|$ beaucoup plus grandes, le temps de thermalisation étant alors simplement le premier terme de (73), à savoir $M/\hbar k^2$.

Remarquons pour terminer que notre hypothèse de sauts d'amplitude faible, indispensable pour l'approche en terme de mouvement brownien, est bien vérifiée dans cet exemple. La vitesse de recul de l'atome de sodium quand il absorbe ou émet un photon vaut $v_r = \hbar k/M = 3$ cm/s, ce qui est effectivement très faible devant la largeur caractéristique de la distribution en vitesse thermique à 6000 K, de l'ordre de 1500 m/s.

5. Pour conclure : les mélasses optiques modernes

Soixante ans après l'étude d'Einstein que nous avons décrite, deux articles par Hänsch & Schawlow [11] d'une part et Wineland & Dehmelt [21] d'autre part, sont venus simultanément proposer d'exploiter la lumière des lasers accordables (une nouveauté en 1975 !) pour créer de nouveaux équilibres thermodynamiques. Dans le cadre de l'approche développée ici, le point-clé est qu'un laser monochromatique permet de réaliser une distribution spectrale de lumière avec un $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega}$ arbitrairement grand : c'est alors la largeur naturelle Γ du niveau excité de l'atome qui vient remplacer la largeur de la distribution du corps noir, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \omega} \longrightarrow \frac{\bar{n}}{\Gamma}. \quad (74)$$

En d'autres termes, il n'y a plus de température imposée « de l'extérieur » par la lumière incidente et ce sont les paramètres de la transition atomique utilisée qui déterminent la température d'équilibre.

Comme dans l'article d'Einstein, l'effet Doppler est à la base du refroidissement proposé par Hänsch & Schawlow [11] et Wineland & Dehmelt [21]. L'approche à suivre pour traiter le problème est donc très similaire à ce que nous avons vu pour le rayonnement du corps noir. On utilise la théorie du mouvement brownien pour déterminer à la fois le coefficient de friction et le coefficient de diffusion. Nous ne détaillerons pas cette approche ici, et nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple vers l'article de Gordon

& Ashkin [10]. Indiquons simplement les principaux résultats, en nous limitant à une excitation laser de faible intensité ($\bar{n} \ll 1$).

L'expression du coefficient de friction (69) devient en utilisant (74)

$$\alpha \sim \frac{\hbar k^2}{M} \bar{n}. \quad (75)$$

Le coefficient de diffusion est quant à lui inchangé par rapport à (64), soit pour $\bar{n} \ll 1$:

$$D_p \sim \hbar^2 k^2 \Gamma \bar{n}. \quad (76)$$

Le rapport de ces deux coefficients permet d'arriver immédiatement à la célèbre « limite Doppler » :

$$k_B T \sim \hbar \Gamma, \quad (77)$$

qui correspond pour des atomes alcalins à un domaine de température de l'ordre de la centaine de microkelvins.

Les premières mélasses optiques ont été réalisées par Chu, Hollberg, et al. [2] peu de temps après qu'on a réussi à arrêter des atomes par pression de radiation [9, 18]. La figure 7 montre une image d'une mélasse optique obtenue en 1987 dans le groupe de Bill Phillips avec des atomes de sodium [14]. Le volume central, de l'ordre du centimètre cube, contient 10^8 atomes.

Les premières mesures de température ont semblé confirmer la théorie du refroidissement Doppler [2]. Toutefois, on a réalisé assez vite que la situation était en fait plus complexe (et plus riche !). Les mesures précises de Lett, Watts, et al. [15] et Lett, Phillips, et al. [13] ont conduit à des résultats encore plus froids que la prédiction (77) : le refroidissement Doppler ne pouvait à lui seul expliquer le refroidissement observé.

Plusieurs modèles de refroidissement ont alors été développés, notamment le refroidissement Sisyphus [19, 6]. Leur point commun est une prise en compte plus fidèle de la structure de la transition atomique, allant au delà du modèle à deux niveaux. Ce fut le point de départ du refroidissement des atomes autour, voire en dessous, de la limite du recul d'un seul photon $k_B T \sim \hbar^2 k^2 / 2M$ [1, 4, 16], ce qui a ensuite ouvert la voie à la réalisation de gaz quantiques dégénérés, aussi bien bosoniques que fermioniques [12, 5]. Une nouvelle étape dans l'histoire déjà très riche de la physique atomique s'ouvrait alors...

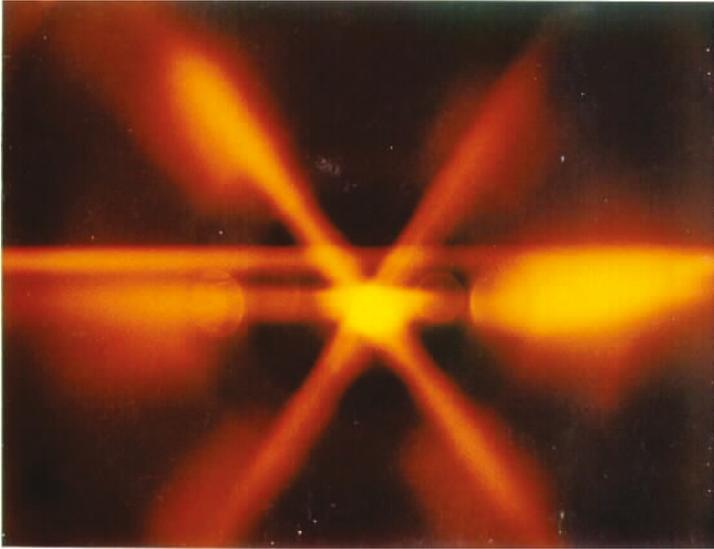


Figure 7. Mélasse d'atomes de sodium réalisée dans le groupe de W.D. Phillips (NBS-NIST).

Références

- [1] Chu, Steven. Nobel Lecture: The manipulation of neutral particles. *Reviews of Modern Physics*, 1998, vol. 70, n°3, p. 685.
- [2] Chu, Steven, Hollberg, Leo, Bjorkholm, John E., Cable, Alex et Ashkin, A. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Physical Review Letters*, 1985, vol. 55, n°1, p. 48.
- [3] Cohen-Tannoudji, Claude, Diu, Bernard et Laloë, Franck. *Mécanique quantique*. Hermann, 1973.
- [4] Cohen-Tannoudji, Claude N. Nobel Lecture: Manipulating atoms with photons. *Reviews of Modern Physics*, 1998, vol. 70, n°3, p. 707.
- [5] Cornell, Eric A. et Wieman, Carl E. Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 2002, vol. 74, n°3, p. 875.
- [6] Dalibard, Jean et Cohen-Tannoudji, Claude. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models. *Journal of the Optical Society of America B*, 1989, vol. 6, n°11, p. 2023.

- [7] Einstein, Albert. Strahlungs-emission und absorption nach der quantentheorie. *Deutsche Physikalische Gesellschaft*, 1916, vol. 18, p. 318.
- [8] Einstein, Albert. Zur Quantentheorie der Strahlung [traduction française par F. Balibar, B. Jech et O. Darrigol]. *Physikalische Zeitschrift*, 1917, vol. 18, p. 121.
- [9] Ertmer, W., Blatt, R., Hall, J. L. et Zhu, M. Laser manipulation of atomic beam velocities: demonstration of stopped atoms and velocity reversal. *Physical review letters*, 1985, vol. 54, n°10, p. 996.
- [10] Gordon, J. P. et Ashkin, A. Motion of atoms in a radiation trap. *Physical Review A*, 1980, vol. 21, n°5, p. 1606.
- [11] Hänsch, Theodor W. et Schawlow, Arthur L. Cooling of gases by laser radiation. *Optics Communications*, 1975, vol. 13, n°1, p. 68.
- [12] Ketterle, Wolfgang. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Reviews of Modern Physics*, 2002, vol. 74, n°4, p. 1131.
- [13] Lett, Paul D., Phillips, William D., Rolston, S. L., Tanner, C. E., Watts, R. N. et Westbrook, C. I. Optical molasses. *Journal of the Optical Society of America B*, 1989, vol. 6, n°11, p. 2084.
- [14] Lett, Paul D., Watts, Richard N., Westbrook, Christoph I., Phillips, William D, Gould, Phillip L. et Metcalf, Harold J. Observation of atoms laser cooled below the Doppler limit. *Physical Review Letters*, 1988a, vol. 61, n°2, p. 169.
- [15] Lett, Paul D., Watts, Richard N., Westbrook, Christoph I., Phillips, William D, Gould, Phillip L. et Metcalf, Harold J. Observation of atoms laser cooled below the Doppler limit. *Physical Review Letters*, 1988b, vol. 61, n°2, p. 169.
- [16] Phillips, William D. Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 1998, vol. 70, n°3, p. 721.
- [17] Planck, Max Karl Ernst Ludwig. Über eine verbesserung der wienschen spectralgleichung. *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.*, 1900, vol. 2, p. 202.
- [18] Prodan, John, Migdall, Alan, Phillips, William D., So, Ivan, Metcalf, Harold et Dalibard, Jean. Stopping atoms with laser light. *Physical review letters*, 1985, vol. 54, n°10, p. 992.
- [19] Ungar, P. Jeffery, Weiss, David S., Riis, Erling et Chu, Steven. Optical molasses and multilevel atoms: theory. *Journal of the Optical Society of America B*, 1989, vol. 6, n°11, p. 2058.
- [20] Van Kampen et Nicolaas Godfried. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Elsevier, 1992.
- [21] Wineland, D. J. et Dehmelt, H. « Proposed $10^{14}\Delta\nu < \nu$ laser fluorescence spectroscopy on Ti^+ mono-ion oscillator III ». *Bulletin of the Americal Physical Society*, 1975, vol. 20, p. 637.

10

Bohr's legacy in Cavity QED

Serge Haroche

Jean-Michel Raimond

LKB, ENS, 24 rue Lhomond, 75005, Paris, France
Collège de France, 11 Place Marcellin Berthelot, 75005, Paris, France

Abstract

Bohr played a central role in the interpretation of quantum mechanics. He based many discussions of its strange consequences on thought experiments. He imagined moving slit interferometers, able to record which-path information, he played with photon boxes, storing photons for such long times that they could be weighed. The technological progress provided by quantum physics itself now make it possible to realize some of these thought experiments. We describe in this paper a few experiments based on microwave Cavity Quantum Electrodynamics (CQED) techniques. We trap photons in boxes and weigh them with scales at the atomic level. We are able to count the number of photons in the box without absorbing them in an ideal Quantum Non Demolition measurement of the field intensity. We can record which-path information in an atomic interferometer and directly illustrate complementarity. We can also prepare mesoscopic quantum superpositions reminiscent of the famous Schrödinger cat. We can get insight into the decoherence of these states and into ways to protect them, for instance by quantum feedback strategies.

Foreword

This Chapter is reprinted verbatim from a contribution [1] entitled *Bohr's legacy in Cavity QED* published in the book *Niels Bohr, 1913-2013: Poincaré Seminar 2013*, Springer International Publishing (2013).

I. Introduction

This Poincaré seminar celebrates the hundredth anniversary of Bohr's model. Introducing Planck's discontinuity hypothesis in a planetary atomic model, Bohr has been able to predict for the first time the atomic line frequencies that eluded any classical interpretation so far. The Bohr's atom could emit or absorb radiation during a rather mysterious "quantum jump" between its quantized levels, leading to the emission or absorption of a photon with the energy of the atomic transition.

The Bohr model did not lead to a full-fledged atomic level theory, in spite of the heroic efforts of Bohr, Sommerfeld and others. The final solution to the atomic spectra clue was provided by the birth of modern quantum theory, a few years later. John Heilbron's contribution to this Volume will certainly cover this rich and complex history. Even if the name of Bohr is not associated to one of the main laws of quantum physics, as those of Heisenberg, Schrödinger, Dirac or Born, his role in the development of the theory and of its interpretation has been considerable.

The founding fathers lifted the veil over a rather counter-intuitive quantum world. The basic quantum phenomena, like state superposition, indeed escape any simple interpretation in terms of our macroscopic world common experience. There are, as Schrödinger once stated, many 'ridiculous' consequences of the quantum theory. Perhaps for the first time in the history of physics, the theory required an interpretation layer to link the mathematical objects of the formalism to the experimental observations.

The standard 'Copenhagen' interpretation was mainly established under the impetus and supervision of Bohr [2]. His (sometimes heated) discussions with colleagues (like Einstein) led to an increasingly clear and sound formulation of the quantum theory. These discussions often relied on the discussion of thought experiments. They enhanced the quantum phenomena up to a point where they could be grasped more intuitively.

The Heisenberg microscope proposed to locate a single electron with light, for a discussion of the unavoidable momentum perturbation due to a position measurement. Bohr proposed the moving slit interferometer (figure 1) to illustrate the rather complex concept of complementarity [3]. In this simple case, the moving slit recoils when diffracting the interfering particle. It thus records a 'which-path' information. The final motional state of the slit ideally unambiguously indicates the path followed by the particle in the interferometer. By a careful examination of Heisenberg uncertainty relations, Bohr concluded that the interference fringes then disappear. The particle (localized path) and wave (interference) characters of the quantum object cannot be observed simultaneously.

Another striking example of thought experiment is the 'photon box' (figure 2) imagined by Einstein and Bohr [4], once again in a heated debate on the Heisenberg uncertainty relations. They envisioned a box, covered with perfect mirrors, that could hold a photon for an arbitrary lapse of time. Weighing the box allows one to monitor the presence of the photon and to precisely determine its energy. The clockwork mechanism was supposed to leave the photon escape at a precisely defined time. About ten years later, Einstein and Bohr again debated the Einstein-Podolsky-Rosen situation [5, 6] illustrating in a vivid way the mind-boggling non-local character of quantum physics.

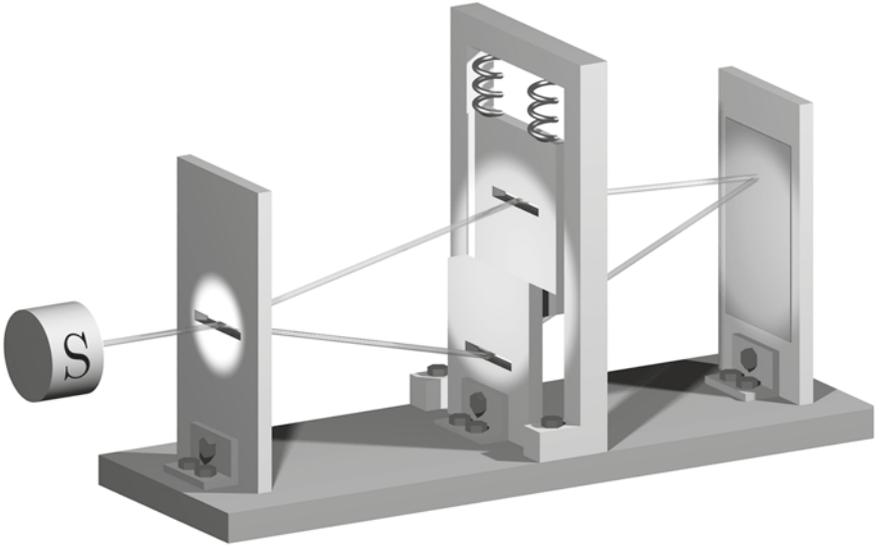


Figure 1. Boh's moving slit interferometer.

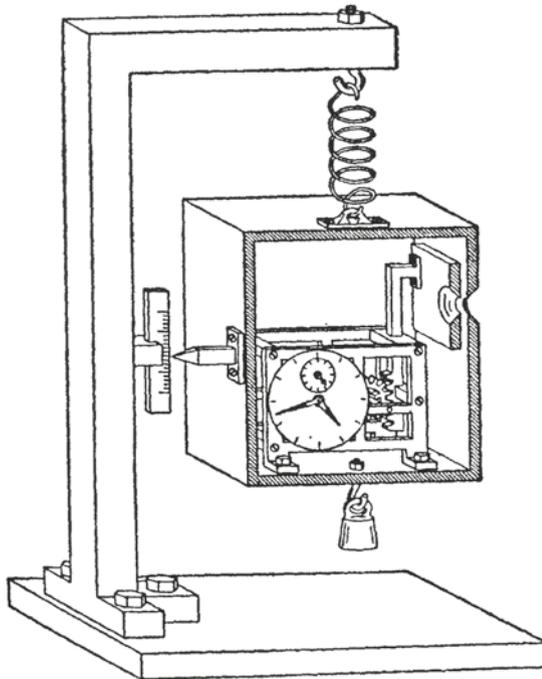


Figure 2. The photon box.

Under the guidance of Bohr, quantum theory got a firm standing and a clear, if counter-intuitive, interpretation. It led very rapidly to considerable developments. In less than 20 years, its founding fathers got an almost complete understanding of the bases of atomic, molecular and solid state physics. Immediately after World War II, the renormalization procedures allowed one to treat consistently quantum electrodynamics, providing us with one of the most predictive and precise physical theories so far.

The rise of the quantum also led to an impressive number of practical applications, with considerable societal and economical impact. The quantum understanding of solid-state conduction led eventually to the transistors, to the integrated circuits and finally to the modern computers and information processing devices. The quantum atom-field interaction led to the development of lasers, and hence of the fast communication technology. Atomic laser cooling and the Ramsey interferometric method [7], led to atomic clocks with such a precision that they would drift only by a few seconds over the full age of the universe [8]. Medical diagnostic also benefited considerably from the quantum with the MRI imaging [9], which relies on the quantum dance of nuclear spins in the magnetic field provided by a superconducting magnet, yet another quantum technology. A large fraction of our societies GDP, a large fraction of our own life expectancy, thus rely on technologies deriving directly from the quantum.

Of course, these developments had also a major impact on experimental physics. With lasers, computers and superconducting devices, we achieve an unprecedented level of control on the experiments. It is now possible to manipulate directly individual quantum systems, carefully screened from the parasitic influence of their environment. In other words, we are now able to realize some of the thought experiments proposed by Bohr and the founding fathers. We can operate single particle interferometers, we can store photons in boxes and weigh them, we can study non-local quantum states. These fascinating possibilities led to a considerable surge of interest for fundamental quantum physics, in a wide range of domains, from atomic physics and quantum optics to condensed matter physics.

Why should we devote efforts to these 'thought experiments made real', nearly a century after they were proposed? First because they put our understanding of the quantum in direct scrutiny. Realizing these experiments and finding that they indeed provide the expected 'ridiculous consequences' is the most stringent test quantum physics could pass. We can also use these situations to explore the limits of the quantum world. One of the main open questions is why the weird quantum features never emerge at our scale. There are no conspicuous non-local effects, even no state superpositions at our scale. This problem was vividly illustrated by Schrödinger in yet another famous thought experiment [10], in which an unfortunate cat was cast in a superposition of her dead and alive states. We can experiment with mesoscopic quantum systems and prepare them in state superpositions reminiscent of this cat's fate. We can directly study the decoherence mechanism transforming very rapidly these state superpositions into mere statistical mixtures.

Beyond such fundamental questions, these experiments also open the way to new applications of the quantum. Quantum-enabled metrology is promising for more precise clocks or sensors. Quantum information transmission and processing achieve feats beyond the reach of standard binary machines. In particular, quantum simulation opens fascinating routes for a better understanding of complex quantum systems.

Experiments on basic quantum physics is thus a thriving field worldwide. Cavity Quantum Electrodynamics (CQED) [11] belongs to this trend. It focuses on the matter-field coupling in the most extreme situation, where all matter has been removed but the last atom. The field is reduced to a single mode, stored in a high quality cavity, a modern equivalent of the Einstein-Bohr photon box. This mode contains only a few photons, one photon or even no photon at all. This situation implements thus one of the simplest non-trivial quantum systems, a spin-1/2 (the two-level atom) coupled to a one-dimensional harmonic oscillator (the mode). The experimental observations can thus be interpreted directly in terms of the most basic quantum postulates and can illustrate the most fundamental quantum behaviours.

Cavity QED has already a long history, starting from a seminal remark by Purcell [12] about the possibility to alter the spontaneous emission rate by imposing limiting conditions to the electromagnetic continuum. It now focuses on the 'strong coupling' regime, where the coherent atom-field coupling overwhelms the dissipative processes (atomic spontaneous emission or cavity losses). Cavity QED now comes in a variety of flavours [13]. Optical cavity QED studies atomic optical transitions coupled to cavities, for instance open Fabry Perot. It has important possible applications as a light-matter interface for quantum information transmission [14]. Solid state cavity QED couples artificial atoms, quantum dots for instance, to integrated cavities, with a considerable potential for applications [15]. The recent flavour of circuit-QED uses artificial atoms made up of superconducting circuits coupled to superconducting stripline resonators or closed cavity modes [16].

This Chapter will be devoted to the microwave Cavity QED flavour. It uses circular Rydberg atoms coupled to extremely high-Q superconducting cavities. The damping rate of both the atomic and field systems are extremely low, making it possible to achieve interesting quantum situations and to illustrate some of the original Bohr's proposals.

We will start, in Section 2 by rapidly reviewing the main tools of microwave CQED. We will in particular focus on the circular Rydberg atoms, which are the atomic levels closest to the Bohr's model. We will see that, according to Bohr's correspondence principle, nearly all of their properties can be computed classically. They are nevertheless ideal tools to unveil the quantum. We will also describe in this Section the Jaynes and Cummings model [17] describing the coherent atom-field coupling and we will give the master equation used to treat field relaxation.

The next Section (3) will be devoted to a very direct illustration of the original concept of quantum jumps. We will show that atoms, crossing one by one the cavity mode, can provide Quantum Non Demolition information about the photon number [18, 19]. We can use their detection at the exit of a Ramsey atomic interferometer to count the number of photons in the cavity without destroying them. This ideal photo-detection process obeys all postulates for a quantum measurement. It allows us to follow in real time the number of photons and to evidence the quantum jumps of light when photons escape, due to the unavoidable residual cavity losses. The statistical study of these jumps [20] provides an extremely stringent test of quantum relaxation models. We will also show that, using a quantum feedback scheme, we can counteract the effect of these jumps and maintain a constant photon number in the mode in spite of cavity losses [21, 22].

The last Section (4) deals with Bohr's complementarity, in a situation strongly reminiscent of the moving-slit interferometer (figure 1). We use a mesoscopic coherent field in the cavity as a path-recording device in the atomic Ramsey interferometer and show that interference and which-path information are incompatible [23]. We will show that the final field state in this experiment is a mesoscopic quantum superposition quite reminiscent of the famous Schrödinger cat. Monitoring the evolution of the cavity state by a variant of the QND procedure [24], we will be able to observe directly the decoherence process transforming rapidly this superposition into a mere statistical mixture. Section 5 will conclude this paper and present some perspectives for microwave cavity QED.

2. The tools of microwave CQED

The general scheme of our microwave cavity QED experiments is presented in figure 3. The circular Rydberg atoms are prepared by laser and radio-frequency excitation of a velocity-selected thermal rubidium beam in the box *B* (atomic velocity $v = 250$ m/s). The atoms interact with the field stored in the open Fabry-Perot superconducting cavity *C*. A coherent field can be injected in the cavity by the source *S*, coupled to the cavity mode by diffraction on the mirrors edges. The atoms are finally detected by efficient state-selective field ionization in *D*. Classical resonant microwave pulses applied by the source *S'* in the two low-*Q* cavities R_1 and R_2 can be used to manipulate the atomic state before or after the interaction with *C*. With $\pi/2$ pulses in R_1 and R_2 , we realize a Ramsey atomic interferometer. We will now briefly review the main components of this set-up, starting with the circular Rydberg atoms.

2.1 Circular Rydberg atoms: the Bohr model revived

A circular Rydberg state [25, 26] is a very high-lying alkali atom level, in which the single valence electron has been excited close to the ionization limit, in a state with a large principal quantum number n and a maximum value $\ell=|m|=n-1$ for the orbital, ℓ , and magnetic, m , quantum numbers (ℓ and m are defined with respect to the quantization axis Oz). This state will be denoted $|nC\rangle$. Typically, in our experiments we use two adjacent circular levels with principal quantum numbers 51 and 50, that we will also denote $|e\rangle=|51C\rangle$ and $|g\rangle=|50C\rangle$.

The electron orbits at distances much larger than the size of the singly charged ionic core of the alkali atom, which has a diameter of the order of a_0 and the electronic structure of a noble gas (krypton for rubidium). To an excellent approximation, this core behaves as a point charge, creating a nearly perfect $1/r$ potential for the valence electron. The energy of the circular states is thus given by the hydrogenic expression:

$$E_n = -\frac{R}{n^2}, \quad (1)$$

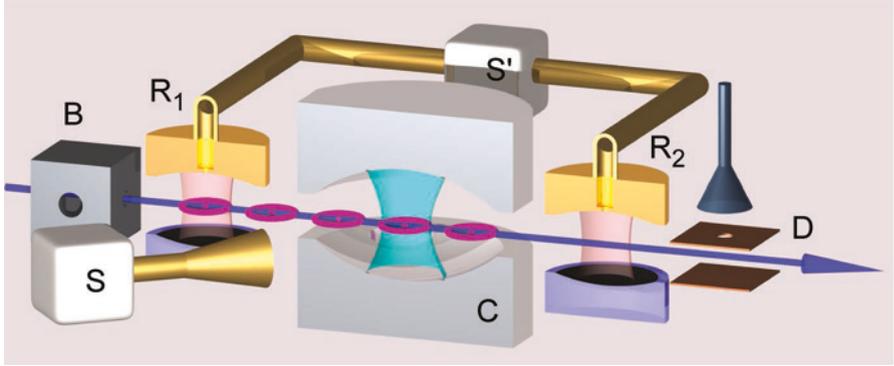


Figure 3. Scheme of the microwave CQED experiments.

where R is the Rydberg constant (we neglect for this simple discussion the contribution of the finite core mass).

The spherical harmonic of maximum ℓ and m values take a simple form, leading to the circular state wave function in spherical coordinates:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{(\pi a_0^3)^{1/2}} \frac{1}{n^n n!} \left(-\frac{r}{a_0} \sin \theta e^{i\phi} \right)^{n-1} e^{-r/na_0} . \quad (2)$$

Figure 4 shows a surface of equal probability density (50% of the maximum value) for $n = 50$. This surface defines a torus centred on a circular orbit, in the plane perpendicular to the quantization axis Oz . This orbital is indeed the atomic level closest to the circular orbits of the century-old Bohr model.

The relative dispersion of r , $\Delta r/r$, and the fluctuation of θ , $\Delta\theta$, are equal:

$$\Delta r/r = \Delta\theta \approx 1/\sqrt{2n} . \quad (3)$$

The higher the level, the tighter is the confinement around the Bohr orbit. This wave function provides a representation of the electron state as close as it can get to a classical description. The phase of the orbital motion remains completely undetermined and the electron delocalized along the orbit. The azimuthal localization of the electron is precluded by Heisenberg uncertainty relations.

The analogy with the classical orbit goes beyond this simple geometrical property. Since all quantum numbers are large, most features of circular Rydberg atoms can be explained by

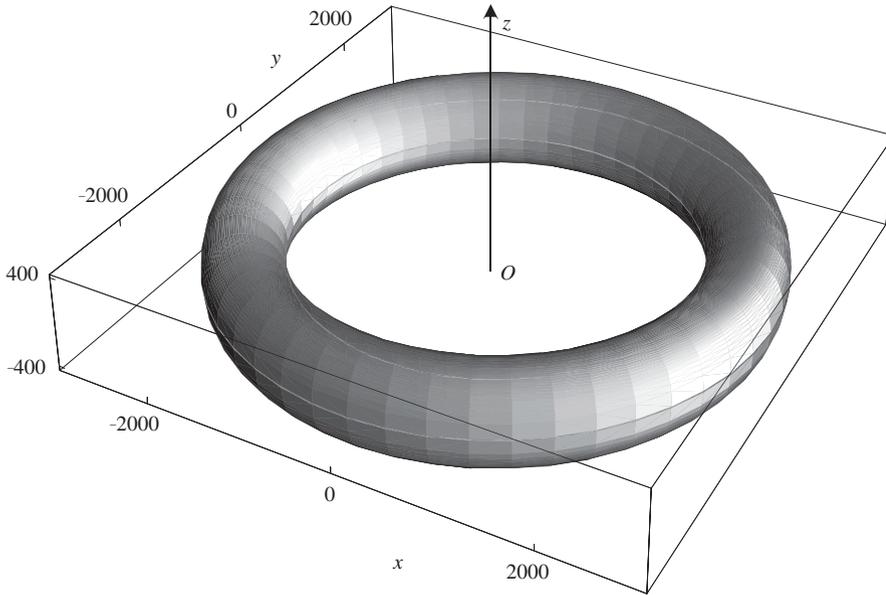


Figure 4. Surface of equal value (50 % of the maximum value) for the spatial probability distribution of the valence electron in $|g\rangle = |50C\rangle$. The dimensions are in units of the Bohr radius, a_0 .

classical arguments, as stated by the correspondence principle, another major contribution of Bohr to the development of quantum physics.

As a first example, let us consider the angular frequency $\omega_{nC,(n-1)C}$ of the transition between neighbouring circular states $|nC\rangle$ and $|(n-1)C\rangle$. It is, to the first non-vanishing order in $1/n$, obtained by differentiating the binding energy with respect to n :

$$\omega_{nC,(n-1)C} \approx 2 \frac{R}{\hbar} \frac{1}{n^3}. \quad (4)$$

The corresponding frequency is 51.099 GHz for the $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ transition. In a classical picture, this is the frequency of the orbital motion of the electron in a Bohr orbit. The n^{-3} dependence of $\omega_{nC,(n-1)C}$ can be interpreted in classical terms, by invoking Kepler's third law, which applies to all orbital motions in $1/r$ potentials. The period $2\pi/\omega_{nC,(n-1)C}$ of the electron must scale as the $3/2$ power of the orbit radius $a_0 n^2$. The relation between the Rydberg transition frequencies and the circular state sizes could thus have been derived by Kepler or Newton without any quantum consideration!

This simple analysis does not account for the fine or hyperfine structure contributions to the electron energy. These effects are very small in circular states. The fine structure,

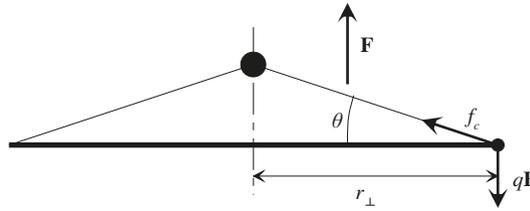


Figure 5. Classical Bohr orbit in an electric field. The field is vertical and the orbit is seen from the side, appearing as a thick line. The large black dot represents the ionic core.

due to relativistic corrections including spin– orbit coupling, scales as $1/n^5$. It is only a few hundred Hertz for $n = 50$. Hyperfine structures due to magnetic couplings between the atomic nucleus and the valence electron are three orders of magnitude smaller.

The $|nC\rangle \rightarrow |(n-1)C\rangle$ transition is σ^+ -circularly polarized. Its dipole matrix element d is:

$$d = a_0|q|n^2/\sqrt{2} , \tag{5}$$

where $|q|$ is the absolute value of the electron charge. This dipole is extremely large, 1770 atomic units for the $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ transition.

In the absence of external fields, the circular state is degenerate with a large number of non-circular levels having the same n and smaller ℓ and m values. A small perturbing electric or magnetic field, transverse to the Oz axis, would efficiently couple the circular state to the levels with $\ell = n - 2$, which would in turn be coupled to other levels with lower angular momentum. The circular orbit would be rapidly lost, the atom evolving into an uncontrolled superposition of non-circular states [27]. A perfect cancellation of the stray fields is impossible in practice, but the circular orbit can be ‘protected’ by subjecting the atom to a directing electric field, aligned with Oz . This field lifts the degeneracy between the circular level and the levels with $\ell = n - 2$. If it is much larger than the stray fields, the perturbing transitions are suppressed. This field, as we will see, leads to severe constraints for the microwave cavity design.

The circular state energy is shifted to second order by the directing field. This Stark shift is convenient to tune the atomic transition frequency, a procedure used in many of our experiments. A classical argument leads again to the electric polarizability of the circular state. Figure 5 shows a circular Bohr orbit – seen from the side as a straight line – normal to the applied electric field F . The force produced on the electron, qF , adds to the Coulomb force of the core, f_c . The orbit remains circular (due to symmetry), but the core pops out of the orbit’s plane, producing an induced electric dipole. Let us call θ the angle between f_c and the orbit plane and r_\perp the radius of the perturbed orbit. When the external field is applied, the electron angular momentum, $m_0\omega^2r_\perp$ (m_0 : electron’s mass) remains constant, equal to $(n - 1)\hbar \approx n\hbar$, since no torque is produced by qF . The electron orbital angular frequency ω and orbit radius r_\perp , both affected by the electric field, remain linked by:

$$\omega \approx \frac{n\hbar}{m_0 r_{\perp}^2} . \quad (6)$$

The core-to-electron distance is larger than r_{\perp} by the factor $1/\cos\theta$. The atomic Coulomb force \mathbf{f}_c thus scales as $\cos^2\theta/(r_{\perp})^2$ and its component along the vertical direction as $\cos^2\theta \sin\theta/(r_{\perp})^2$. Let us project Newton's equation for the electron motion onto the electric field axis and express the balance between the force induced by the external field and the Coulomb force along this axis:

$$\cos^2\theta \sin\theta = \left(\frac{r_{\perp}}{a_0}\right)^2 \frac{F}{F_0} , \quad (7)$$

where:

$$F_0 = |q|/4\pi\epsilon_0 a_0^2 = 5.14 \cdot 10^{11} \text{ V/m} , \quad (8)$$

is the atomic electric field unit. In the orbit plane, the projection of the Coulomb force, proportional to $\cos^3\theta/(r_{\perp})^2$, balances the centrifugal force, $m_0\omega^2 r_{\perp}$. Eliminating ω , we get:

$$\cos^3\theta = a_0 n^2 / r_{\perp} . \quad (9)$$

In the weak field limit ($F \ll F_0$, $\theta \ll 1$), the variation of the orbit radius is negligible: $r_{\perp} \approx a_0 n^2$. By a first order expansion, we obtain the induced dipole d_i :

$$d_i = a_0 |q| n^6 F / F_0 , \quad (10)$$

proportional to the applied field. The atomic polarizability scales as the sixth power of the principal quantum number. The polarization energy, E_2 , is computed by considering a process in which the dipole is built adiabatically in a field increasing from zero to its final value F . Adding the elementary works done on the electric charges as the field is increased, we get $E_2 = -d_i F/2$. The second-order energy shift is finally:

$$E_2 = -Rn^6 (F/F_0)^2 . \quad (11)$$

This expression of the Stark shift agrees with the quantum calculation, in the asymptotic limit of a large n . For $n = 50$, the level shift is $-1.8 \text{ MHz}/(\text{V/cm})^2$. The differential shift of the $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ transition is $\approx -250 \text{ kHz}/(\text{V/cm})^2$.

In the high-field limit, the variation of the orbit's radius cannot be neglected. Eliminating r_{\perp} , we get:

$$\cos^8 \theta \sin \theta = n^4 F / F_0 . \quad (12)$$

The left-hand side term in this equation is bounded. Its maximum value, about 0.2, is reached for $\theta = \arcsin 1/3 \approx 19^\circ$. There is thus a maximum value of the electric field compatible with a stable orbit, corresponding to an ionization threshold $F_i \approx 0.2F_0/n^4$. The predicted values for $|g\rangle$ and $|e\rangle$ are, respectively 165 and 152 V/cm, to be compared to the measured values 145 and 134 V/cm. The differences are due to the ionization by tunnel effect in a field slightly smaller than the classical ionization threshold [26]. As far as the ionization is concerned, the classical limit of correspondence principle is not yet fully reached for $n = 50$. The ionization thresholds correspond to relatively low fields, easily applied to the atoms.

The detection in D (figure 3) uses field ionization. The resulting electrons are detected with high efficiency, up to $90 \pm 10\%$ [28]. The rapid variation of the ionizing field with n provides a state-selective detection (the two atomic levels are ionized at different times in a ramp of electric field). The errors in the attribution of n are a few percent only.

The spontaneous emission rate Γ_n of a circular state $|nC\rangle$ can also be derived by classical arguments. The electric dipole selection rule $\Delta\ell = \pm 1$ allows a unique decay channel for this state: the microwave transition towards the lower circular state $|(n-1)C\rangle$. In a classical picture, the electron, accelerated on its circular orbit, radiates electromagnetic power proportional to the modulus square of its centripetal acceleration a . Its mechanical energy accordingly decreases slowly, as it spirals down to the core, jumping between circular states of decreasing principal quantum numbers. The radiative lifetime of the initial state corresponds to the loss of an energy amount $\hbar\omega_{nC,(n-1)C} \approx 2R/n^3$.

The radiated power \mathcal{P}_r is given by the Larmor formula [29]:

$$\mathcal{P}_r = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} , \quad (13)$$

and the spontaneous emission rate is thus:

$$\Gamma_n = \frac{n^3 \mathcal{P}_r}{2R} . \quad (14)$$

Writing the electron acceleration as:

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{1}{m_0} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (a_0 n^2)^2} = \frac{1}{m_0 n^4} \frac{2R}{a_0} , \quad (15)$$

and replacing R by its expression $q^2/(8\pi\epsilon_0 a_0)$, we obtain:

$$\Gamma_n = 2R \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{m_0^2 a_0^2} n^{-5} . \quad (16)$$

Writing a_0 as $4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_0 q^2)$, we can factorize the cube of the fine structure constant α and get:

$$\Gamma_n = \frac{1}{T_{a,n}} = \frac{4R}{3\hbar} \alpha^3 n^{-5} , \quad (17)$$

which coincides, for large n , with the expression derived from a Fermi Golden rule argument in a quantum description of the spontaneous emission process. We can finally express Γ_n in terms of the electron frequency $\omega_{nC,(n-1)C}$ as:

$$\frac{\Gamma_n}{\omega_{nC,(n-1)C}} = \frac{2}{3} \alpha^3 n^{-2} = 1/Q_{a,n} . \quad (18)$$

The inverse of this very small dimensionless ratio defines the radiative quality factor $Q_n = 3n^2/2\alpha^3$ of the circular to circular state transition. The large $\alpha^{-3} = 137^3$ factor entails that usual excited atomic excited states (n small) decay slowly at the atomic time scale, with radiative damping times corresponding typically to $3 \cdot 10^6$ periods of the emitted field. This radiative quality factor is, in circular Rydberg states, increased by a factor of n^2 . For $n \approx 50$, the decay takes $\sim 10^{10}$ periods of the emitted microwave. More precisely, $\Gamma_{51} = 28 \text{ s}^{-1}$, corresponding to a lifetime for $|e\rangle$ of 36 ms and to $Q_n = 1.14 \cdot 10^{10}$.

In spite of their extremely strong coupling to the millimetre-wave field, the circular Rydberg atoms are very stable. Among all possible bound orbits, the circular ones have the smallest average acceleration, the electron always remaining far from the core. The radiation loss is minimum, hence the advantage of using circular Rydberg atoms for CQED physics. Elliptical orbits (low ℓ quantum states) have a much shorter lifetime, proportional to n^3 instead of n^5 , due to the stronger acceleration of the electron near the core.

Circular atoms can travel over a few metres at thermal velocity within their lifetime. Spontaneous emission is thus negligible in an experimental set-up whose size is a few tens of centimetres. In the presence of a thermal field with n_{th} photons per mode on the average, the lifetime is reduced by a factor $1 + n_{\text{th}}$. It is thus essential to screen efficiently the room-temperature blackbody field, corresponding to tens to hundreds of photons per mode in the millimetre-wave domain. In our experiments, the circular Rydberg atoms propagate in a cryogenic environment cooled down to 0.8 K.

Circular states, with their long lifetimes, simple structure and extremely strong coupling to the field are clearly the closest to the Bohr's model orbit. More importantly, they are

almost ideal tools for cavity QED experiments. However, they cannot be simply excited from the atomic ground state using only lasers. A two-step process needs to be implemented [25, 30]. A laser excitation first provides a large energy to the atom and brings it into a low angular momentum Rydberg level. The atom is then fed with a large number of radio-frequency photons, each adding one unit of angular momentum, with a very small amount of energy. The process is similar to a controlled change of orbit for a satellite, using successive rocket boosts. The details of the method are rather complex. They are described in some details in [11, 31]. We achieve the preparation of $|e\rangle$ or $|g\rangle$ with purity better than 98%.

This preparation occurs at a well-defined time (the initial laser pulse duration is $2 \mu\text{s}$ typically). It operates on a pulsed velocity-selected atomic beam. The time of flight selection between the pulsed velocity-selective optical pumping and the pulsed excitation to the Rydberg levels provide a selection of the velocity with a $\pm 1 \text{ m/s}$ accuracy. The position of the atomic sample is thus well known at any time during its $\approx 40 \text{ cm}$ travel through the apparatus. It is thus possible to address it selectively along its path, for instance in the Ramsey cavities R_1 and R_2 .

The weak laser excitation of the atomic beam produces Poissonian statistics for number of atoms in circular states. Due to the finite detection efficiency, it is not possible to rely on exact atom counting at detection time. We must choose instead to prepare in a sample much less than one atom on the average (typically 0.1). When an atom is counted, the probability that an undetected second atom is present is small ($< 10\%$).

This post-selection of single-atom events is obtained at the expense of a considerable lengthening of the data acquisition time. This is of course a strong limitation when it comes to performing predetermined complex sequences of quantum information processing [32]. It is, as we will see in the next Section, not a serious problem in using the atoms for a Quantum Non Demolition measurement of the field intensity.

2.2 Superconducting millimetre-wave cavities

The circular Rydberg states are stable only in a static directing electric field. It is thus impossible to use a closed superconducting millimetre-wave cavity. We have to use an open Fabry-Perot, made up of two mirrors facing each other, across which a static field can easily be applied. The photon (or classical energy) storage time, T_c , is the most critical parameter in these experiments. A long T_c requires a very high mirror conductivity, which can only be provided by superconducting metals at cryogenic temperatures. It also requires an excellent surface state to minimize losses induced by diffraction on defects.

The quest for high-quality cavities has been a long process, since these two requirements are somewhat incompatible. We finally developed a fabrication technique based on diamond-machined copper substrates, with an extremely smooth surface (10 nm roughness), covered with a thin ($12 \mu\text{m}$) layer of high-purity Niobium deposited by cathode sputtering [33].

The mirrors have a 50 mm radius and are $L = 27$ mm apart. They have a toroidal shape in order to lift the polarization degeneracy. They sustain a non-degenerate TEM_{900} Gaussian mode with a linear polarization orthogonal to the cavity axis and a waist $w = 6$ mm. The frequency of the mode is adjusted by piezoelectric elements changing the cavity length. The damping times of the cavities used in recent experiments range from 65 ms to 0.13 s, a macroscopic time interval. The latter corresponds to a quality factor $Q = 4.5 \cdot 10^{10}$ and to a finesse $\mathcal{F} = 4.9 \cdot 10^9$, a thousand times larger than that of the best optical cavities.

2.2.1 A harmonic oscillator

The mode is a quantum harmonic oscillator, with the Hamiltonian $H_c = \hbar\omega_c(N + 1/2)$, where ω_c is the field's angular frequency and $N = a^\dagger a$ is the photon number operator (a is the photon annihilation operator). The eigenstates of H_c are the non-classical Fock states $|n\rangle$, with a well-defined number n of photons, whose energy is $\hbar\omega_c(n+1/2)$. The ground state is the vacuum $|0\rangle$. The Fock states are an orthogonal set:

$$\langle n | p \rangle = \delta_{np} . \quad (19)$$

The photon annihilation and creation operators a and a^\dagger connect the Fock states:

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle ; \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle . \quad (20)$$

The action of a on $|0\rangle$ gives a null vector (it is not possible to annihilate a photon in vacuum). All Fock states can be generated from the vacuum by repeated applications of the photon creation operator: $|n\rangle = a^{\dagger n} |0\rangle / \sqrt{n!}$. Creation and annihilation operators obey a bosonic commutation rule: $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$.

The cavity mode electric field operator at position \mathbf{r} writes:

$$\mathbf{E}_c = i\mathcal{E}_0 \left[\mathbf{f}(\mathbf{r})a - \mathbf{f}^*(\mathbf{r})a^\dagger \right] . \quad (21)$$

The dimensionless vector function $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \epsilon_c f(\mathbf{r})$ describes the spatial structure of the field mode (relative field amplitude f and polarization ϵ_c). At the geometric centre of the cavity, which we also take as the origin, the field mode amplitude is maximum and $f = 1$. The 'field per photon' \mathcal{E}_0 is:

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ V/cm} , \quad (22)$$

where the cavity mode volume \mathcal{V} is:

$$\mathcal{V} = \int |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 dV = \frac{\pi w^2 L}{4} . \quad (23)$$

The field quadrature operators correspond to a mechanical oscillator's position and momentum:

$$X = \frac{a + a^\dagger}{2} ; \quad P = \frac{a - a^\dagger}{2i} , \quad (24)$$

with the eigenstates $|x\rangle$ and $|p\rangle$ ($X|x\rangle = x|x\rangle$; $P|p\rangle = p|p\rangle$). They satisfy the commutation rule $[X, P] = i/2$, which correspond to the uncertainty relation $\Delta X \Delta P \geq 1/4$. The expectation values $\langle n|X|n\rangle$ and $\langle n|P|n\rangle$ of the field quadratures in a Fock state is zero. There is no preferred phase neither in the vacuum nor in any Fock state, a feature which shows that these quantum states are quite different from classical fields.

2.2.2 Coherent states

The classical source S (figure 3), weakly coupled to the mode via the diffraction loss channels, can be used to inject in C a coherent semi-classical state $|\alpha\rangle$ defined by the complex amplitude α . This injection is represented by the unitary displacement operator $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$, with $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$. The coherent state is an eigenstate of the annihilation operator a (with eigenvalue α). It follows that the average values of the quadratures X and P are simply the real and imaginary parts of the complex amplitude α and that their quantum fluctuations are the same as in the vacuum state. Pictorially, the coherent states can be represented in the complex amplitude plane (Fresnel plane) as a small disk of radius unity (representing the size of the quantum fluctuations) centred on the classical amplitude α .

For very small fields (about one photon on the average) the complex amplitude α is comparable to these uncertainties and quantum fluctuations play an important role. For very large amplitudes, quantum fluctuations are negligible and the coherent state can be viewed as a classical object, with well defined phase and amplitude. Coherent states stored in a cavity thus span the quantum to classical transition, with the mere adjustment of the source controls.

The coherent states can be expanded on the Fock states basis as $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ with $c_n = \exp(-|\alpha|^2/2) \alpha^n / \sqrt{n!}$. Their photon number distribution, $P(n) = |c_n|^2$, is Poissonian with an average $\bar{n} = |\alpha|^2$. The square modulus of the scalar product of two coherent states is thus:

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2} . \quad (25)$$

The overlap of two such states decreases exponentially with their 'distance' in phase space. Although they are never strictly orthogonal, they become practically so when the distance of their amplitudes is much larger than 1, the radius of the uncertainty circle.

Note that the displacement operator describes a global translation in phase space. In particular, it acts on an initial coherent state $|\beta\rangle$ according to $D(\alpha)|\beta\rangle = \exp(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)|\beta + \alpha\rangle$, a quantum version of the addition of classical fields in the Fresnel plane.

The coherent states have a simple time evolution. Starting from $|\alpha\rangle$ at time 0, we are at time t in the state:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega_c t/2} |\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle . \quad (26)$$

Besides a trivial phase factor (that could be removed by subtracting the constant vacuum energy from the cavity mode Hamiltonian), the coherent state amplitude evolves exactly as its classical counterpart. Accordingly, the average values of the quadratures X and P oscillate at the angular frequency ω_c , as the position and momentum of a classical oscillator.

2.2.3 Cat states

We give here a special attention to superpositions of two quasi-orthogonal coherent states, represented in the Fresnel plane by two non-overlapping circles. These states are quantum superpositions of fields with different classical properties. They are thus quite reminiscent of the Schrödinger cat thought experiment [10]. We will see later how these exotic states can be prepared in an experiment illustrating Bohr's complementarity and used to study the dynamics of decoherence. As a simple example, we consider a linear superposition with equal weights of two coherent states with opposite phases. This superposition, called a π -phase cat in the following, writes:

$$|\Psi_{\text{cat}}^{\text{even}}\rangle = \frac{|\beta\rangle + |-\beta\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\beta|^2})}} \approx (1/\sqrt{2})(|\beta\rangle + |-\beta\rangle) , \quad (27)$$

where β is the amplitude of the field (taken real). The denominator in the first r.h.s. term is a normalization factor, taking into account the overlap of $|\beta\rangle$ and $|-\beta\rangle$. If $|\beta| \gg 1$, this overlap is negligible and the cat state is expressed by the simpler form given by the second r.h.s. term.

The coherence between the two components of the cat state is revealed by considering its photon number distribution. The state $|\Psi_{\text{cat}}^{\text{even}}\rangle$ develops only along even number states, since the probability for finding n photons in it is proportional to $1 + (-1)^n$, justifying the superscript 'even' in its name. Similarly the cat state:

$$|\psi^{\text{odd}}\rangle = (1/\sqrt{2})[|\beta\rangle - |-\beta\rangle], \quad (28)$$

develops only along the odd photon numbers. We call it an ‘odd phase cat’. The periodicity of the photon number is related to the coherence of the state, since a statistical mixture of $|\beta\rangle$ and $|-\beta\rangle$ contains all photon numbers. The modulated photon number distribution is a signature of the even and odd cats coherence.

It is hence convenient to introduce the photon number parity operator \mathcal{P} [34] which admits as eigenstates all the superpositions of even photon numbers with the eigenvalue $+1$ and all the superpositions of odd photon number states with the eigenvalue -1 :

$$\mathcal{P} = e^{i\pi a^\dagger a}. \quad (29)$$

The odd and even phase cats $|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle$ are eigenstates of \mathcal{P} with the $+1$ and -1 eigenvalues. The action of the annihilation operator on an even (odd) phase cat results in the switching of the cat parity:

$$a[|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle] = \beta[|\beta\rangle \mp |-\beta\rangle]. \quad (30)$$

2.2.4 Field relaxation

The atom-cavity effective interaction time is at most in the $100 \mu\text{s}$ range, since the atoms are crossing the $w = 6 \text{ mm}$ cavity mode waist at thermal velocities. This is much shorter than the lifetime of the atomic levels (30 ms). Atomic relaxation can be safely neglected in our experiments, and cavity damping is the main source of decoherence.

The damping of a cavity mode, of a spring, has been described since the early days of quantum relaxation theory [35]. When C is coupled linearly to a large environment, including many degrees of freedom, whose eigenfrequencies span continuously a large interval around ω_c , the master equation ruling the evolution of the field density operator, ρ , can be cast in the general Lindblad [36] form:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_c, \rho] + \sum_{i=1}^2 \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} (L_i^\dagger L_i \rho + \rho L_i^\dagger L_i) \right]. \quad (31)$$

The operators L_i are simply $L_1 = \sqrt{\kappa(1+n_{th})}a$ and $L_2 = \sqrt{\kappa n_{th}}a^\dagger$, where $\kappa = 1/T_c = \omega_c/Q$ is the cavity energy damping rate and $n_{th} = 1/[\exp(\hbar\omega_c/k_B T) - 1]$ the mean number of blackbody photons per mode at the mirrors temperature T , as given by Planck’s law (k_B is the Boltzmann constant). Note that L_2 vanishes at zero temperature. In

our experiment, $T = 0.8$ K and $n_{th} = 0.05$. The L_1 and L_2 operators, proportional to a and a^\dagger respectively, describe the modifications, the 'quantum jumps' of the cavity state when a photon leaks out from the cavity into the environment or when a thermal photon is created.

Coherent states being eigenstates of the annihilation operator, they do not change when a photon escapes into the environment. They are thus rather immune to relaxation. A direct resolution of equation (31) at zero temperature shows that an initial coherent state $|\alpha_0\rangle$ remains coherent, its amplitude being exponentially damped with the time constant $T_c/2$. The average photon number decays thus as the classical field energy, with the time constant T_c . This feature qualifies the coherent states as (approximate) 'pointer states' for the cavity-environment coupling, according to the definition by Zurek [37].

For the photon number distribution $P(n) = \langle n|\rho|n\rangle$, the master equation reduces to:

$$\frac{dP(n)}{dt} = \kappa(1+n_{th})(n+1)P(n+1) + \kappa n_{th}n P(n-1) - [\kappa(1+n_{th})n + \kappa n_{th}(n+1)] P(n), \quad (32)$$

whose steady-state can be obtained by a detailed balance argument. It coincides obviously with the equilibrium blackbody state. If we consider an initial Fock state $|n_0\rangle$ and the $T = 0$ K case, $P(n_0)$ is ruled at short times by:

$$\frac{dP(n_0)}{dt} = -\kappa n_0 P(n_0), \quad (33)$$

showing that the lifetime of the $|n_0\rangle$ state is of the order of T_c/n_0 . The larger the Fock state, the smaller its lifetime.

The Schrödinger cat state are also very sensitive to decoherence. We can easily understand this sensitivity qualitatively. A cat state changes parity when we annihilate a photon. Hence, after a time such that, on the average, one photon has been lost, the parity of the cat is undetermined, and the cavity contains even and odd photon numbers at the same time. This corresponds to a statistical mixture of two coherent states, instead of a quantum superposition. The decoherence time scale is thus of the order of T_c/\bar{n} , where \bar{n} is the average number of photons in the initial cat.

The Fock state fragility is closely related to that of the cat states. In fact, any Fock state with a large n_0 can be expressed as a superposition of n_0 non-overlapping coherent components with the same average energy. Each coherent component is rather immune to decoherence, but their quantum superposition is a fragile cat state.

2.2.5 Pictorial representations of field states

We used so far very qualitative phase space depictions of the field states. These pictures are made fully quantitative by associating unambiguously to the field state real quasi-probability

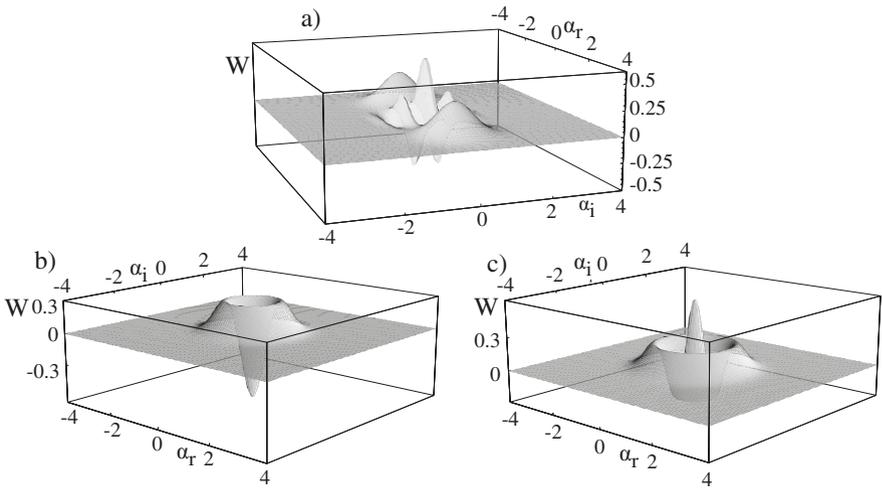


Figure 6. Plot of W functions. (a) Schrödinger cat, superposition of two 5-photon coherent states with opposite phases. (b) One-photon Fock state. (c) Two-photon Fock state.

distributions in the phase plane. We discuss here only the most useful, the Wigner function. It gives a vivid description of the state.

The field is described by the density operator ρ . The Wigner distribution $W(\alpha) = W(x + ip)$ [38] is defined by:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int dx' e^{-2ix'p} \langle x + \frac{x'}{2} | \rho | x - \frac{x'}{2} \rangle . \tag{34}$$

It is the Fourier transform of an off-diagonal matrix element of ρ in a quadrature representation. The W function is real and normalized. It can take negative values in domains of phase space, making it clear that it is not a probability distribution. Negative values are, as shown below, a signature of non-classical states.

The W function of coherent states are Gaussian functions centred at the amplitude of the state. The W function of a π -phase cat is made up of two Gaussian peaks and a large interference pattern between these peaks with an alternance of positive and negative ridges (figure 6(a)). This pattern is a signature of the cat's coherence, lacking in the W function of a statistical mixture. The W function is thus quite appropriate for the study of a cat's coherence. Figure 6(b) and (c) present the W function of the $n = 1$ and $n = 2$ Fock states which also exhibit negative parts.

By inverse Fourier transform of equation (34), the matrix elements of the field density operator are:

$$\langle x + \frac{x'}{2} | \rho | x - \frac{x'}{2} \rangle = \int dp e^{2ix'p} W(x, p) . \quad (35)$$

The field density operator is thus fully determined by W . In particular, the probability density of the quadrature X , is:

$$\text{Tr} \rho X = \int dp W(x, p) . \quad (36)$$

The probability that X takes a given value x is obtained by integrating W for this x value, along all values of p . Schrödinger cats, for instance, have quadratures values occurring with 0 probability, a signature of their non-classical nature. The integral of W along the orthogonal quadrature vanishes, which is possible only if W presents alternances of positive and negative values. We thus understand that negativities of W are related to non-classicality.

We conclude by giving an alternative expression of W [39]:

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} [D(-\alpha) \rho D(\alpha) \mathcal{P}] . \quad (37)$$

The Wigner distribution at α is the expectation value in the state translated by $-\alpha$ of the field parity operator. The Wigner function is thus a directly measurable quantity.

2.3 The Jaynes and Cummings interaction

The atom-field interaction is described by the Jaynes and Cummings model [17]. Incidentally, the celebration of the centennial of the Bohr model also coincides with the fiftieth anniversary of this very important contribution to quantum optics. Proposed as an approximate model for the interaction of atoms with a laser, this model is a nearly exact description of the cavity QED situation.

The complete Hamiltonian is $H = H_a + H_c + H_{ac}$, where H_a is the atomic Hamiltonian, which can be written as

$$H_a = \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_z, \quad (38)$$

where $\omega_a = \omega_{51C,50C}$ is the atomic transition angular frequency, and σ_z is the standard Pauli operator for the z axis of the Bloch sphere representing the state of the two-level atom.

The interaction term H_{ac} is, in the rotating wave approximation neglecting non-resonant terms, given by:

$$H_{ac} = -i\hbar \frac{\Omega_0}{2} f(vt) [a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-], \quad (39)$$

where $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ and $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ are the atomic raising and lowering operators.

The ‘vacuum Rabi frequency’, Ω_0 , measures the strength of the atom-field coupling when the atom is located at the cavity centre, where the electric field amplitude is maximal. It is proportional to the dipole matrix element of the atomic transition and to the amplitude of a single photon field stored in the cavity. In our experiments, $\Omega_0/2\pi = 50$ kHz. The function $f(vt)$ reflects the variation of the atom-field coupling with time while the atom crosses the Gaussian mode at right angle with the cavity axis. Taking the origin of time when the atom reaches the axis, $f(vt)$ simply writes $f(vt) = \exp(-v^2t^2/w^2)$.

The eigenstates of H , the atom-field ‘dressed states’ can be straightforwardly expressed in the basis of the uncoupled atom-cavity states $\{|e, n\rangle\}$ and $\{|g, n\rangle\}$, eigenstates of $H_a + H_c$ [11]. We will only consider here either exact atom-cavity resonance $\delta = \omega_a - \omega_c = 0$ or the non-resonant dispersive case $|\delta| \gg \Omega_0$.

At resonance ($\delta = 0$), the uncoupled states $\{|e, n\rangle\}$ and $\{|g, n+1\rangle\}$ have the same energy $[(n+3/2)\hbar\omega_c]$. Note that $|g, 0\rangle$ is apart and is not affected by the atom-field coupling. The eigenstates of $H_a + H_c$ form a ladder of twofold degenerate multiplicities. The coupling H_{ac} lifts this degeneracy. The dressed states with $n+1$ excitations are, $|\pm, n\rangle = (|e, n\rangle \pm i|g, n+1\rangle)/\sqrt{2}$ with energies separated at cavity centre ($f=1$) by $\hbar\Omega_n$ where $\Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1}$. An atom initially prepared in $|e\rangle$ in an n -photon Fock state corresponds to an initial quantum superposition of the two non-degenerate dressed states $|\pm, n\rangle$. The later evolution is thus a quantum Rabi oscillation between $|e, n\rangle$ and $|g, n+1\rangle$ at frequency Ω_n , the atom periodically emitting and reabsorbing a photon in C .

Note that, at most times during this evolution the atom-cavity system is in an entangled state. Quantum Rabi oscillations have been used in a variety of CQED experiments to create and engineer atom-field entanglement, culminating in the generation of a three-particle entangled state of the Greenberger, Horne and Zeilinger (GHZ) type [40], with three two-qubit quantum gate action [31, 32].

Note that the atomic motion through the mode is simply taken into account in this regime. A complete crossing of the mode at a constant velocity v is equivalent to a constant coupling at cavity centre during an effective interaction time $t_r = \sqrt{\pi}w/v$.

Far from resonance ($|\delta| \gg \Omega_0$), the dressed states nearly coincide with the uncoupled levels. Energy exchange between the atom and the field is prohibited by mere energy conservation. The only effect of the mutual interaction is a slight shift of the joint atom-cavity levels.

A simple second-order calculation shows that the atomic frequency is shifted at cavity centre ($f=1$) in the field of an n -photon state by $\Delta\omega_a = 2(n+1/2)s_0$, where $s_0 = \Omega_0^2/4\delta$. This energy shift includes a constant part, s_0 , which corresponds to the Lamb shift of $|e\rangle$

induced by the vacuum fluctuations in C . The other part, $2ns_0$, proportional to the field intensity, is the few-photons limit of the light shifts usually observed in strong laser fields.

This quantized light-shift can be revealed by an atomic Ramsey [7] interferometry experiment. In the zone R_1 (figure 3) a $\pi/2$ pulse of classical microwave field produces, from the initial state $|g\rangle$, a superposition $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. The transient shift of the atomic frequency in C results in a phase shift of this superposition, by an amount $\phi_0(n + 1/2)$, where $\phi_0 = 2s_0t_d$. The effective dispersive interaction time is $t_d = \sqrt{\pi/2}(w/v)$. The phase-shift per photon, ϕ_0 , can be adjusted by choosing the atomic velocity v or the atom-cavity detuning δ .

A second $\pi/2$ pulse is then applied in zone R_2 . In a proper interaction representation, this pulse realizes the transformations

$$|g\rangle \rightarrow (|g\rangle + \exp(i\phi_r)|e\rangle)/\sqrt{2} \text{ and } |e\rangle \rightarrow (|e\rangle - \exp(-i\phi_r)|g\rangle)/\sqrt{2},$$

where the phase ϕ_r of the Ramsey interferometer can be tuned by adjusting the relative phase of the pulses in R_1 and R_2 or by applying a transient Stark shift on the atomic transition between R_1 and R_2 . The final probabilities $\pi_e(\phi_r|n)$ and $\pi_g(\phi_r|n)$ for detecting the atom in $|e\rangle$ or $|g\rangle$ conditioned to the presence of n photons in the cavity are oscillating functions of ϕ_r (Ramsey fringes):

$$\pi_e(\phi_r|n) = 1 - \pi_g(\phi_r|n) = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos[\phi_r + \phi_0(n + 1/2)] \}. \quad (40)$$

The detection of an atom thus carries information on the photon number. Since this atom is unable to absorb the cavity field, this information has been acquired without modifying the photon number. We will use this remarkable property in the next Section.

As a reciprocal effect, the cavity frequency is shifted when an atom is in the mode. An atom in $|e\rangle$ at cavity centre shifts the cavity resonance by $\Delta_e\Omega_c = s_0$. An atom in $|g\rangle$ shifts it by an opposite amount $\Delta_g\Omega_c = -s_0$. This is the single-atom limit of an index of refraction effect. The non-resonant atom, unable to absorb or emit light, behaves as a piece of transparent dielectrics that modifies by its index the effective cavity length and thus its resonance frequency. With the strongly coupled circular atoms, this effect is large even though there is a single atom in the mode.

This index effect results in a global phase shift for a coherent state $|\alpha\rangle$ injected in C before the atom crosses it. The dispersive interaction realizes then the transformations

$$|e, \alpha\rangle \rightarrow \exp(-i\phi_0/2) |e, \exp(-i\phi_0/2)\alpha\rangle \quad (41)$$

$$|g, \alpha\rangle \rightarrow |g, \exp(+i\phi_0/2)\alpha\rangle. \quad (42)$$

3. The quantum jumps of light

Most actual measurements are quite far from the ideal, projective measurement described in elementary quantum physics textbooks. This is particularly true when it comes to counting the number of photons in a light field, for instance in a laser pulse. Modern photodetectors can count photons with a high reliability. However, instead of projecting the field on the Fock state corresponding to the obtained result, they cast it onto the vacuum, since all detected photons are absorbed, their energy being used to create the measurable electronic signal.

This total demolition of the light quantum state is not a requirement of quantum physics. It allows Quantum Non Demolition measurement process [41]. They are simply ideal projective measurements of an observable that is a constant of motion in the evolution ruled by the system's Hamiltonian. Repeated QND measurements thus always give the same result as the first one in the series. A sudden transition between two eigenvalues of the measured observable, a 'quantum jump', can be traced to an extra source of evolution for the system, due to relaxation for instance. Projective measurements of the photon number are obviously QND, since the photon number operator, N , is a constant of motion.

QND measurements of a light beam intensity have been realized with non-linear optical systems (for a review, see [42]). The intensity of the signal beam changes the index of a non-linear material (an atomic vapour for instance). This index of refraction modification is read out by a weak meter beam in an interferometric arrangement. Due to the weak optical non-linearities, these measurements only operate with macroscopic signal and meter beams, whose quantum fluctuations get correlated. They are not adapted for QND measurements at the single photon level.

As we have seen above, an atom, initially in a superposition of $|e\rangle$ and $|g\rangle$ carries, after interacting non-resonantly with the cavity, information about the photon number, coded in the phase of the atomic superposition. The dispersive interaction does not change the photon number. This information can thus be used for a QND determination of the photon number, to count the number of photons in the cavity without absorbing them. Moreover, we can send many atoms through the cavity during the energy lifetime. We can thus follow in real time the photon number and evidence the quantum jumps of light.

3.1 Birth, life and death of individual photons

The simplest situation is when C contains either 0 or 1 photon. This is the case at thermal equilibrium. The residual blackbody field at 0.8 K contains $n_{\text{th}} = 0.05$ photon on the average. Most of the time, the cavity is empty. When a thermal photon is created out of the residual fluctuations, it remains in the cavity for a time of the order of T_c . The likelihood to have two photons at the same time is extremely low.

We monitor this field by sending repeatedly atoms through the cavity [18]. The phase shift per photon ϕ_0 is set to π and the Ramsey interferometer phase ϕ , is set so that the atom is ideally detected in $|g\rangle$ when the cavity is empty, in $|e\rangle$ when it contains a photon. The top trace in figure 7 presents the atomic detections observed over a 2.5 s time interval.

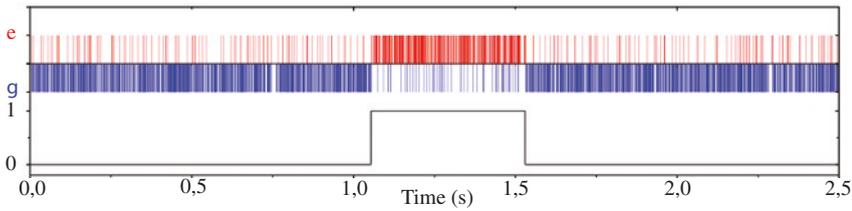


Figure 7. Monitoring the blackbody field. Top trace: atomic detections over a 2.5 s time interval. An atom found in $|e\rangle$ ($|g\rangle$) is depicted by an upwards (downwards) bar. Bottom trace: result of a majority vote over eight consecutive atomic detections revealing the birth, life and death of an exceptionally long-lived photon. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature [18].

During the first second, nearly all atoms are detected in $|g\rangle$, indicating that the cavity is empty. The few atoms detected in $|e\rangle$ are due to the finite contrast of the Ramsey interferometer. We can get rid of this residual noise by a majority vote over eight consecutive atomic detections (bottom trace).

After about 1 s, the regime changes abruptly. Nearly all atoms are now detected in $|e\rangle$. This sudden evolution reveals a quantum jump of light, the birth of a single thermal photon in the cavity. For nearly half a second, all atoms crossing the cavity agree on the presence of this photon. This is a clear indication of the Quantum Non Demolition nature of this measurement. An ordinary absorptive measurement would have resulted in the first atom after the jump exiting in the upper state $|e\rangle$. However, the photon would have been absorbed by this atom and the cavity would have been found empty by the next ones. Finally, the atoms witness the sudden death of the photon in another quantum jump and the cavity returns to its vacuum state. This particular photon has lived in the cavity for nearly $4 T_c$.

This experiment is thus quite reminiscent of the famous photon box experiment of Einstein and Bohr. We are also trapping the photon in a box (if not for an infinite time) and we are weighing the box to monitor the presence of the photon. Our scale is made up of the individual Rydberg atoms crossing the cavity. The observed signals exhibit in a dramatic way the elusive quantum jumps. At the centre of the original Bohr model, quantum jumps were put in the shadow by the continuous evolution predicted by the Schrödinger unitary evolution. Many people doubted they indeed were real, until they were observed for the first time on the fluorescence of a trapped ion [43, 44]. We observe them here for the first time on the light field itself. Quantum jumps are the actual evolution of a continuously monitored quantum system.

3.2 Quantum Non Demolition photon counting

The scale used in the previous Section to weigh the photon box is too sensitive to count more than one photon. The phase-shift of the atomic coherence for two photons is

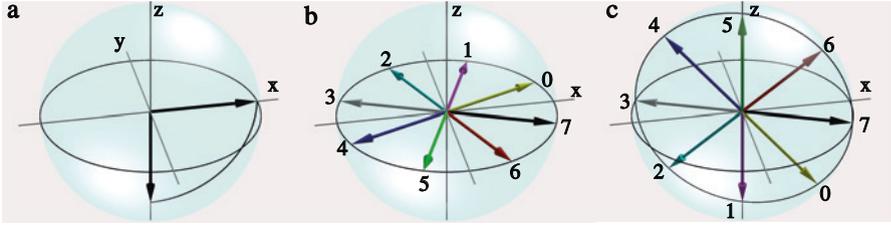


Figure 8. Evolution of the atomic Bloch vector in a QND photon-number measurement process. (a) First Ramsey $\pi/2$ pulse in R_1 . (b) After the dispersive interaction with C , 8 orientations of the Bloch vector are correlated to the photon numbers from 0 to 7, for $\phi_0 = \pi/4$. (c) After the second Ramsey pulse in R_2 .

close to 2π and, hence, we cannot distinguish the two-photon state from the vacuum. The range of the scale can be somewhat extended. By reducing the phase-shift per photon to $\phi_0 = \pi/4$, we can count up to seven photons.

Figure 8 presents the Bloch vector describing the atomic state at successive stages in this QND process. The atom is originally prepared in $|g\rangle$ (south pole). The first Ramsey pulse in R_1 , casts it in a superposition of $|e\rangle$ and $|g\rangle$ represented by a vector along the Ox axis (figure 8(a)). The atom then interacts dispersively with the cavity mode, resulting in a phase shift of the atomic coherence. We have used an implicit interaction representation such that the atomic state evolution is only due to the interaction with C . After crossing the mode in the Fock state $|n\rangle$, the Bloch vector has rotated by an angle $(n + 1/2)\phi_0$.

Eight different orientations of the Bloch vector at the exit of the cavity are entangled with the photon numbers from 0 to 7 (eight photons produce the same rotation as the vacuum, $\phi_0/2$). A single atomic detection is clearly not sufficient to pin-down the photon number. After a second $\pi/2$ rotation in R_2 (figure 8(c)), which maps one state of the equatorial plane onto the other, the atom is detected in the $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ basis, providing a single bit of information. This does not allow for a complete discrimination of the eight non-orthogonal atomic states at cavity exit. In simple terms, a single bit is not enough to count from 0 to 7!

A single atom detection realizes thus a weak measurement of the cavity field, which nevertheless changes the cavity state. Since the atom cannot emit or absorb photons, the cavity state modification is only due to its entanglement with the atom. The corresponding (completely positive) map for the field density matrix ρ is:

$$\rho \longrightarrow \rho_j = \frac{M_j \rho M_j^\dagger}{\pi_j(\phi_r|\rho)}, \tag{43}$$

where the index $j = \{e, g\}$ indicates the measured atomic state.

The measurement operators M_e and M_g are:

$$M_g = \sin \left[\frac{\phi_r + \phi_0(N + 1/2)}{2} \right], \quad (44)$$

$$M_e = \cos \left[\frac{\phi_r + \phi_0(N + 1/2)}{2} \right], \quad (45)$$

and define a Positive Operator Valued Measurement (POVM) with elements $E_j = M_j^\dagger M_j$, with $E_e + E_g = \mathbb{1}$. The denominator $\pi_j(\phi_r|\rho)$ in equation (43) is the probability for detecting the atom in state j conditioned by the field state ρ :

$$\pi_j(\phi_r|\rho) = \text{Tr} \left(M_j \rho M_j^\dagger \right). \quad (46)$$

Since the M_j s are diagonal in the Fock state basis, this probability can also be written:

$$\pi_j(\phi_r|\rho) = \sum_n P(n) \pi_j(\phi_r|n), \quad (47)$$

$P(n) = \langle n|\rho|n \rangle$ being the photon number distribution. The conditional probabilities $\pi_j(\phi_r|n)$ are given by equation (40).

The new photon number distribution after a detection in state j for the Ramsey interferometer setting ϕ_r , $P(n|j, \phi_r)$, is thus:

$$P(n|j, \phi_r) = \frac{\pi_j(\phi_r|n)}{\pi_j(\phi_r|\rho)} P(n). \quad (48)$$

We recover here the usual Bayes law of conditional probabilities [19]. The probability for having n photons, conditioned to an atomic detection in j with the Ramsey interferometer phase set at ϕ_r is, within a normalization factor (denominator in the r.h.s.), the initial photon number distribution $P(n)$ multiplied by the conditional probability for detecting the atom in j with this Ramsey phase setting when there are n photons in the cavity. Note that if the atom escapes detection, due to the finite efficiency of D , it does not change the photon distribution, since the two density matrices corresponding to a detection in $|e\rangle$ or $|g\rangle$ should then be summed, weighted by the respective detection probabilities.

After each atomic detection, $P(n)$ is thus multiplied by a sinusoidal function of n , proportional to $\pi_j(\phi_r|n)$. Some photon numbers are less likely to be found after the measurement (those which correspond to the highest probability for detecting the atom in the other state).

Sending N_a atoms one by one through C iterates this photon number ‘decimation’ operation. The final $P(n)$ is:

$$P_{N_a}(n) = \frac{P_0(n)}{Z} \prod_{i=1}^{N_a} \pi_{j_i}(\phi_{r,i}|n), \quad (49)$$

where j_i is the detected state for the atom labelled i in the series, $\phi_{r,i}$ the Ramsey interferometer phase used for this atom and $P_0(n)$ the initial photon number distribution.

Each factor in the product on the r.h.s. decimates some photon numbers. Numerical simulations and mathematical arguments [45] show that, after many atoms have been detected, the final distribution reduces to a single photon number n_m : $P_{N_a}(n) = \delta_{n,n_m}$, provided that the initial distribution $P_0(n)$ spans a photon number range such that no two photon numbers lead to the same detected atomic state (for instance, the $\{0, 7\}$ range when $\phi_0 = \pi/4$). The accumulation of partial information provided by weak measurements ends up in a complete, projective measurement of the photon number. The final outcome is independent of the initial distribution $P_0(n)$. We can thus choose it freely, provided it does not cancel in the relevant photon number range. The logical choice is a flat distribution, reflecting our total uncertainty upon the initial cavity field before measurement.

We realized such a measurement on a coherent field with an average photon number $\bar{n} = 3.82$ (the probability for having 8 photons or more in this field is a few % only). We record the detection of $N_i = 110$ atoms, in a time of the order of 26 ms, with $\phi_0/\pi = 0.233$ rad. The Ramsey phase ϕ_r is randomly chosen among four values differing by about $\pi/4$ to speed up convergence. We use a slightly modified decimation law to incorporate the finite contrast of the Ramsey interferometer (see [19] for details).

Figure 9 presents the evolution of the photon number distribution after the detection of N_a atoms ($N_a = 0 \dots N_i$) for two realizations of the experiment. Let us discuss that on the left. The initial $P_0(n)$ is flat. After one atomic detection, it has a sine shape. After about 20 atomic detections, the decimation process leaves only two possible photon numbers, 5 and 4. For a short time interval, 4 dominates, but, after about 70 atomic detections, only 5 is left, completing the measurement. The other realization (right part of the figure) exhibits a similar behaviour, the final photon number being then 7. We observe here the progressive collapse of the field state due to an accumulation of weak measurements.

The final photon number is selected by the random atomic detection outcomes. Each realization of the experiment leads, after recording N_i atoms, to a different, random photon number according to the basic postulates of quantum physics. “God is playing dice” in a quantum measurement. The probability for obtaining the final value n_m must be ideally given by the initial photon number distribution $P_0(n_m)$.

We have recorded 2000 individual realizations of the detection sequence and computed, for each of them, the average photon number $\langle n \rangle$ for the final distribution $P_{N_i}(n)$. The histogram of the measured $\langle n \rangle$ values is shown in figure 10. In about 80% of the cases, we do finally obtain an integer photon number, showing that the decimation process has converged.

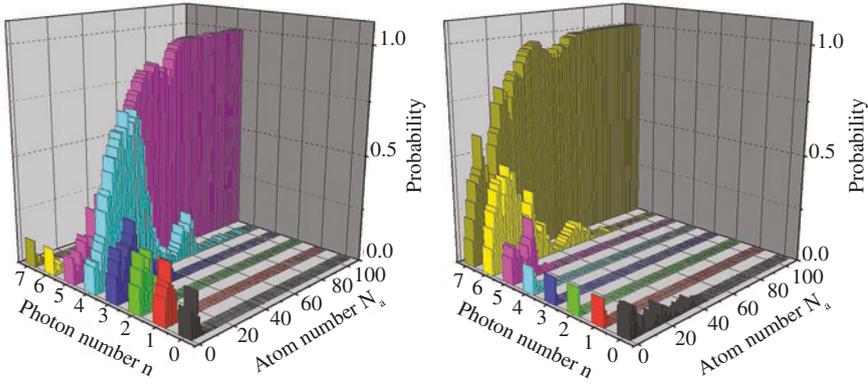


Figure 9. Two individual realizations of the QND measurement of a coherent field. The histograms show the evolution of the photon number distribution with the number N_a of detected atoms. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature [19].

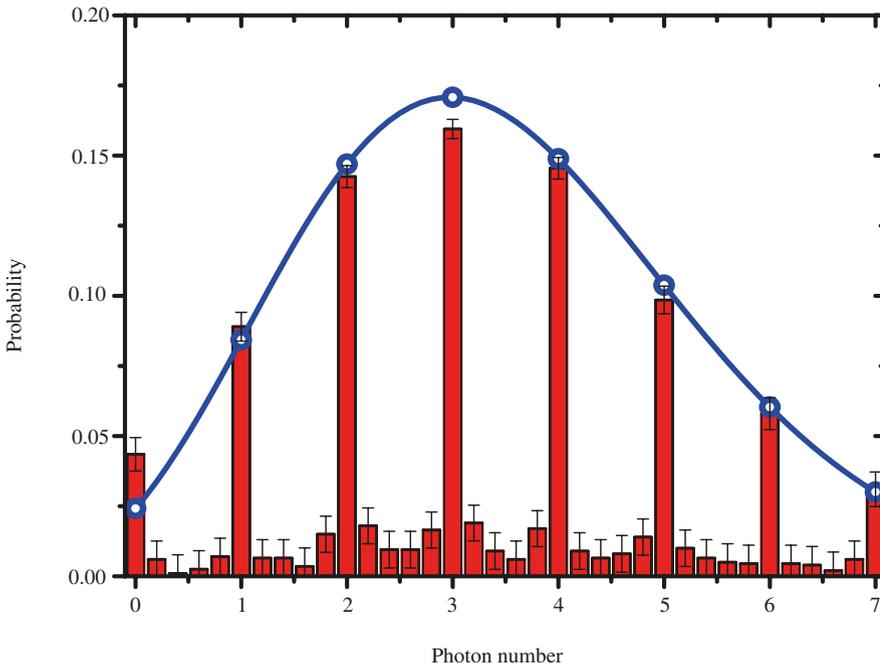


Figure 10. Reconstructed photon number distribution in the initial cavity field. Histogram of the average value $\langle n \rangle$ of the final photon distribution $P_{N_a}(n)$. The error bars reflect the statistical uncertainty (2000 realizations of the experiment have been used). The blue circles (and the continuous line joining them for visual convenience) represent a Poisson law with 3.46 photons on the average. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature [19].

The background in the histogram corresponds to 20% of the experiments for which either N_i atoms have not been sufficient to grant convergence or for which a quantum jump due to cavity relaxation occurred during the measurement process itself. When convergence is obtained, the observed probabilities fit nicely with a Poisson law (open blue circles). Its average photon number, 3.46, coincides nicely with an independent calibration of the initial cavity state.

3.3 Quantum trajectories

Since the probe atoms do not absorb the cavity field, we can follow the photon number evolution over a long time interval. We keep sending dispersive atoms in C . At each time t , we infer a photon number distribution and its average $\langle n \rangle(t)$ from information provided by the last N_i atomic detections. Figure 11(a) present the time evolution of the inferred average photon number over 0.7 s for two realizations of the experiment whose initial phases (first N_i atoms) are shown in figure 9.

The initial phase corresponds to the ≈ 26 ms time interval required to perform the state collapse. Then, we observe a plateau with a constant photon number (5 or 7). In both cases, the duration of this plateau is long enough to allow for two measurements of the photon number with two independent samples of $N_i = 110$ atoms. That these two measurements lead to the same result is a clear indication of the QND character of this process.

Our photon-counting procedure illustrates thus all the basic postulates for an ideal projective quantum measurement. It provides a quantized result (an integer photon number), whose value is randomly chosen with a statistical distribution given by the initial cavity state. The repeatability of the measurement shows that it does project the field state onto an eigenstate of the measured observable, the $|n_m\rangle$ Fock state, a situation radically different from that of all standard photo-detections.

After the initial plateau, we observe a stepwise relaxation of the photon number towards zero. We monitor again the quantum jumps of light, while the photons escape one by one from the cavity into the loss channels. The inset in the first curve shows a zoom on the quantum jump between the 5 and 4 photon states. Recording it requires the accumulation of information from a few tens of atomic detections and is performed in about 10 ms. Note that the one-photon state in the trajectory on the right has an exceptionally long lifetime (about 300 ms, nearly three average lifetimes T_c).

Figure 11(b) presents four other trajectories, with an initial collapse in the 4-photon state, exhibiting the randomness of the quantum jumps occurrences. Note on the right-most trajectory an upwards quantum jump corresponding to the creation of a thermal excitation in C .

The master equation (31) predicts a smooth relaxation of the average energy, the photon number decaying exponentially with a time constant T_c . This evolution is quite different from the sudden jumps of figure 11. This is precisely the reason why quantum jumps were sometimes considered as impossible before their actual observation. This illustrates the difference between a single realization of a quantum experiment and the ensemble average

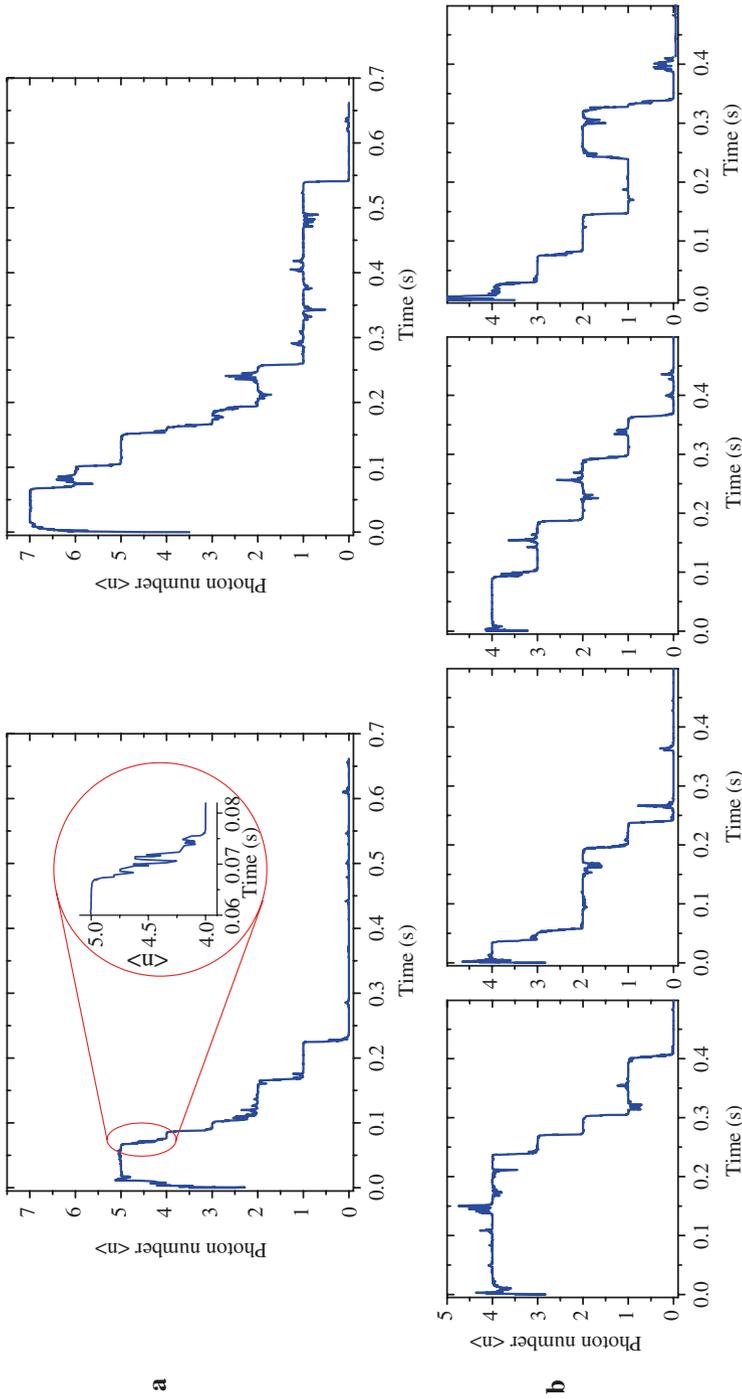


Figure 11. Repeated measurements. (a) Time evolution of the mean photon number $\langle n \rangle(t)$ for the two sequences whose collapse is shown in figure 9. (b) Four other trajectories with an initial collapse in the $n_m = 4$ Fock state. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature [19].

predicted by the density operator. Averaging thousands of quantum jump trajectories, starting from randomly selected photon numbers, all exhibiting quantum jumps at different times, we indeed recover a smooth evolution in excellent agreement with the predictions of the master equation.

We have performed a detailed study of field relaxation [20]. By a careful analysis of all quantum jumps trajectories, we reconstruct the damping-induced evolution of the photon number distribution, starting from all Fock states with 0 to 7 photons. We get clear evidence of the fast decay of the high-lying Fock states, whose lifetime is T_c/n . By a fit of the complete data, we extract the coefficients of the most general linear master equation ruling the evolution of $P(n,t)$. The results of this partial quantum process tomography are in excellent agreement with equation (32). Similar measurements have been performed simultaneously in the context of circuit QED [46].

Finally, the QND measurement process leads naturally to the observation of the quantum Zeno effect [47]. Whereas frequently repeated measurements do not affect the dynamics of incoherent damping, they inhibit the coherent evolution of a quantum system. An observed system does not evolve under the action of its Hamiltonian, in clear correspondence with the second Zeno paradox negating motion. Quantum Zeno effect has been observed on the evolution of a variety of two-level systems, first on a trapped ion [48].

We have observed it for the coherent evolution of the cavity field under the action of the classical source S [49]. We realize a long series of identical coherent injections with a very small amplitude in the initially empty cavity. These amplitudes add up and the field is finally in a mesoscopic coherent state, whose average photon number grows quadratically with the number of injections, or with time. When we perform, between injections, QND measurements of n , we project repeatedly, with a high probability, the field back onto $|0\rangle$, since the probability for finding $n = 1$ after a single injection is low. We observe that the field energy effectively remains nearly zero, exhibiting the Zeno effect for the classical runaway process of field injection.

3.4 Quantum feedback: combating the jumps

The QND measurement procedure presented in the previous paragraph prepares Fock states of the field. These highly non-classical states can be a quite interesting quantum resource for quantum computing, quantum enabled metrology or quantum communication. However, the measurement-based preparation is a random process. We cannot predict which Fock state will be produced in one realization of the experiment. Moreover, this resource is fragile and decoherence rapidly destroys it.

If non-classical states are to be used as a resource, it would be quite interesting to prepare them on demand and to protect them from relaxation. A possible route towards this goal is quantum feedback [50, 51], which extends to the quantum realm the feedback circuits present in every complex classical system.

As in any feedback operation, a 'sensor' gets information on the system, a 'controller' estimates a proper distance between the present state of the system and the 'target' one, and drives accordingly an 'actuator', which steers the system towards the required operating point. The main difficulty quantum feedback has to face is that the measurement by the sensor changes the system's state, making quantum feedback loops more subtle than their classical counterparts.

We have realized two experiments on a continuous feedback process preparing Fock states and protecting them against decoherence [21, 22]. In both experiments, the sensors are atoms, crossing the cavity in the dispersive regime. They provide Quantum Non Demolition information about the number of photons in the cavity. This information is fed to the controller K (a fast real-time classical computer ADwin-Proll by Jäger Messtechnik). The controller performs a Bayesian estimation of the most likely state of the cavity field. It programs accordingly an actuator, which should drive the cavity as close as possible to the target Fock state $|n\rangle$.

The two experiments differ by the nature of the actuator. In [21], we use a classical source injecting a small coherent field in C , with controlled phase and amplitude. The interplay of these tiny displacements with the repeated measurements by the probe atoms results in the preparation and stabilization of Fock states containing up to four photons. This experiment is nevertheless limited by the nature of its actuator. A classical source is not ideal to compensate for the single photon quantum jumps due to decoherence. A quantum actuator would be much more appropriate.

In the second experiment [22], whose scheme is presented in figure 12, we use resonant atoms as actuators. The scheme thus implies two type of atoms. The probe atomic samples, prepared in g , undergo $\pi/2$ Ramsey pulses in R_1 and R_2 and interact dispersively with the cavity mode. The final result of their detection is fed to the controller K . The control atomic samples can be used as additional QND probes when K estimates that the cavity field is close enough to the target state. When the estimated photon number is higher than the target, K tunes these atoms at resonance with C , via the Stark shift produced by the potential V applied across the cavity mirrors. Left in the initial state g , they can thus absorb one photon out of the mode. Prepared in e by a π resonant pulse in R_1 , they emit a photon in the mode. Their final state is also recorded by K , providing additional information on the feedback process. In order to get a good flux of information on the cavity state, we send repeatedly sequences made up of 12 probe samples and 4 control ones.

The main task of K is to estimate the field state after the detection of each sample, based on all available information. This estimation and the resulting actuator settings must be performed within the $T_a = 82 \mu\text{s}$ time interval between atomic samples. Since the initial vacuum and the actuators bear no phase information, the field density matrix remains diagonal in the $\{|n\rangle\}$ basis and K needs only to update the photon number distribution $p(n)$, a considerable simplification. Moreover, the field Hilbert space is truncated to a maximum dimension of 8 and the code has been carefully optimized.

In order to get a faithful estimation of the photon number, K takes into account all the available knowledge: all atomic detections (and the measured detection efficiency in D), all actuator actions. It includes all the known and independently measured experimental

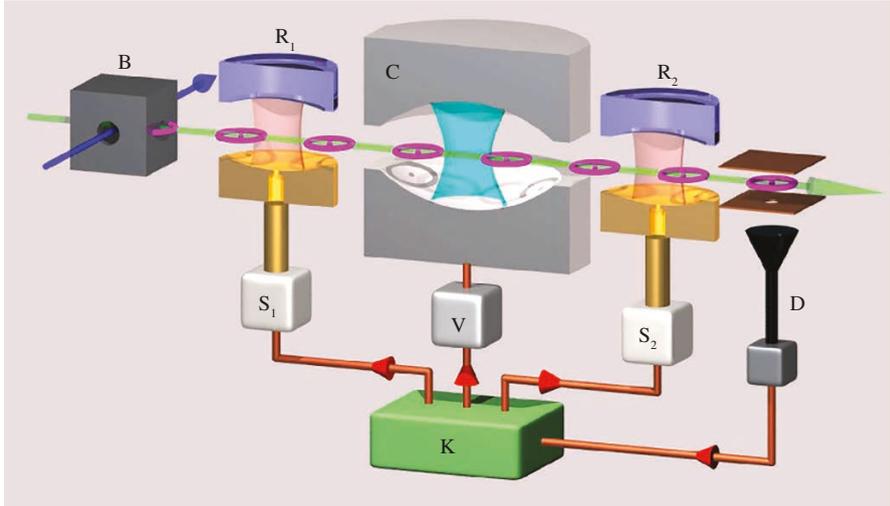


Figure 12. Principle of the quantum feedback experiment for the preparation and protection of Fock states.

imperfections, It keeps track of cavity relaxation. For the actuator atoms, K takes into account the independently measured resonant Rabi oscillations in the field of N photons. It also includes the small probability to send two resonant atoms in the same sample.

After this rather complex Bayesian inference, K obtains the estimated photon number distribution $p(n)$. It then computes all the possible photon number distributions corresponding to all choices for the next control sample at hand (which can be used as an emitter, as an absorber, or as an additional QND probe). The controller determines for each choice the expectation value of the distance to the target state $|n_t\rangle$, defined as $d = \sum_n (n - n_t)^2 p(n) = \Delta n^2 + (\bar{n} - n_t)^2$ (Δn^2 and \bar{n} are the photon number variance and mean value, respectively). This distance obviously cancels only when the target is reached. The controller K finally implements for this control atom the choice leading to the smallest distance.

Figure 13 shows the data of a single realization of the experiment with $n_t = 4$. It presents, as a function of time, from top to bottom, the detected sensor states, the estimated distance d , the controller decisions to send emitter or absorber actuator samples, and finally the evolution of the photon number distribution estimated by K together with its average value. Starting from the vacuum at $t = 0$, emitting samples are repeatedly sent until d comes close to zero. The photon number distribution is then peaked on $n = n_t$, with $p(n_t) \approx 0.8 - 0.9$. Around $t = 50$ ms, a downwards quantum jump to $n = 3$ triggers the sending of few emitter samples, which rapidly restore the target state. Close to $t = 70$ ms, another downwards jump is over-corrected, leading to $n = 5$. Absorbers are then sent until restoration of the target.

The performance of the feedback procedure is assessed by reconstructing the average final photon number distribution, independently from the estimation made by K , and by

comparing it to the reference Poisson distribution with n_i photons on the average shown in figure 14(a). The loop is interrupted at $t = 140$ ms. We then send a few QND sensor samples [19]. From 4000 realizations of this experiment, we reconstruct by a maximum likelihood procedure [20] the photon number distribution plotted in figure 14(b). The measured fidelities with respect to the target state, are about twice those of the corresponding Poisson distribution and the photon number distributions are clearly sub-Poissonian.

Halting a feedback loop at a randomly preset time is not the optimal way of using it. A much better performance is obtained when using the state estimation by K for interrupting the feedback at a proper time. The histograms in figure 14(c) present, for each n_i , the $\bar{p}(n)$ distributions obtained with 4000 sequences interrupted when K estimates that $p(n_i) > 0.8$. The obtained fidelity is close to the expected 0.8 value up to $n_i = 3$ and remains always larger than that of the histograms in figure 14(b).

We have implemented a real-time quantum feedback operating in the steady-state. The slow pace of the Rydberg atoms cavity QED experiments is a considerable asset, since it allows K to perform its complex state estimation procedure in the time interval between two measurements of the cavity field. This is much more difficult in optical or circuit QED experiments [52], in which the time scale is typically 1000 times faster.

4. Bohr's complementarity and the Schrödinger cat

The cavity QED set-up can also be used, in a slightly different mode, to implement another thought experiment, the Bohr's moving slit interferometer (figure 1). Let us consider the Ramsey interferometer made up of the zones R_1 and R_2 . The oscillations with ϕ_e of the probability π_e for detecting the atom in $|e\rangle$ result from the quantum interference between two different paths. Either the atom, initially in $|g\rangle$ and finally in $|e\rangle$ absorbs a photon from the classical source in R_1 or it absorbs it in R_2 . Since the classical microwave field involves many photons, the addition of a single photon in the low- Q Ramsey cavities does not modify appreciably their fields. Thus, the two paths leading from the initial to the final state are indistinguishable and the quantum interference of their probability amplitudes results in the Ramsey fringes.

When the cavity contains a Fock state, this picture is not modified. The Fock state is unchanged by an atom crossing C either in $|e\rangle$ or in $|g\rangle$. The two paths remain indistinguishable and we get Ramsey fringes, with a phase shift reflecting the transient shift of the atomic energy levels in the cavity.

4.1 Atomic interferometry and "which-path" information

Let us now focus on the case where C initially contains a coherent field $|\gamma\rangle$. As seen in Section 2.3, this coherent field is dephased in opposite directions for an atom crossing the

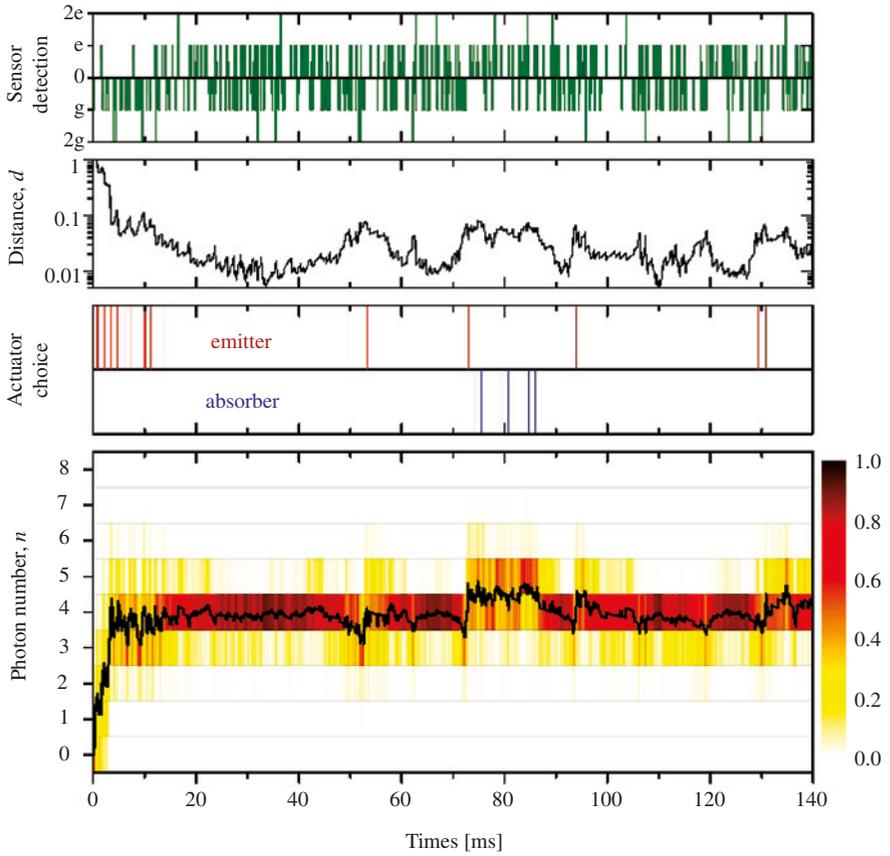


Figure 13. Single realization of the feedback experiment with $n_i = 4$. The frames present versus time, from top to bottom, the detected sensor states (upwards bars for e , downwards bars for g), the distance d to the target, the actuators sent by K (emitters or absorbers) and the photon number distribution $p(n)$ inferred by K (gray scale) together with its average value (solid black line). Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature. [22].

cavity in $|e\rangle$ or in $|g\rangle$. After the atom-cavity interaction, but before the $\pi/2$ pulse in R_2 we are thus left with the intermediate entangled atom-cavity state:

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\phi_0/2} |e\rangle \left| \gamma e^{-i\phi_0/2} \right\rangle + |g\rangle \left| \gamma e^{i\phi_0/2} \right\rangle \right]. \tag{50}$$

The phase of the coherent field left in the cavity thus contains which-path information about the atomic state inside the Ramsey interferometer. If this information is unambiguous, i.e. if the phase-shift ϕ_0 is much larger than the quantum uncertainty on the coherent states phase,

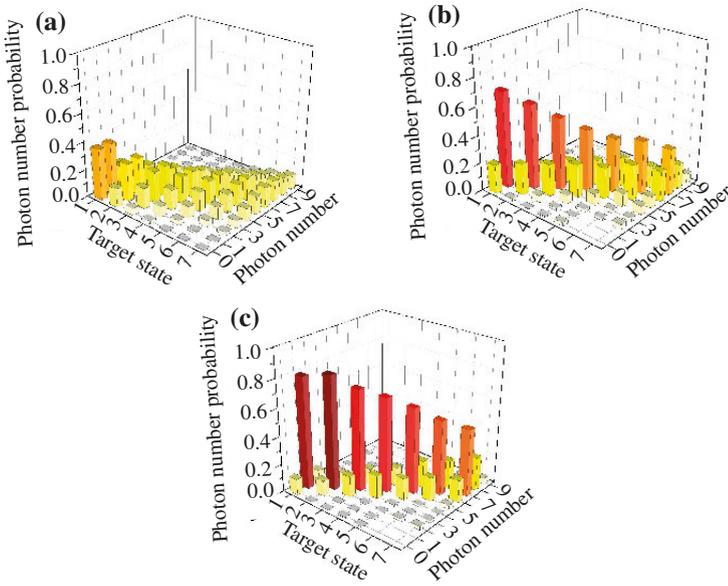


Figure 14. Histograms of photon number distribution as a function of the target photon number n_r . (a) Reference Poisson distribution with n_r photons on the average. (b) Photon number distribution measured by an independent QND process after interrupting the feedback loop at $t = 140$ ms. (c) Photon number distribution measured when K estimates that $p(n_r) > 0.8$. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature. [22].

we expect that the Ramsey fringes should disappear in direct application of the complementarity concept [3].

We can make this discussion more quantitative by writing the final atom-cavity state after R_2 :

$$\begin{aligned}
 |\Psi_f\rangle = & \frac{1}{2} |g\rangle \left[\left| \gamma e^{i\phi_0/2} \right\rangle - e^{-i\phi_0/2} e^{-i\phi_r} \left| \gamma e^{-i\phi_0/2} \right\rangle \right] \\
 & + \frac{1}{2} |e\rangle \left[e^{i\phi_r} \left| \gamma e^{i\phi_0/2} \right\rangle + e^{-i\phi_0/2} \left| \gamma e^{-i\phi_0/2} \right\rangle \right].
 \end{aligned} \tag{51}$$

From this state, we get the probability π_e for detecting finally the atom in $|e\rangle$:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Re} e^{-i(\phi_r + \phi_0/2)} \left\langle \gamma e^{i\phi_0/2} \left| \gamma e^{-i\phi_0/2} \right\rangle \right] \right], \tag{52}$$

where the real part in the r.h.s. contains the Ramsey fringes signal oscillating with ϕ_r .

When the cavity is initially empty, we obviously recover equation (40) for $n = 0$. When the cavity field is non-zero, the Ramsey interference signal is multiplied by the scalar product

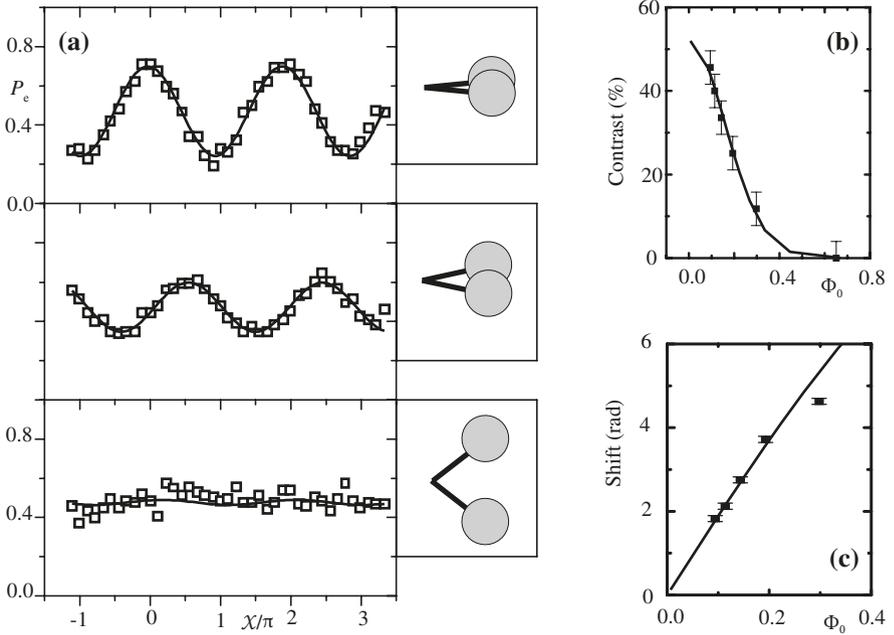


Figure 15. Schrödinger cat and complementarity. (a) Ramsey fringes for $\beta = 3.1$ and three different $\Phi_0 = \phi_0/2$ values (0.1, 0.2 and 0.69 radians, corresponding to $\delta/2\pi = 712, 347$ and 104 kHz respectively from top to bottom). The insets give a pictorial representation of the two field phase components. (b) Ramsey fringes contrast versus Φ_0 . The solid line corresponds to the theoretical predictions, scaled by the finite Ramsey interferometer contrast. (c) Fringes shift (in radians) versus Φ_0 . The slope of the fitted line provides a calibration of the photon number. Reprinted from [23].

of the two coherent fields corresponding to the two quantum paths in the interferometer. We recover here in a more quantitative way our complementarity discussion. For a given phase shift per photon ϕ_0 , when γ is large, the two final field states are nearly orthogonal. They record unambiguous which-path information and the interference signal is lost. When γ is small, the two field states overlap, their scalar product is nearly one and we get Ramsey fringes with a full contrast. More precisely, we can write π_e as a function of the average number of photons, $\bar{n} = |\gamma|^2$ in the initial coherent field:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\bar{n}(1-\cos \phi_0)} \cos(\phi_r + \phi_0/2 + \bar{n} \sin \phi_0) \right]. \tag{53}$$

We recognise a light-shifted Ramsey signal, with a contrast decreasing exponentially with \bar{n} .

We have observed these Ramsey fringes with $\bar{n} = 9.5$ [23] for different phase splittings $\Phi_0 = \phi_0/2$ obtained by varying the atom-cavity detuning δ . The signals for three different values of Φ_0 are shown in figure 15(a) with, in the insets, the final field states represented qualitatively in phase space. The collapse of the fringe amplitude when the field components separate is conspicuous. The fringe contrast is shown versus Φ_0 in figure 15(b) and the fringe phase shift in figure 15(c). In these plots, the points are experimental and the curves given by theory, with an overall contrast adjustment taking into account the imperfections of the Ramsey interferometer. Note that the theoretical formula above, valid in the dispersive limit, do not apply for the smallest detuning $\delta = 104$ kHz. An exact expression of the phase shifts based on the exact dressed states is used for the largest value of Φ_0 . This experiment presents a direct illustration of the complementarity concept in a simple interferometer arrangement. Note that other complementarity tests, even more directly related to Bohr's moving slit original proposal have been performed with the same set-up [53].

4.2 A cat in a box

Looking into the photon box at the end of the complementarity experiment leads us to consider another thought experiment, the Schrödinger cat [10]. When the atom is finally detected, we have no information on the state in which it actually crossed the cavity, since the second $\pi/2$ pulse of the Ramsey interferometer mixes levels $|e\rangle$ and $|g\rangle$. The field must thus be left in a quantum superposition of the two phase-shifted coherent components $|\gamma e^{-i\phi_0/2}\rangle$ and $|\gamma e^{+i\phi_0/2}\rangle$, a mesoscopic quantum superpositions of two states differing by their classical phase.

More precisely, setting $\phi_s = -\phi_0/2$, a final atomic detection after R_2 projects (within an irrelevant global phase) the field onto:

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\left| \gamma e^{+i\phi_0/2} \right\rangle \pm \left| \gamma e^{-i\phi_0/2} \right\rangle \right), \quad (54)$$

where the $+$ ($-$) sign applies for a detection in e (g), \mathcal{N} being a normalization factor. When $\phi_0 = \pi$, we recognize the odd and even cat states introduced in Section 4. In reference to this simple situation, we call even (odd) cat the state with the $+$ ($-$) sign for all ϕ_0 values.

The cat state is, when $|\gamma|$ is large, a quantum superposition of two quite distinct classical states. It is expected to decay rapidly due to its coupling to the environment via the cavity losses. We have performed in an early experiment [23] a first investigation of this decoherence process. It showed that the decay rate of the coherence between the superposed states increases rapidly with their separation in phase space, in good agreement with theoretical expectations.

A much more detailed insight into the cat decoherence can be obtained through a complete reconstruction of the field density operator ρ as a function of time. As discussed in Section 3.2, the QND measurement of the photon number leads to a partial reconstruction. Many measurements performed on the same quantum state allow us to

reconstruct the photon number distribution, *i.e.* the diagonal of the density operator in the Fock state basis. We have no access, however, to the non-diagonal elements, which contain information on the field phase distribution. We are unable, for instance, to distinguish a statistical mixture of Fock states with no phase information from a coherent state, with a well-defined phase. Since we use non-resonant probe atoms, they cannot extract information about the field phase.

A simple modification of the QND scheme allows us to reconstruct the full density operator [24]. Before sending the QND probe atoms, we perform a displacement of the cavity field, by letting the source S inject in C a coherent amplitude β with a well defined phase with respect to the initial cavity field amplitude γ . This ‘homodyning’ procedure turns the cavity field density operator ρ into $\rho_\beta = D(\beta)\rho D(-\beta)$. We then send many QND probe atoms through C . By repeating the experiment many times, we measure the probability $\pi_c(\phi_i|\rho_\beta)$, conditioned to the translated cavity state. It writes simply $\pi_c(\phi_i|\rho_\beta) = \text{Tr}[G(\beta, \phi_i)\rho]$, where $G(\beta, \phi_i) = D(-\beta) M_e^\dagger M_e D(\beta)$. We thus obtain finally, within statistical noise, the average of the observable $G(\beta, \phi_i)$ in the initial cavity state.

Resuming the experiment for very many (up to 600) different translation amplitudes β carefully chosen in phase space, we obtain the average value of many different observables $G(\beta, \phi_i)$ in the state ρ . We infer from these results all the matrix elements of ρ , using an approach based on the maximum entropy principle [54]. This procedure determines the density matrix that best fits the data, while having a maximum entropy $-\text{Tr}\rho \ln \rho$. We thus make sure that the reconstructed state does not contain more information than that provided by the experimental data. We finally represent the reconstructed density matrix by its Wigner function, which gives a clearer insight into the main features of the states.

Figure 16(a) presents the measured Wigner function of the even cat (preparation atom detected in $|e\rangle$), for $|\gamma| = \sqrt{3.5}$ and $\phi_0 = 0.74\pi$. The Wigner function presents two positive bumps centred on the superposed classical amplitudes, $\gamma \exp(\pm i\phi_0/2)$ (the cat’s ‘ears’). In between these two classical features, we observe a high contrast interference pattern that reveals the quantum nature of the superposition (the cat’s ‘smile’). The observed Wigner function is quite close to the theoretical expectation (shown in the inset).

The ‘size’ of this cat is measured by the square of the distance \mathcal{D} between the two classical components in phase space: $\mathcal{D}^2 = 11.8$ photons. The decoherence time scale is expected to be $T_d = 2T_c/\mathcal{D}^2$ at zero temperature. Note that the ears of our cat are not exactly Gaussian (as should be for a superposition of coherent states). This is not due to an imperfection in the reconstruction procedure, but to the cat preparation stage. Since we are not deeply into the dispersive regime (the atom-cavity detuning is $\delta/2\pi = 51$ kHz, not very large compared to $\Omega_0/2\pi$), the phase shift of a Fock state depends in a non-linear way on the photon number, leading to a slight deformation of the coherent components.

Figure 16(b) presents the Wigner function of the odd cat. The classical components are the same, but the interference pattern is phase-shifted by π as compared to that of the even cat. Finally, figure 16(c) presents the Wigner function of a statistical mixture of the two coherent components. It is obtained by mixing data corresponding to different detected states of the preparation atom. The cavity state is then a statistical mixture of the

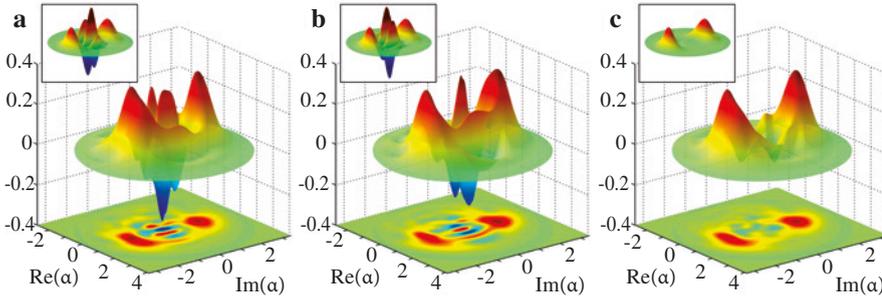


Figure 16. Experimental Wigner functions of an even cat (a), odd cat (b) and statistical mixture of two coherent components (c). The insets present the theoretical expectations. The average photon number is 3.5 and the phase shift is $\phi_0 = 0.74\pi$. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature [24].

odd and even cat, or equivalently a statistical mixture of the two coherent components. The classical ears are still there, but the smile is gone, as expected.

For the reconstruction of ρ , we can repeat the experiment many times for each β value. We thus use only a few QND atoms in each realization and still achieve good statistics. We chose to detect about 20 atoms in a 4 ms time interval. We are thus able to measure the time evolution of the field state (or of its Wigner function) with a decent time resolution.

Figure 17 presents four snapshots of the even cat Wigner function evolution [the conditions are those of figure 16(a)]. The quantum feature, the cat's smile, decays much faster than the energy (the energy decay corresponds to a slow motion of the ears towards the origin, with a time constant $T_c/2$). After about 23 ms, the contrast of the interference pattern is considerably reduced and we are left with a mere statistical mixture. From these data, we deduce the decoherence time scale, T_d , defined as the damping time of the non-diagonal elements of the density matrix in the coherent state basis. We get $T_d = 17 \pm 3$ ms, in excellent agreement with the theoretical expectation, 19.5 ms, taking into account the finite mode temperature.

We get in this way a detailed insight into the cat state decoherence. More precise measurements, with quite larger cats, could allow us to realize a full quantum process tomography of the cavity relaxation. Experiments on 'decoherence metrology' are interesting to test alternative interpretations of the conspicuous lack of quantum superpositions at the macroscopic scale [55].

5. Conclusion

We have briefly described microwave cavity QED experiments which implement some of the thought experiments proposed by Bohr and the founding fathers of the quantum theory.

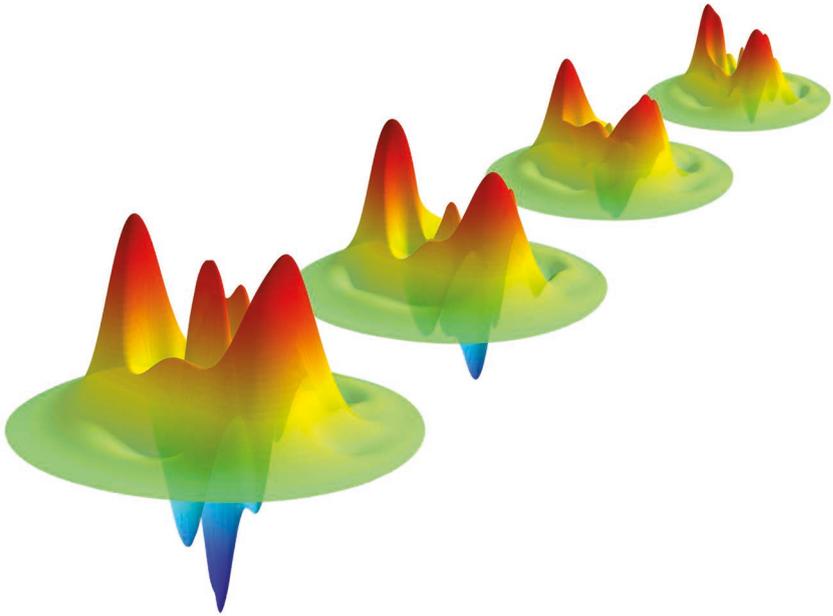


Figure 17. For snapshots of the Wigner function of a decaying Schrödinger cat state. The initial state is the even cat of figure 16(a). The snapshots are taken 1.3 ms, 4.3 ms, 15.8 ms and 22.9 ms (from front to back) after cat preparation.

We can trap photons in boxes and weigh them with scales at the atomic level. We are able to count the number of photons in the box without absorbing them in an ideal Quantum Non Demolition measurement of the field intensity. This process directly illustrates all the prescriptions of the Copenhagen interpretation for quantum measurements. We can record which-path information in an atomic interferometer, as with Bohr's thought moving slit device for interfering particles. We directly illustrate the complementarity concept by showing that full which-path information and interference fringes are mutually incompatible.

These experiments lead to the preparation of mesoscopic quantum states and mesoscopic quantum superpositions. The QND measurement process prepares Fock states. We have performed a detailed study of their relaxation. The slow pace of these experiments and the exquisite controllability of the atomic system make it also possible to test strategies to combat decoherence. Quantum feedback uses information extracted by QND probes to deterministically steer the cavity field towards a prescribed Fock state. It also protects these non-classical resources from decoherence by reversing rapidly the adverse effects of quantum jumps.

The complementarity experiment leads to the preparation of a quantum superposition of mesoscopic coherent states, a mesoscopic equivalent of the famous Schrödinger cat. A full quantum state reconstruction procedure, also based on the QND atomic probes, allows us to get a detailed insight into the decoherence of this cat state. These experiments

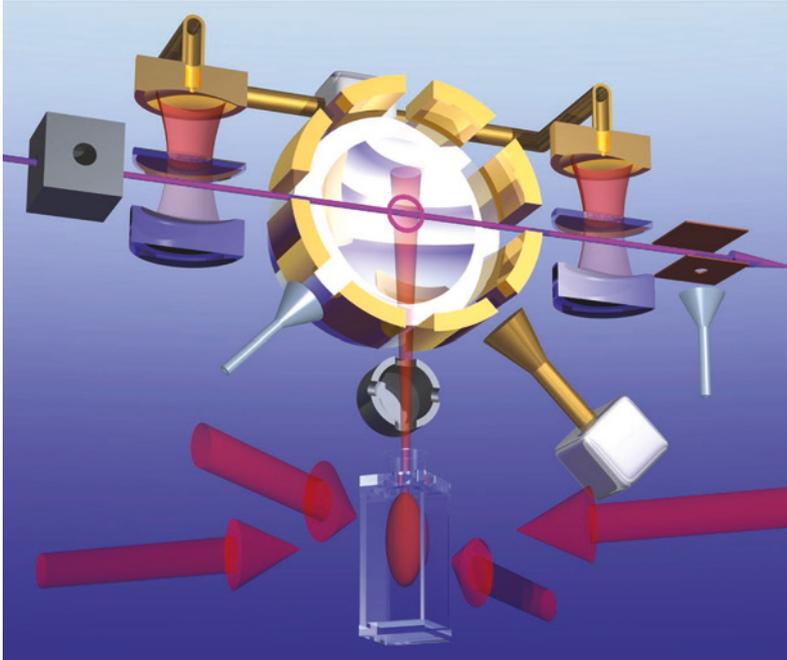


Figure 18. Experimental set-up under construction, featuring a slow atomic beam in a fountain arrangement to prepare circular atoms nearly at rest in a high- Q cavity (only one mirror is shown). The electrodes around the cavity are used for the circular state preparation and field-ionisation detection. A fast horizontal atomic beam with its Ramsey zones and detectors is used for cavity diagnostic.

are thus also well suited for the exploration of the boundary between the quantum and the classical worlds.

All these achievements open promising perspectives. One of them involves the interaction of slow circular Rydberg atoms with the cavity. In the present set-up, the atom-cavity interaction time is limited to about $100 \mu\text{s}$ by the thermal velocity of the atomic beam. This is an asset when we need to extract information rapidly out of the cavity, but it is a severe limitation for other experiments. We are thus developing a new set-up, represented in figure 18, where the atoms will be prepared inside the cavity itself, out of a slow atomic beam in a fountain arrangement. Atoms excited near their turning point interact with the mode for times in the millisecond range, only limited by their free fall through the mode's waist. The limited levels lifetime makes it mandatory to perform the field ionization detection also in the cavity structure.

With these long interaction times, we could generate large cat states, containing up to a few tens of photons with high fidelities and monitor their decoherence. We could realize quantum random walks for the phase of the cavity field, driven by a single atom [56]. We

could realize engineered reservoirs for the cavity field relaxation, made up of atoms crossing the cavity one by one. We have shown recently that this strategy prepares and stabilizes against mundane decoherence a large class of non-classical states [57, 58].

Finally, the atom-cavity interaction time could be long enough to resolve the anharmonicity of the dressed-levels ladder and to address selectively a transition corresponding to one precise photon number. We have shown recently that we could realize a Quantum Zeno Dynamics (QZD) in this context [59, 60]. QZD [61] generalizes the Quantum Zeno Effect to measurements of an observable with degenerate eigenspaces. Under such frequently repeated measurements, the system evolution is confined in one of these subspaces, and proceeds under the restriction of the Hamiltonian in the subspace.

Frequent interrogation of a photon-number selective transition in the dressed levels implements such a dynamics, restricting the evolution to photon numbers smaller or larger than the addressed one. This leads to non-trivial dynamics and to the efficient generation of non-classical states. Combining these interrogations with global displacements, we proposed ‘phase space tweezers’, able to pick out a single coherent component in a complex cat-like superposition and to move it at will, independently from the others. Moreover, these tweezers can be adapted to prepare such superpositions rapidly from the initial vacuum state, a rather fascinating perspective.

References

- [1] S. Haroche and J.-M. Raimond, “Bohr’s legacy in cavity qed,” in *Niels Bohr, 1913-2013: Poincaré Seminar 2013*, edited by O. Darrigol, B. Duplantier, J.-M. Raimond, and V. Rivasseau (Springer International Publishing, Cham, 2016) pp. 103–146, ISBN 978-3-319-14316-3.
- [2] N. Bohr, *Collected Works* (North Holland, Amsterdam, 1985).
- [3] N. Bohr, *Nature*, **121**, 580 (1928).
- [4] N. Bohr, in *Albert Einstein, Philosopher Scientist*, edited by A. Schilpp (Open Court, La Salle (IL), 1949) p. 201.
- [5] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**, 777 (1935).
- [6] N. Bohr, *Phys. Rev.*, **48**, 696 (1935).
- [7] N. F. Ramsey, *Molecular Beams, International Series of Monographs on Physics* (Oxford University Press, Oxford, 1985).
- [8] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband, and D. J. Wineland, *Science*, **329**, 1630 (2010).
- [9] M. Rangaswamy, B. Porejsz, B. A. Ardekani, S. J. Choi, J. L. Tanabe, K. O. Lim, and H. Begleiter, *Neuroimage*, **21**, 329 (2004).

- [10] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, **23**, 807, 823, 844 (1935).
- [11] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the quantum: atoms, cavities and photons* (Oxford University Press, 2006).
- [12] E. M. Purcell, *Phys. Rev.*, **69**, 681 (1946).
- [13] H. Mabuchi and A. C. Doherty, *Science*, **298**, 1372 (2002).
- [14] C. Nölleke, A. Neuzner, A. Reiserer, C. Hahn, G. Rempe, and S. Ritter, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 140403 (2013).
- [15] K. Hennessy, A. Badolato, M. Winger, D. Gerace, M. Atature, S. Gulde, S. Falt, E. L. Hu, and A. Imamoglu, *Nature*, **445**, 896 (2007).
- [16] M. D. Reed, L. DiCarlo, S. E. Nigg, L. Sun, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature*, **482**, 382 (2012).
- [17] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**, 89 (1963).
- [18] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **446**, 297 (2007).
- [19] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **448**, 889 (2007).
- [20] M. Brune, J. Bernu, C. Guerlin, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, I. Dotsenko, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 240402 (2008).
- [21] C. Sayrin, I. Dotsenko, X. Zhou, B. Peaudecerf, T. Rybarczyk, S. Gleyzes, P. Rouchon, M. Mirrahimi, H. Amini, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **477**, 73 (2011).
- [22] X. Zhou, I. Dotsenko, B. Peaudecerf, T. Rybarczyk, C. Sayrin, S. Gleyzes, J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 243602 (2012).
- [23] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887 (1996).
- [24] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **455**, 510 (2008).
- [25] R. G. Hulet and D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1430 (1983).
- [26] T. F. Gallagher, *Rydberg Atoms* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [27] M. Gross and J. Liang, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 3160 (1986).

- [28] P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 113601 (2005).
- [29] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1975).
- [30] P. Nussenzveig, F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, J.-M. Raimond, S. Haroche, and W. Gawlik, *Phys. Rev. A*, **48**, 3991 (1993).
- [31] J.-M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565 (2001).
- [32] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Science*, **288**, 2024 (2000).
- [33] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J.-M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin, *Appl. Phys. Lett.*, **90**, 164101 (2007).
- [34] S. M. Barnett and P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [35] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973).
- [36] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.*, **48**, 119 (1976).
- [37] W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 715 (2003).
- [38] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**, 749 (1932).
- [39] K. E. Cahill and R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **177**, 1857 (1969).
- [40] D. M. Greenberger, M. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Am. J. Phys.*, **58**, 1131 (1990).
- [41] V. B. Braginskii, Y. I. Vorontsov, and K. S. Thorne, *Science*, **209**, 547 (1980).
- [42] P. Grangier, J. A. Levenson, and J.-P. Poizat, *Nature*, **396**, 537 (1998). [43] T. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P. Toschek, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1696 (1986).
- [44] J. C. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1699 (1986).
- [45] M. Bauer and D. Bernard, *Phys. Rev. A*, **84**, 044103 (2011).
- [46] H. Wang, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, J. Wenner, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 240401 (2008).
- [47] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.*, **18**, 756 (1977).
- [48] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. A*, **41**, 2295 (1990).

- [49] J. Bernu, C. Deléglise, C. Sayrin, S. Kuhr, I. Dotsenko, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 180402 (2008).
- [50] H. M. Wiseman, *Phys. Rev. A*, **49**, 2133 (1994).
- [51] A. C. Doherty, S. Habib, K. Jacobs, H. Mabuchi, and S. M. Tan, *Phys. Rev. A*, **62**, 012105 (2000).
- [52] R. Vijay, C. Macklin, D. H. Slichter, S. J. Weber, K. W. Murch, R. Naik, A. N. Korotkov, and I. Siddiqi, *Nature*, **490**, 77 (2012).
- [53] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **411**, 166 (2001).
- [54] V. Buzek and G. Drobny, *J. Mod. Opt.*, **47**, 2823 (2000).
- [55] S. Adler and A. Bassi, *Science*, **325**, 275 (2009).
- [56] B. C. Sanders, S. D. Bartlett, B. Tregenna, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A*, **67**, 042305 (2003).
- [57] A. Sarlette, J.-M. Raimond, M. Brune, and P. Rouchon, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 010402 (2011).
- [58] A. Sarlette, Z. Leghtas, M. Brune, J. M. Raimond, and P. Rouchon, *Phys. Rev. A*, **86**, 012114 (2012).
- [59] J.-M. Raimond, C. Sayrin, S. Gleyzes, I. Dotsenko, M. Brune, S. Haroche, P. Facchi, and S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 213601 (2010).
- [60] J. M. Raimond, P. Facchi, B. Peaudecerf, S. Pascazio, C. Sayrin, I. Dotsenko, S. Gleyzes, M. Brune, and S. Haroche, *Phys. Rev. A*, **86**, 032120 (2012).
- [61] P. Facchi and S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 080401 (2002).

Troisième partie

Ondes, matière
et quantification

Troisième partie

Ondes, matière et quantification

Présentation

Après avoir passé en revue les confirmations qui s'accumulent à propos de la validité de la théorie de la Relativité générale grâce aux progrès de l'astrophysique observationnelle (première partie) et discuté les évolutions importantes intervenues dans le domaine de l'interprétation des fondements de la théorie quantique (deuxième partie), cette troisième partie se propose de faire un point sur les avancées théoriques et expérimentales concernant le rapprochement ou la réconciliation de la relativité et la quantique. Comme cela a été déjà souligné, ce rapprochement est une nécessité. Dans la compréhension des « débuts de l'Univers », de même que dans celle de la naissance, la vie et l'éventuelle mort des trous noirs, la composante quantique des phénomènes gravitationnels ne peut pas être négligée.

I. Les « débuts de l'Univers »

Les observations du satellite Planck ont permis de fixer l'âge de l'Univers à 13,8 milliards d'années, mais on ne sait rien de « l'instant zéro ». Le modèle standard de la cosmologie conduit à identifier ce supposé instant zéro à une singularité où la densité devient infinie, mais cette singularité ne fait que refléter notre méconnaissance des lois physiques aux énergies colossales de l'Univers primordial. Nous verrons plus loin que deux théories suggèrent que ce que nous appelons singularité ou Big Bang ne serait qu'une période de transition entre une phase de contraction et l'expansion que nous observons aujourd'hui ; l'histoire de l'Univers commencerait alors bien plus tôt !

Que le Big Bang soit l'origine de notre l'Univers ou une simple transition, la connaissance des premiers instants qui l'ont suivi est indispensable. Ces premiers instants conditionnent en effet toute l'histoire future de l'Univers, et notamment la formation des structures (galaxies, étoiles, planètes...). Ainsi, pour aboutir à ce que nous observons aujourd'hui, la phase primordiale doit avoir produit de petites différences de densité réparties un peu partout. Grâce à l'étude précise des structures existantes, on remonte alors le temps en simulant les processus qui leur ont donné naissance. La cosmologie est fondée sur deux autres piliers : l'étude du fond diffus cosmologique, émis 370 000 ans après le Big Bang, selon les dernières observations de la sonde spatiale Planck, et les expériences menées avec les accélérateurs de particules, qui recréent les particules de l'Univers primordial et notamment avec le Large Hadron Collider, LHC du CERN où l'on est en mesure de reproduire le plasma de quarks et de gluons. À partir de ces trois sources d'information, on essaie de reconstituer les tous premiers instants de l'Univers.

Mais au temps dit de Planck (10^{-43} seconde après le Big Bang), la température atteint 10^{32} °C et l'énergie 10^{19} gigaélectronvolts (GeV), cette dernière valeur est très supérieure aux énergies actuellement générées par le LHC. Dans ces conditions, le modèle standard de la cosmologie ne s'applique pas. Ce modèle est fondé sur la Relativité générale – une théorie non quantique de la gravitation – et le modèle standard de la physique des particules – une théorie quantique qui décrit le monde microscopique sans tenir compte de la gravitation. Or à ces énergies extrêmes des premiers instants, les quatre interactions fondamentales (faible, forte, électromagnétique et gravitationnelle) sont fortement couplées ! De plus, dans ces mêmes conditions, l'échelle d'espace est celle de la longueur de Planck (10^{-33} cm) : y règne le principe d'indétermination de Heisenberg, la notion d'espace-temps continu ne peut pas correspondre à une réalité physique, elle doit être remplacée par une description microscopique plus fine. Différentes idées ont été mises en avant pour décrire cette structure microscopique de l'espace-temps à l'échelle de Planck dont certaines sont abordées dans le cadre de cet ouvrage.

2. La dynamique des trous noirs

La découverte directe des ondes gravitationnelles suite à la fusion de deux trous noirs nous met en présence de phénomènes impliquant un régime de champ gravitationnel fort, très rapidement variable par le fait que les deux trous noirs atteignent des vitesses proches de la célérité de la lumière.

Mais, d'une manière plus générale, le régime des champs gravitationnels forts se rencontre dans la physique des *corps gravitationnellement condensés* – états finaux de l'évolution des étoiles. Après épuisement de leurs sources d'énergie nucléaire, les étoiles finissent par condenser une masse énorme dans un rayon très petit, conduisant, selon la masse initiale, à une naine blanche, à une étoile à neutrons ou à un trou noir. L'apparition d'une singularité associée à des régions de champ gravitationnel fort est un phénomène générique de la théorie d'Einstein. Dans le cas de la formation d'un trou noir, cette singularité n'est pas « visible » de l'extérieur. La conjecture de « censure cosmique », due à Roger Penrose,

affirme que le processus d'effondrement d'un amas de matière conduit toujours à une telle singularité « masquée ».

La théorie d'Einstein décrit l'espace-temps comme un milieu continu à géométrie variable qui est déformé par la présence de corps massifs ou de toute autre forme d'énergie. Plus un corps est dense, plus la déformation de l'espace-temps est importante. Dans le cas extrême, celui d'un trou noir, la forme exacte de la géométrie a été proposée par Karl Schwarzschild en 1915. La solution de Schwarzschild se caractérise par une surface sphérique qui délimite une région de l'espace d'où rien, même pas la lumière, ne peut s'échapper. C'est l'horizon du trou noir, un barrage en apparence absolu à toute forme de communication avec l'extérieur. La taille de l'horizon est donnée par le rayon de Schwarzschild R_0 qui est proportionnel à la masse M du trou noir. Plus la masse est grande, plus le trou est volumineux. Les trous noirs sont des objets célestes particuliers dans le sens que leur centre est « caché » par un horizon. L'observateur lointain voit le temps s'arrêter près de l'horizon d'un trou noir, et toutes les fréquences se décaler vers l'infrarouge. Même la lumière ne se propage plus, de telle sorte qu'aucun signal ne peut lui parvenir de l'intérieur.

Cette image classique est en fait modifiée car un trou noir peut s'évaporer par un processus quantique appelé effet tunnel. Cet effet permet à une particule de franchir une barrière de potentiel qui lui serait classiquement interdite et le trou noir peut ainsi perdre de sa masse. Le champ gravitationnel fournit l'énergie nécessaire pour que la particule émise devienne réelle. Cette évaporation donne naissance à une distribution thermique de type corps noir caractérisée par une température thermodynamique. Stephen Hawking a en effet montré, en 1974, que dans l'approximation semi-classique (application du formalisme quantique aux particules émises alors que le trou dispose d'un champ gravitationnel classique) un trou noir rayonne comme un corps noir à une température T_H qui est inversement proportionnelle à la masse M du trou noir. Fait remarquable, la formule donnant cette température englobe trois constantes fondamentales : la constante de gravitation G , la constante de Planck h et la constante de Boltzmann k . Le spectre de vitesse est non seulement quantitativement gouverné par la valeur de cette température mais aussi qualitativement en dictant la nature des particules émises : plus le trou noir est chaud, plus il est en mesure de produire des entités de masses élevées. Le taux de perte de masse résultant et l'énergie caractéristique des corpuscules varient comme l'inverse du carré de la masse M du trou noir. Cela veut dire que plus les trous noirs deviennent légers, plus leur vitesse d'évaporation est grande, plus leur température est élevée et plus les énergies des particules émises sont importantes. Le processus doit se poursuivre jusqu'à ce que soient atteints des taux de perte de masse quasiment infinis pour une température extrêmement élevée lorsque la masse du trou noir devient très petite. On montre que le temps de vie d'un trou noir est proportionnel au cube de sa masse.

Les temps d'évaporation peuvent donc varier de quelques secondes à plusieurs milliers de fois l'âge de l'Univers. Aussi, dans la pratique, étant donné leurs masses, le phénomène de Hawking ne concerne pas les trous noirs stellaires, et encore moins les trous noirs supermassifs présents au sein des galaxies. Cependant il pourrait exister des trous noirs primordiaux caractérisés par une masse arbitrairement faible et une forte évaporation, les conduisant à s'évanouir rapidement. Leur formation résulterait de fluctuations dans l'Univers

primordial. En effet, si à un moment donné l'inhomogénéité de l'Univers est suffisamment élevée, un trou noir pourrait se former. Le modèle standard de la cosmologie prévoyant une brève phase d'inflation durant laquelle les distances s'accroissent exponentiellement, seuls les trous noirs créés à l'issue de celle-ci pourraient échapper à une gigantesque dilution. La masse de ces trous noirs primordiaux serait alors très en dessous des masses stellaires. Ces objets seraient donc des sondes exceptionnelles pouvant nous fournir des informations sur les propriétés de l'Univers dans les tout premiers instants de sa formation, informations s'ajoutant à celles fournies par le fond diffus cosmologique (CMB) et par les grandes structures de l'Univers. Les tentatives de mise en évidence expérimentale des trous noirs primordiaux se font par l'intermédiaire des rayons cosmiques qu'ils sont censés émettre (des photons gammas notamment).

L'étude des trous noirs indique que l'on peut les décrire à l'aide de trois paramètres : la masse M , la charge électrique Q , le moment cinétique L de rotation. Le Premier principe de la thermodynamique ou principe de conservation de l'énergie s'écrit classiquement : $dU = \delta Q + \delta W$. Une variation d'énergie de masse du trou noir δMc^2 est égale à la somme de l'énergie liée à la variation δA de la surface de l'horizon des événements du trou noir à laquelle s'ajoutent celles de variations d'énergie cinétique de rotation et d'énergie potentielle électrique. Ces deux derniers termes sont inclus dans δW . Pour que l'analogie avec la thermodynamique ait un sens physique, il faut identifier la variation d'énergie due à δA avec une variation de quantité de chaleur. Hawking montra en 1974 que la surface de l'horizon des événements pouvait être identifiée à une entropie S avec $\delta Q = TdS$. On peut finalement écrire que $dU = TdS + \text{travaux échangés}$. Ainsi un trou noir possède une température et une entropie !

Son expression avait été conjecturée avant Hawking par Jacob Bekenstein. Cette entropie S_{BH} est proportionnelle au carré de la masse M du trou noir ; dans son expression interviennent également les principales constantes fondamentales dont la constante de Planck h . Enfin d'autres processus concernant la résorption des trous noirs ont été proposés à titre d'hypothèses avancées par Carlo Rovelli et son équipe, dans le cadre de la théorie de la gravité quantique à boucles.

Confirmer ces conjectures par des approches théoriques unifiées et retrouver l'expression des relations concernées, en proposer des vérifications observationnelles, est l'un des enjeux du rapprochement entre Relativité générale et physique quantique. Comme cela a été déjà dit dans le prologue de cet ouvrage, la théorie quantique des champs (TQC) a été le terreau sur lequel s'est opéré le rapprochement de la quantique avec la relativité restreinte. La recherche de formalismes qui permettraient de la transformer ou de la généraliser semblent bien être l'une des composantes des tentatives concernant cette fois-ci la relativité générale. C'est pourquoi le chapitre écrit par Jean Zinn-Justin, concernant la signification profonde de techniques ayant permis de surmonter certaines difficultés de la TQC, a pris place comme premier chapitre de cette troisième partie.

3. Théorie quantique des champs et renormalisation

La théorie quantique des champs (TQC) combine essentiellement la mécanique quantique et la relativité restreinte. Son ingrédient physique principal, le champ quantique, réunit deux notions de base de la physique classique (ou quantique non relativiste) : les particules et les champs. Par exemple, le champ électromagnétique quantique, dans des limites appropriées, peut se réduire à des photons (ou quanta de lumière) de type particule, ou à une onde décrite par un champ de Lorentz classique. Cela est vrai également du champ quantique de Dirac concernant les particules massives électriquement chargées. La TQC, en tant que théorie des champs quantiques en interaction, introduit un phénomène remarquable : les particules virtuelles liées aux transitions virtuelles de la mécanique quantique. Par exemple, un photon se propageant dans le vide (le vide classique) subit une transition virtuelle en une paire électron-positon. Habituellement, cette paire subit ensuite la transformation inverse, l'annihilation en un photon. Cette succession de deux transitions donne lieu au phénomène de polarisation du vide. De ce fait l'espace vide de la TQC n'est pas le néant : il est rempli de paires virtuelles particule-antiparticule. En TQC, le passage de l'état d'un système physique à un autre peut être ainsi la superposition de plusieurs chemins « histoires virtuelles » attachées à une amplitude et composées d'événements – l'apparition d'une paire particule-antiparticule par exemple – qu'on n'observe pas en général et dont la durée et l'étendue spatiale sont arbitrairement petites.

Les calculs en TQC donnent habituellement une série de termes qui représentent les contributions des différentes composantes de la polarisation du vide, qu'illustrent les diagrammes de Feynman. Malheureusement, il s'avère que la plupart de ces termes sont infinis. Ce sont principalement Bethe, Feynman, Schwinger et Dyson qui, à la fin des années 40, ont résolu une bonne partie de ces difficultés par la découverte de la méthode dite de renormalisation. Ils ont montré que l'on peut regrouper les contributions infinies en un petit nombre de combinaisons mathématiques correspondant à un changement de normalisation des champs quantiques, ce qui en fin de compte aboutit à une redéfinition (renormalisation) des masses et des constantes de couplage. L'aspect le plus important de la renormalisation est que le calcul des quantités physiques donne des fonctions finies des nouveaux couplages (comme la charge de l'électron) et masses « renormalisés » : tous les infinis sont incorporés dans les facteurs de la redéfinition/renormalisation. Les valeurs « nues » de la masse et de la charge électrique n'apparaissent pas dans l'expression physique. Cependant, les paramètres renormalisés doivent correspondre aux paramètres physiques, c'est-à-dire mesurés expérimentalement. Quand les calculs d'électrodynamique quantique avec la renormalisation convenable ont fourni des résultats en accord étroit avec l'expérimentation (par exemple le moment magnétique anormal de l'électron pour lequel l'accord est de l'ordre de 10^{-10}), il est clairement apparu que la technique de renormalisation permettait à une théorie de donner de bons résultats. Une fois que les infinis de la théorie des champs ont été éliminés comme il se doit, les paramètres finis obtenus sont en conformité avec les diverses mesures expérimentales. Au milieu des années 50, l'invention d'un algorithme désignée par méthode du groupe de renormalisation (MGR) permet d'améliorer les solutions approchées des équations de la TQC. La MGR devient un outil puissant pour étudier les singularités aux limites aussi bien à haute que basse énergies.

Dans les années 1970, le groupe de renormalisation a permis de comprendre comment les singularités des fonctions thermodynamiques à une transition de phase (comme liquide-vapeur, Hélium fluide à superfluide...) pouvaient être universelles ; Jean Zinn-Justin a fortement contribué à développer ce cadre de la théorie (chapitre 11). Le modèle basé sur la structure mathématique de théorie de jauge¹ (non-abélienne) et la notion de brisure spontanée de symétrie ont été depuis largement validés par l'expérience. Le boson de Higgs est la dernière particule prédite par ce modèle ; elle a été découverte en 2012 grâce à l'utilisation du Large Hadron Collider au CERN.

Mais toutes les théories ne sont pas « renormalisables ». Ainsi dans la théorie de la relativité d'Einstein, les processus virtuels qui pourraient avoir lieu à l'échelle de la longueur de Planck dans une version quantifiée de cette théorie modifient le tissu de l'espace-temps d'une façon qu'on ne sait plus contrôler : la quantification directe de la théorie d'Einstein pose problème. Peut-être faut-il alors considérer que la Relativité générale n'est pas une théorie fondamentale, mais seulement une théorie effective qui découle, comme approximation macroscopique, d'une théorie unifiée sous-jacente. Cette ambitieuse vision unificatrice est devenue dominante depuis le début des années 70, après le succès de l'unification des forces non gravitationnelles. Aujourd'hui, il existe essentiellement deux grandes théories concurrentes, et à ce stade encore spéculatives, qui proposent de quantifier la gravitation : la théorie des cordes et la gravité quantique à boucles.

4. Une première approche du problème : les théories des cordes

Le mérite principal de la théorie des (super) cordes est qu'elle nous offre a priori une unification complète de toute la physique de base, un cadre théorique unifié couvrant à la fois le modèle standard des particules et la gravitation. Elle prévoit ainsi l'existence du graviton, boson médiateur possible de la gravité. Elle montre, en utilisant la supersymétrie, qu'à très haute température, de l'ordre de 10^{27} °C, il y a convergence des interactions non-gravitationnelles. Elle prévoit qu'au voisinage de la température de Planck, 10^{32} °C, les quatre forces se rejoignent dans une origine commune (superforce).

L'hypothèse de base en théorie des cordes est que les particules élémentaires correspondent aux états quantiques d'un objet étendu unidimensionnel, la « corde fondamentale ». Les attributs intrinsèques de la particule : masse, spin, charge électrique etc., proviennent du mouvement de la corde dans le référentiel où son centre est au repos. L'idée d'un objet fondamental étendu remonte à un article de Paul Dirac en 1962, mais c'est en 1968 que la théorie des cordes est réellement née, avec la célèbre formule de diffusion de Gabriele Veneziano². Veneziano découvrit que la fonction bêta (une fonction eulérienne) utilisée comme amplitude de dispersion, désormais appelée amplitude de Veneziano, possède de nombreuses

(1) Une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur un groupe de symétrie locale, appelé groupe de jauge, définissant une « invariance de jauge ». Le prototype le plus simple de théorie de jauge est l'électrodynamique classique de Maxwell.

(2) Les autres principaux promoteurs de cette théorie sont Joël Scherk, John Schwartz, Michael Green, Edward Witten...

propriétés, capables de rendre compte des propriétés physiques de l'interaction forte entre les particules. Les propriétés de cette amplitude sont considérées comme le point de départ de la théorie des cordes. En 1975, Joël Scherk et John Schwarz montrent l'intérêt de la théorie des cordes pour la quantification de la gravité en découvrant des modes de vibration de spin égal à deux, identifiés à la particule supposée véhiculer l'interaction gravitationnelle, le graviton.

Dans la théorie des cordes, les composants fondamentaux de la matière ne sont donc pas ponctuels, mais unidimensionnels, à l'instar de cordes sans épaisseur. Les lois quantiques permettent à ces cordes vibrantes dénuées de masse de décrire les particules et leurs interactions. Elles font émerger de nouvelles propriétés ayant de profondes implications pour la cosmologie. D'abord, des effets quantiques imposent aux cordes une taille minimale de l'ordre de 10^{-34} mètre. Ce quantum irréductible de longueur est une nouvelle constante de la nature. Dans la théorie des cordes, elle joue un rôle crucial en imposant une borne finie à des quantités qui, sans cela, deviendraient nulles ou infinies. Ensuite, l'énergie de certains modes de vibration des cordes correspond aux masses des particules. Enfin, ces vibrations confèrent aux cordes un moment cinétique intrinsèque, ou spin. Les cordes peuvent acquérir plusieurs unités de spin tout en restant de masse nulle : elles sont à même de représenter les bosons, particules messagères des forces fondamentales (tel le photon pour l'électromagnétisme). Les constantes qui décrivent l'intensité des forces fondamentales, telle la constante de gravitation ou la charge électrique, ne sont plus fixées arbitrairement, mais apparaissent dans la théorie des cordes sous forme de champs dont les valeurs évoluent au cours du temps. L'un de ces champs, le dilaton, joue un rôle particulier : il détermine l'évolution des autres champs, donc celle de l'intensité de toutes les interactions. Au cours de différentes époques cosmologiques, les « constantes » de la physique auraient pu connaître ainsi quelques dérives.

Les cordes ont révélé d'autre part l'existence de nouvelles symétries de la nature, les dualités, qui transforment radicalement notre compréhension intuitive du comportement des objets à des échelles extrêmement petites. L'une de ces symétries, la T-dualité, relie les petites et les grandes dimensions supplémentaires. Cette symétrie est liée à la plus grande variété de mouvements possibles pour les cordes, par rapport à des particules ponctuelles.

Notons enfin – et c'est un point important concernant la structure géométrique de la théorie, et consécutivement la structure géométrique de l'Univers – que les équations de la théorie des cordes ne sont cohérentes que si elles sont décrites à dix dimensions et donc dans un espace à neuf dimensions au lieu des trois usuelles, et si les six dimensions spatiales supplémentaires sont enroulées sur de très petites distances.

5. La théorie des cordes en cosmologie et en astrophysique

Les cordes ne peuvent être réduites à un point ; leur taille non nulle et les symétries nouvelles qui leur sont associées imposent des bornes supérieures aux quantités physiques qui croissent indéfiniment dans les théories classiques, et des bornes inférieures aux

quantités qui diminuent. Lorsqu'on remonte la chronologie cosmique, l'espace-temps se contracte et le rayon de courbure de toutes les dimensions rétrécit. Selon les théoriciens, la T-dualité empêche le rayon de courbure de décroître jusqu'à zéro et de provoquer la singularité du Big Bang standard. Parvenue à la longueur minimale possible, cette contraction devient physiquement équivalente à une expansion de l'espace, dont le rayon de courbure recommence à croître. La T-dualité fait « rebondir » l'effondrement, qui devient une nouvelle expansion. Le scénario du pré Big Bang a été proposé au début des années 1990 par Gabriele Veneziano et Maurizio Gasperini.

La singularité ayant disparu, rien n'empêche d'imaginer que l'Univers existait avant le Big-Bang. En combinant les symétries introduites par la théorie des cordes avec la symétrie par renversement du temps, selon laquelle les équations de la physique fonctionnent indifféremment lorsqu'on les applique vers le futur ou vers le passé, les chercheurs ont imaginé de nouvelles cosmologies, où le Big Bang n'est pas une singularité mais seulement une transition violente entre deux états de l'Univers. L'intérêt de cette conception est qu'elle intègre automatiquement les idées du modèle inflationniste, c'est-à-dire l'existence d'une période d'inflation accélérée capable de justifier l'homogénéité de l'Univers. Dans le modèle standard de la cosmologie, l'accélération est causée après le Big Bang par l'inflaton. Dans la cosmologie des cordes, l'accélération inflationniste résulte des symétries de la théorie dans un état de l'Univers qui se substitue en quelque sorte au Big-Bang et à sa singularité, et qui précède la phase classique d'expansion ralentie, dont la physique est bien connue. Les conditions régnant dans et aux abords de cet état sont si extrêmes que nul ne sait résoudre les équations qui les décrivent. Mais Gabriele Veneziano nous présente (chapitre 12) de manière didactique deux scénarios possibles, celui où cet état fait « émerger » le temps et l'espace – on pourra alors parler de commencement des temps – et celui où cet état n'est effectivement qu'un état de « rebond », transition entre deux phases classiques, une phase classique de contraction antérieure et une phase classique d'expansion, celle qui nous a donné naissance.

Une théorie microscopique de la gravité doit être aussi capable de compter les micro-états du trou noir, et de retrouver l'entropie S_{BH} de Bekenstein-Hawking par un calcul statistique. C'est ce qu'Andrew Strominger et Cumrun Vafa ont réussi à faire en 1996, en modélisant un trou noir dit « supersymétrique » par un assemblage de cordes et de D-branes³.

6. La gravitation quantique à boucles

La « théorie des boucles » est une théorie quantique pour le champ gravitationnel. L'objectif de la gravitation quantique à boucles (GQB, ou LQG en anglais, *loop quantum gravity*) est de compléter et rendre cohérent l'ensemble des théories existantes pouvant concerner la gravité, renvoyant à plus tard l'objectif plus ambitieux de trouver une éventuelle « théorie du tout » unifiée.

(3) Une Dp-brane est un objet p-dimensionnel sur lequel les bouts de cordes ouvertes peuvent s'accrocher. Les Dp-branes sont en fait des solitons dans la théorie des cordes. Les solitons sont des excitations non dispersives, obtenues comme solutions des équations non linéaires d'une théorie des champs.

La théorie de la gravitation quantique à boucles a pu prendre son essor grâce en particulier aux travaux de Abhay Ashtekar qui, en 1986, propose de nouvelles variables permettant une quantification canonique de la théorie de la Relativité générale dans une formulation hamiltonienne. Ensuite viennent les travaux de Ted Jacobson, Carlo Rovelli, Lee Smolin et d'autres auteurs dont les grandes lignes sont résumées ci-après.

La gravitation quantique à boucles est donc une quantification de la relativité générale, avec ses couplages conventionnels de champs de matière. Elle est mathématiquement bien définie, non perturbative, indépendante de la préexistence d'une trame de fond spatio-temporelle. Selon la GQB, de façon intuitive, ce qui se passe à l'échelle de Planck peut être visualisé de la sorte : les fluctuations quantiques du champ gravitationnel sont des fluctuations de l'espace-temps. Ces fluctuations augmentent lorsque l'échelle diminue. À l'échelle de Planck, leur énergie est suffisante pour en faire des trous noirs, de telle façon qu'il n'y a plus de véritable continuum spatio-temporel à cette échelle. On s'attend à une structure granulaire (quantique) de l'espace-temps même, à l'échelle de la longueur de Planck (10^{-33} cm), analogue à la granularité d'une onde électromagnétique induite par l'existence des photons et qui dépend de la fréquence de l'onde.

7. Une représentation de la microstructure de l'espace-temps quantique

Cette microstructure est caractérisée par sa ressemblance, à l'échelle de Planck, avec celle de polymères. Elle prend la forme d'un maillage « d'éléments discontinus », maillage qui émerge naturellement de la théorie quantique et qui constitue une réalisation, mathématiquement bien définie de l'intuition de Wheeler d'une « mousse » d'espace-temps.

La théorie quantique des boucles est définie par un espace d'états, et par une équation qui donne les probabilités de transitions entre ces états. C'est une formulation similaire à celle de l'électrodynamique quantique (QED) dans laquelle les états décrivent des ensembles de photons et d'électrons, c'est-à-dire les « quanta » individuels des champs électromagnétique et fermionique. Les états de la théorie des boucles décrivent des ensembles de « quanta d'espace », ou quanta du champ gravitationnel. Ces états sont désignés par l'expression « réseaux de spin » (*spin networks*). Chaque état est donc caractérisé par un réseau, lequel indique quel « quantum d'espace » est en contact avec quel autre. Le mot « boucle » désigne en fait le réseau le plus simple.

La découverte que les réseaux de spin quantiques admettent une interprétation géométrique, c'est-à-dire que chaque réseau de spin détermine un espace géométrique, est le contenu d'un théorème important dû à Roger Penrose, le « spin-geometry theorem ». Un résultat de la théorie est que la taille de ces quanta ne peut prendre que certaines valeurs discrètes, qui peuvent être calculées, comme celles de la quantification de l'énergie des photons où intervient la constante de Planck h , la fréquence de l'onde électromagnétique et n , un nombre quantique entier. De façon analogue, l'aire A d'une petite surface en gravité quantique est proportionnelle à une constante fondamentale sans dimension dans

la théorie des boucles, appelée paramètre d'Immirzi, et à j nombre entier ou semi-entier positif (ou spin, d'où le nom « réseaux de spin »). Il y a donc une taille minimale des grains d'espace, de l'ordre du carré de la longueur de Planck qui détermine la structure granulaire fine de l'espace. On retrouve donc dans le domaine quantique la particularité du champ gravitationnel d'admettre une interprétation géométrique. Et certains réseaux de spin avec des nombres quantiques élevés décrivent des champs gravitationnels macroscopiques, et donc des géométries macroscopiques de l'espace physique.

Cette « quantification » de la géométrie est responsable des phénomènes les plus caractéristiques de la théorie des boucles : la structure granulaire de l'espace à l'échelle de Planck, l'absence de longueurs d'onde arbitrairement petites. La conséquence la plus importante est la finitude de la théorie, c'est-à-dire la disparition du problème des infinis. Les amplitudes de transition entre les états de la théorie sont ensuite données par une « somme de Feynman » sur des « histoires de réseaux de spin » dites « mousses de spin » (*spinfoams*). Une mousse de spin visualise – comme un graphe de Feynman – les lignes d'univers dans l'espace-temps des nœuds et des liens d'un réseau. Une mousse de spin peut être imagée comme une mousse de bulles de savon.

Comme pour les graphes de Feynman, la théorie associe un nombre complexe (une amplitude) à chaque réseau de spin. Ces amplitudes déterminent les probabilités quantiques pour tout processus physique. À partir de ces amplitudes on a pu dériver, par exemple, des aspects de la limite classique de la théorie comme l'équation de Friedmann, qui est l'équation principale de la cosmologie. La physique usuelle émerge donc dans une approximation appropriée, à partir d'objets abstraits comme les « réseaux de spin » et les « mousses de spin ». En gravité, le réseau représente la granularité physique de l'espace à l'échelle de Planck. La taille physique réelle des cellules du réseau est déterminée par la valeur du champ gravitationnel qui vit sur le réseau même. Le résultat le plus important de la théorie est un théorème qui assure que les amplitudes de transition sont finies, à tous les ordres. Cette finitude est importante puisque la difficulté principale pour construire une théorie quantique de la gravité a toujours été liée aux divergences des amplitudes de transition. Finalement, la théorie des boucles est formulée en quatre dimensions physiques, donc cohérente avec le monde que nous observons. Deux des applications les plus importantes de la théorie qui ont été bien étudiées concernent la cosmologie primordiale et la physique des trous noirs.

8. La gravité quantique à boucle en cosmologie et en astrophysique

La QGB propose – comme la théorie des cordes – un modèle de cosmologie quantique : celui dit du rebond.

En premier lieu elle introduit des corrections quantiques aux équations de Friedmann, équations qui décrivent l'évolution à très grande échelle de l'Univers et qui découlent de la Relativité générale. Dans la version classique de la première de ces équations, lorsqu'on

est proche du Big Bang et que l'on peut négliger les termes de constante cosmologique ainsi que la courbure spatiale, le carré du taux relatif d'expansion de l'Univers (le carré de la constante de Hubble H) est directement proportionnel à la densité d'énergie moyenne ρ de l'Univers. Le taux d'expansion ne peut jamais s'annuler car toutes les grandeurs au second membre de l'équation sont strictement positives : en remontant vers le passé, la contraction ne s'arrête donc jamais et l'Univers devient de plus en plus petit, la densité de plus en plus grande et l'on aboutit nécessairement à la singularité. En gravitation quantique à boucles apparaît au second membre un terme correctif dans lequel intervient la densité de Planck. Ce terme correctif s'écrit $1 - \rho / (\rho)_{\text{pl}}$. Quand la matière de l'Univers a une densité négligeable par rapport à la densité de Planck $(\rho)_{\text{pl}}$, c'est-à-dire pour presque toute la chronologie de l'Univers, le terme correctif est proche de l'unité. Mais près du Big Bang la densité de la matière devient très proche de la densité de Planck ; le terme correctif s'annule et il en est donc de même pour le taux d'expansion. Lorsqu'on remonte vers le passé, l'Univers ne se contracte plus et la densité de la matière ne peut plus croître au-delà de la densité de Planck. Tout se passe comme s'il y avait une force répulsive qui empêche l'Univers de devenir trop petit. Inversement, à cause de cette force répulsive à très petite distance, un univers en contraction sous le poids de l'attraction gravitationnelle va rebondir violemment, et passer à une phase d'expansion. La théorie indique ainsi que la singularité initiale de notre Univers visible, le Big Bang, pourrait être le résultat d'un gigantesque rebondissement cosmique ou « Big Bounce » (le grand rebond), consécutif à la contraction cosmique antérieure d'un univers similaire au nôtre. Ce ne sont évidemment que des spéculations qui, pour le moment, ne sont soutenues par aucune observation directe.

Une autre application caractéristique de la gravitation quantique à boucles est de permettre de calculer – comme pour la théorie des cordes – les caractéristiques thermodynamiques de trous noirs, et en particulier leur entropie (entropie dite de Bekenstein-Hawking). Selon Carlo Rovelli la présence du paramètre de Immirzi, dont il a été déjà fait mention, permet d'ajuster l'entropie à la valeur souhaitée.

Comme annoncé plus haut, la théorie rend par ailleurs possible une seconde possibilité de résorption des trous noirs ; celle-ci s'appuie également sur un mécanisme de rebond. Carlo Rovelli et son équipe ont montré qu'en appliquant la théorie de la gravitation quantique à boucles, il ne pouvait jamais exister une densité infinie contrairement à ce que prévoit la Relativité générale au centre des trous noirs. Les trous noirs ne seraient dans ce cadre que des étoiles subissant un effondrement violent mais finissant par buter sur une densité maximale, égale à la masse volumique de Planck (10^{96} kg/m³). Il s'ensuivrait alors un formidable rebond mais ce phénomène se déroulant derrière l'horizon du trou noir dans une courbure de l'espace-temps extrême (mais non infinie), le temps propre du processus d'effondrement-rebond, serait très faible mais un observateur extérieur verrait ce phénomène se dérouler sur plusieurs millions ou milliards d'années du fait de l'extrême dilatation temporelle relativiste due au champ gravitationnel. Ils prédisent de cette façon une masse très faible d'un trou noir afin que sa durée de vie soit égale à l'âge de l'Univers actuel et pouvant ainsi être éventuellement détecté ! Un des membres du groupe de gravité quantique dirigé par Carlo Rovelli du Centre de physique théorique de l'université d'Aix-Marseille : Simone Speziale reprend et développe ces aspects brièvement évoqués de la physique des trous noirs et notamment le problème de la singularité en phase finale d'évaporation ainsi que le Paradoxe de l'information (chapitre 13).

Finalement, pour paraphraser Carlo Rovelli, les cordes et la gravitation à boucles, ne sont pas forcément incompatibles. Elles peuvent être d'une certaine manière complémentaires, ne serait-ce qu'au niveau méthodologique. En particulier les problèmes en suspens dans la théorie des cordes sont au niveau d'une formulation indépendante d'un fond servant de cadre, et la gravitation quantique à boucles est précisément un ensemble de techniques qui permettent de définir une théorie de façon non perturbative indépendante d'un espace-temps de fond. Peut-être que les deux théories peuvent éventuellement converger d'une certaine façon car elles ont des similitudes manifestes. Le fait évident que les deux théories partent du principe que les excitations pertinentes à l'échelle de Planck, sont des objets étendus unidimensionnels, qu'on les appelle cordes ou boucles.

Pour aller plus loin, citons à nouveau Carlo Rovelli « La relation entre la thermodynamique, la Relativité générale et la Mécanique quantique reste encore un territoire largement inexploré et probablement de grande importance pour mieux comprendre l'Univers ».

Le comité de lecture de l'AEIS⁴

(4) Victor Mastrangelo, Jean-Pierre Treuil, Gilles Cohen-Tannoudji et Jean Schmets

11

Renormalisation et groupe de renormalisation

Les infinis en physique microscopique contemporaine

Jean Zinn-Justin

IRFU/CEA Centre de Paris-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Résumé

Les calculs de théorie quantique des champs (une version relativiste de la mécanique quantique) butèrent pendant longtemps sur un obstacle inattendu : les résultats étaient en général infinis. Comme conséquence d'un apport expérimental essentiel, et d'importants progrès théoriques, une procédure empirique, appelée renormalisation, fut enfin découverte qui conduisit à des résultats finis, et qui permit des calculs de précision croissante pour les processus physiques relevant de l'électrodynamique quantique (QED). Le concept de théorie quantique des champs renormalisable se révéla si fructueux qu'il put plus tard être appliqué à toutes les interactions fondamentales, sauf la gravitation : le modèle standard des Interactions Faibles, Electromagnétiques et Fortes a maintenant survécu avec succès à plus de 40 ans de confrontation avec l'expérience. Cependant la procédure de renormalisation elle-même est restée longtemps une énigme pour nombre de théoriciens. Un ensemble convergent d'idées, venant à la fois de la physique microscopique et de la physique de l'état condensé, qui peuvent être regroupées sous le nom général de groupe de renormalisation, a finalement conduit à l'hypothèse que les théories des champs renormalisables n'ont de sens que considérées comme des approximations de basse énergie d'une théorie plus fondamentale mais à ce jour inconnue. Nous expliquons ici brièvement l'évolution des idées qui a conduit à cette image nouvelle et cohérente.

Abstract

Renormalization and renormalization group: infinities in contemporary microphysical physics

At the end of the 1920s, after the discovery of the Dirac equation, everything was in place for the construction of a quantum and relativistic theory, allowing a precise description of the electromagnetic interactions between protons and electrons. One of the expected answers to this Quantum Theory of Fields, called Quantum Electrodynamics or QED, was the solution of the puzzle of the infinite Coulomb contribution to the mass of the electron. In reality, the calculations showed that divergences, due to the point nature of the electron, persisted, although less severe. They even acquired a much more fundamental meaning, appearing to be an inevitable consequence of this point-like character and of the conservation of probabilities. It also appeared that it was very difficult to construct a coherent theory of non-point-like particles. As a consequence of an essential experimental contribution, and of important theoretical progress, an empirical procedure, called renormalization, was finally discovered, leading to finite results. Although all physical observables were given in terms of expressions containing infinities, it was possible to find relations between these observables in which the infinities compensated. This method permitted computations of increasing precision for the physical processes of quantum electrodynamics. The concept of quantum theory of renormalizable fields proved to be so fruitful that it could later be applied to all fundamental interactions except for gravitation. The Standard Model of Weak, Electromagnetic and Strong Interactions has now survived successfully about 25 years of experience confrontation. However, the renormalization procedure itself has long been an enigma for many theorists. A convergent set of ideas, coming from both microscopic physics and the physics of phase transitions in macroscopic systems (such as the liquid-vapor transition), which can be grouped under the general name of renormalization group, ultimately led to a new and coherent image. Because of the essential coupling of physics to very different scales, the theories of renormalizable fields have a coherence limited to the physics of low energies. We speak about effective theories, approximations of a more fundamental, but to this day unknown, theory. This is the evolution of ideas we want to briefly describe here.

Note

Ce texte est une version très légèrement éditée de la conférence du même nom donnée en 1999 dans le cadre des cinquièmes rencontres « Physique et interrogations fondamentales » et publiée dans *L'élémentaire & le complexe*, édité par le regretté Michel Crozon & Yves Sacquin¹, EDP-Sciences (2001).

(1) L'AEIS remercie Yves Sacquin pour son aimable autorisation à reproduire cet article.

I. L'électrodynamique quantique : une théorie quantique des champs

La théorie de la relativité était bien établie quand la mécanique quantique fut découverte. Mais pour des raisons accidentelles (spectre de l'atome d'hydrogène pire pour une équation relativiste sans spin, l'équation de Klein-Gordon, que pour l'équation de Schrödinger non relativiste), le développement de la mécanique quantique relativiste fut retardé de quelques années (ce qui fut probablement heureux parce que la théorie quantique des champs est beaucoup compliquée que la mécanique quantique non relativiste).

Toutefois en 1928 Dirac publia sa fameuse équation et ceci ouvrit la voie à une théorie quantique relativiste. Dès 1929 Heisenberg et Pauli dans une série d'articles établirent les principes généraux de la *théorie quantique des champs*.

La théorie quantique des champs. Pour comprendre que la théorie quantique des champs, extension relativiste de la mécanique quantique non relativiste, puisse avoir certaines propriétés un peu « exotiques », il faut prendre conscience que ce n'est pas une théorie de particules individualisées, mais, comme le nom l'indique, une théorie des champs. C'est en effet aussi une extension quantique d'une théorie des champs relativiste : l'électromagnétisme classique de Maxwell dans laquelle les variables dynamiques sont des champs, les champs électrique et magnétique $E(x)$, $B(x)$. Or une telle théorie se distingue radicalement d'une théorie de particules en ce sens que les champs ont un nombre *infini* de degrés de liberté. En effet un point matériel de la mécanique classique a trois degrés de liberté ; il est défini par ses trois coordonnées cartésiennes. Par contraste un champ est défini par sa valeur en chaque point d'espace, ce qui représente un nombre infini de données. La non-conservation du nombre de particules dans les collisions à haute énergie est une manifestation de cette propriété.

Symétries de jauge. Dans ce qui suit, il sera beaucoup question de symétrie de jauge et de théories de jauge comme l'électrodynamique quantique (QED). À la différence d'une symétrie ordinaire qui correspond à faire une transformation globale sur toutes les variables dynamiques, une symétrie de jauge correspondant à des transformations indépendantes en tout point d'espace. Par exemple, en mécanique quantique non relativiste, la physique ne change pas si l'on multiplie la fonction par une phase $e^{i\theta}$ (correspondant à une transformation du groupe abélien $U(1)$). Dans le cas d'une particule chargée, en présence d'un champ magnétique apparaît une symétrie de jauge : on peut changer la phase de la fonction d'onde en chaque point indépendamment $\psi(x) \rightarrow \exp(i\theta(x))\psi(x)$. La symétrie de jauge est un principe dynamique qui engendre des interactions, au lieu simplement de les relier entre elles comme une symétrie ordinaire ou globale. Elle force à introduire un potentiel vecteur couplé de façon universelle à toutes les particules chargées. A ce potentiel vecteur est associé en théorie relativiste une particule de spin un (vectorielle) appelée boson de jauge, le photon dans le cas de l'électrodynamique quantique.

Unités en théorie quantique relativiste. Cette remarque est destinée à rendre la suite plus compréhensible. Dans une théorie relativiste les échelles de masse M , impulsion (ou quantité de mouvement) p et énergie E sont reliés par la vitesse de la lumière c ,

$$E = pc = Mc^2.$$

Aussi parlerons-nous de façon équivalente de grande impulsion ou grande énergie, et exprimerons les trois quantités dans une unité commune l'électronvolt (eV). Par ailleurs dans une théorie quantique on peut relier l'échelle d'impulsion p à l'échelle de distance ℓ par \hbar , la constante de Planck,

$$p\ell = \hbar$$

Ainsi les expériences faites à haute énergie sondent-elles les propriétés de la matière à courte distance.

2. Les premiers calculs et le problème des infinis

Peu après les travaux de Heisenberg et Pauli, Oppenheimer et Waller (1930) publièrent indépendamment le calcul de la self-énergie de l'électron au premier ordre dans la constante de structure fine, la constante qui caractérise l'intensité de la force électromagnétique,

$$\alpha = e^2/4\pi\hbar c,$$

où e est la charge de l'électron. Une motivation pour un tel calcul était de déterminer les corrections à la masse de l'électron en électrodynamique quantique. En théorie relativiste la masse d'une particule est proportionnelle à son énergie au repos. Elle inclut des termes d'énergie potentielle. Or il était bien connu que le « modèle classique » de l'électron comme une sphère chargée de rayon R conduisait à un résultat qui tendait vers l'infini comme e^2/R quand on prenait la limite de rayon nul. Il était espéré que la mécanique quantique, qui est une théorie de fonctions d'onde, allait guérir ce problème engendré par la nature ponctuelle de l'électron.

Toutefois ces premiers résultats se révélèrent tout à fait décevants. Non seulement la première correction quantique à la masse de l'électron était infinie, mais elle divergeait même plus fortement que dans le modèle classique : introduisant une borne Λc^2 sur les énergies possibles des particules, (ceci est équivalent à modifier la théorie à une courte distance d'ordre $R = \hbar/c\Lambda$) on trouvait une divergence quadratique $\Lambda^3 \propto 1/R^2$.

En fait, il fut bientôt découvert que ces résultats étaient erronés. En effet les calculs perturbatifs avec les outils de l'époque étaient laborieux. On utilisait une version de la théorie des perturbations non explicitement relativiste ; le rôle des trous de la théorie de Dirac (prédits être des antiélectrons ou positons en 1931 et expérimentalement découverts en 1932) était peu clair, et l'invariance de jauge créait un problème supplémentaire. Il fallut attendre 1934 pour que soit publié le résultat correct dans des articles de Weisskopf (non sans qu'une dernière erreur de calcul ait été remarquée par Furry). Le résultat était à la fois

plus encourageant et profondément inquiétant. La contribution à la masse était toujours infinie mais la divergence quadratique était remplacée par une divergence logarithmique beaucoup moins sévère :

$$\delta m_{\text{QED}} = -\{3\alpha/2\pi\}m \ln(m R c/\hbar),$$

où m est la masse de l'électron.

Ainsi la théorie quantique des champs (TQC) était moins singulière que le modèle classique. Néanmoins le problème des infinis n'était pas résolu et aucune modification simple ne pouvait être trouvée pour sauver la théorie des champs.

En effet ces divergences étaient dans une large mesure une conséquence directe de la localité (les particules sont ponctuelles, avec interactions de contact) et de l'unitarité (conservation des probabilités). Le problème était donc très profond et touchait à l'essence même de la théorie. La QED était une théorie incomplète, mais il semblait difficile de la modifier sans sacrifier quelque principe physique fondamental. Il était possible de rendre la théorie finie en abandonnant l'unitarité et donc la conservation des probabilités (comme ce fut proposé par Dirac (1942)), mais les conséquences physiques étaient difficilement acceptables. Ce que nous appelons maintenant régularisation de Pauli-Villars, une procédure *ad hoc* et temporaire pour rendre la théorie finie avant renormalisation (voir plus loin), est de cette nature. Il paraissait encore plus difficile de l'incorporer dans une extension relativiste non locale (quand on sait que depuis cette époque le premier candidat viable trouvé est la théorie de super-cordes, on comprend pourquoi), quoiqu'en 1938 Heisenberg ait proposé l'introduction d'une longueur fondamentale.

La crise était si sérieuse que Wheeler (1937) et Heisenberg (1943) proposèrent d'abandonner la théorie quantique des champs complètement au profit d'une théorie d'observables physiques, en fait les éléments de matrice de diffusion : la théorie de la matrice S , une idée qui eut son heure de gloire dans les années 1960 en théorie des Interactions Fortes (celles qui engendrent les forces nucléaires).

Les infinis et le problème des bosons scalaires chargés. Dans le même temps des physiciens plus pragmatiques calculaient d'autres quantités physiques, explorant la forme et la nature de ces infinis. Je veux juste mentionner ici un autre article important de Weisskopf (1939) dans lequel l'auteur montre que les divergences logarithmiques persistent à tous les ordres de la théorie des perturbations. Mais il remarque aussi que dans le cas de particules scalaires chargées la situation est bien pire : les divergences sont quadratiques ce qui est désastreux. En effet comme la constante de structure fine α est petite, si le *cut-off* procuré par quelque nouvelle physique n'est pas trop grand (et pour quelque temps 100 MeV qui est la portée des forces nucléaires semblait un candidat raisonnable), alors une divergence logarithmique produit des corrections incalculables, mais néanmoins petites. Ceci n'est plus du tout le cas pour des divergences quadratiques. Ceci pouvait être pris comme une indication que *des particules scalaires chargées ne pouvaient être considérées comme fondamentales.*

Notons que ce problème est plus que jamais d'actualité puisque le modèle standard contient une particule scalaire, le boson de Higgs (découvert expérimentalement en 2012

au CERN avec une masse d'environ cent fois la masse du proton), et est maintenant appelé le problème de *l'ajustage fin* (voir ci-dessous). Il est même devenu particulièrement sévère parce que nous avons pris conscience que des échelles de masse aussi grande que 10^{15} (masse d'unification) ou 10^{19} GeV (masse de Planck) peuvent être impliquées. Il est une des motivations principales pour l'introduction de la supersymétrie (une symétrie qui, de façon très surprenante, relie des bosons à des fermions) mais qui n'a pas encore trouvé (2017) de confirmation expérimentale. Remarquons finalement que si ce problème n'avait pas été quelque peu oublié, la solution du problème des Interactions Faibles par le mécanisme de Higgs aurait pu s'en trouver retardée.

3. Méthode de renormalisation

Calculant différentes quantités physiques, quelques physiciens ne manquèrent pas de remarquer que bien que beaucoup de quantités fussent divergentes, c'étaient toujours les mêmes termes divergents qui intervenaient. On pouvait donc trouver des combinaisons qui étaient finies (Weisskopf 1936). Toutefois, la signification physique d'une telle propriété était obscure. En réalité, en l'absence de toute compréhension profonde du problème, peu de progrès était possible.

Comme toujours, quand les physiciens sont confrontés à de profondes difficultés conceptuelles, le salut ne peut venir que de l'expérience.

Ainsi en 1947 Lamb et Rethford mesurèrent avec précision la séparation entre les niveaux $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ de l'hydrogène, tandis que le groupe de Rabi à Columbia mesurait le moment magnétique anormal de l'électron. De façon assez remarquable il fut possible d'organiser le calcul du déplacement de Lamb de telle sorte que les infinis se compensent (premier calcul approché par Bethe) et le résultat se trouva être en très bon accord avec l'expérience. Peu de temps après Schwinger obtint le terme dominant du moment magnétique anormal de l'électron.

Ces résultats entraînèrent d'extraordinaires développements théoriques (un travail antérieur de Kramers sur la renormalisation de masse de l'électron classique étendu se révéla important pour généraliser l'idée de compensation des infinis par soustraction, à l'idée de renormalisation), et en 1949 Dyson, s'appuyant sur les travaux de Feynman, Schwinger et Tomonaga, donna la première preuve de la compensation des infinis à tous les ordres de la théorie des perturbations. Ce qui fut alors baptisée théorie de la *renormalisation* conduisait en QED à des résultats finis pour toutes les observables physiques.

L'idée est la suivante : on commence avec une théorie appelée *nue* qui dépend de paramètres comme la *masse nue* m_0 et la *charge nue* e_0 de l'électron (les masses et charges en l'absence d'interactions) et une échelle de coupure des grandes impulsions Λ_c , appelée *cut-off*. On calcule alors les valeurs physiques, appelées *renormalisées*, des mêmes quantités (comme la charge observée e et la masse physique m) en fonction des paramètres nus et du *cut-off*. On inverse ces relations, exprimant maintenant les quantités nues en fonction des quantités renormalisées. Dans cette substitution on échange par exemple la charge

nue e_0 avec la charge e physique ou renormalisée comme paramètre de développement, ou de façon équivalente la constante de structure fine nue $\alpha_0 = e_0^2 / 4\pi\hbar$ avec la constante de structure renormalisée α ,

$$\alpha_0^2 = \alpha + \beta_2 \alpha \ln(\Lambda/m) + \dots,$$

$$m_0 = m + \gamma_2 m \alpha \ln(\Lambda/m) + \dots$$

On exprime ensuite toute autre observable, initialement calculée en termes des paramètres nus, en termes de ces quantités physiques ou renormalisées. De façon très surprenante, quand on prend la limite du *cut-off* Λ infini, toutes les observables physiques ont alors une limite finie.

Il faut reconnaître qu'il semble assez miraculeux qu'une telle procédure puisse réussir. Elle a pourtant permis et permet toujours en QED des calculs de précision croissante, donc l'accord avec l'expérience démontre de façon absolument convaincante que la TQC est le formalisme adéquat pour décrire l'électrodynamique au niveau quantique. De plus la théorie de la renormalisation conduisit au très important concept de *théories renormalisables*. Seul un nombre limité de théories des champs conduisent à des résultats finis par la procédure expliquée ci-dessus. Ceci contraint donc fortement la structure des théories possibles.

Notons enfin que pendant plus de quinze ans les physiciens avaient été bloqués par le problème des divergences en TQC, et une fois que l'expérience commença à procurer des informations décisives, en deux ans un cadre complet et cohérent pour des calculs perturbatifs (développement en puissances de α) fut développé.

Quoiqu'il fut maintenant évident que la QED était la théorie correcte, la procédure permettant d'obtenir des réponses finies restait une énigme pour nombre de théoriciens : La signification de la recette de renormalisation, et donc des paramètres nus restait obscure. Beaucoup d'efforts furent alors consacrés à essayer de surmonter cette faiblesse conceptuelle fondamentale. Plusieurs types de solutions furent proposés :

(i) Le problème était lié à la théorie des perturbations et une resommation correcte du développement perturbatif ferait disparaître le problème (cf. par exemple la discussion de Thirring (1951) avec réponse de Källén (1953)).

(ii) Le problème était de nature conceptuelle : la procédure qui engendrait le développement renormalisé devait être modifiée pour éviter l'introduction de divergences non physiques et pour engendrer automatiquement des quantités finies. Les paramètres nus n'avaient simplement pas de signification physique.

(iii) Finalement le *cut-off* avait un sens physique et était engendré par des interactions supplémentaires, non descriptibles par la TQC. Un candidat favori, jusqu'à la fin des années soixante, fut l'Interaction Forte (le *cut-off* étant procuré par la portée des forces nucléaires).

Quelque peu relié à la démarche (i) fut le développement de ce qui fut appelé la TQC *Axiomatique* qui essayait d'extraire des résultats rigoureux et non-perturbatifs des principes

généraux sur lesquels la TQC était basée. La ligne de pensée (ii) conduisit au formalisme BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmerman), et finalement au travail d'Epstein-Glaser (un formalisme techniquement utile), où le problème des divergences dans l'espace des positions (plutôt que l'espace des impulsions) était réduit au problème mathématique d'une définition correcte de produits de distributions singulières. Les efforts correspondants furent très efficaces à déguiser le problème des divergences de telle manière qu'il semblait n'avoir jamais existé. Finalement le point de vue (iii) est le plus proche du point de vue moderne, quoique bien sûr le *cut-off* nécessaire ne soit plus procuré par les Interactions Fortes.

4. TQC et Groupe de Renormalisation

Au milieu des années cinquante il fut noté par plusieurs groupes, plus notablement Peterman-Stückelberg (1953), Gell-Mann-Low (1954) et Bogoliubov-Shirkov (1955-1956), que dans la limite d'une QED avec masse nulle de l'électron, le développement perturbatif avait une curieuse propriété formelle, conséquence directe du processus de renormalisation lui-même. Dans une théorie des champs de masse nulle il n'y a pas d'échelle. Il est alors nécessaire d'introduire une échelle de masse μ arbitraire pour définir la charge e renormalisée : elle est liée à l'intensité de la force électromagnétique mesurée dans des collisions d'une impulsion d'ordre $c\mu$. On peut appeler la charge renormalisée la charge *effective* à l'échelle μ . Toutefois, comme cette masse μ est arbitraire, on peut trouver d'autres couples (e', μ') qui donne les mêmes résultats physiques. L'ensemble des transformations des paramètres physiques, associées à ces changements d'échelle de masse, et nécessaires pour maintenir les résultats physiques inchangés, fut appelé *groupe de renormalisation* (GR).

Faisant un changement d'échelle infinitésimal on peut décrire le flot de la charge effective par une équation différentielle qui exprimée en terme de la constante de structure fine prend la forme,

$$\mu (d \alpha(\mu) / d \mu) = \beta[\alpha(\mu)], \quad \beta(\alpha) = \beta_2 \alpha^2 + O(\alpha^3), \quad \beta_2 > 0, \quad (1)$$

où la fonction $\beta(\alpha)$ peut être calculée perturbativement en série de α .

Comme la préoccupation principale était le problème des divergences à grande impulsion en TQC, Gell-Mann et Low essayèrent d'utiliser le GR pour étudier le comportement à grande impulsion du propagateur de l'électron, au delà de la théorie des perturbations, en relation avec le comportement de la charge nue à grand *cut-off*. Malheureusement la QED est une théorie libre à grande distance ($\beta_2 > 0$), ce qui signifie que la charge effective décroît à faible impulsion, et réciproquement croît à grande impulsion (la valeur mesurée à la masse du boson intermédiaire des Interactions Faibles Z, est en effet plus faible que la valeur mesurée à basse énergie) jusqu'à ce que le développement perturbatif de la fonction β ne soit plus valable.

Il est frappant de constater que si l'argument avait été utilisé en sens inverse, on aurait conclu qu'à charge nue fixée, la charge effective tend vers zéro comme $1/\ln(\Lambda/\mu)$, ce qui est acceptable pour toute valeur raisonnable du *cut-off* Λ si μ est de l'ordre de grandeur de la masse de l'électron. Mais l'espoir à l'époque bien sûr était de se débarrasser du *cut-off*. La même stratégie appliquée plus tard à la Chromodynamique Quantique (QCD), la théorie de l'Interaction Forte, fut couronnée de succès, expliquant la faiblesse des interactions entre quarks à courte distance par la décroissance de la charge forte effective.

Notons encore quelques spéculations reliées : Landau et Pomeranchuk (1955) remarquèrent que si, dans le calcul de la self-énergie de l'électron on somme les termes dominants à grande impulsion p à chaque ordre, on trouve un facteur de la forme

$$[1/(1 + \beta_2 \alpha \ln(m/p))], \quad \beta_2 > 0, \quad p \gg m,$$

Cette expression a un pôle à une masse

$$p = m \exp(1/\beta_2 \alpha).$$

Ceci pourrait faire penser à un état lié, mais malheureusement cet état a une norme négative, et fut donc appelé le « fantôme » de Landau. Pour Landau c'était le signe de quelque incohérence de la QED, quoique sans conséquence physique immédiate, parce que α est si faible (environ $1/137$) que cet état non physique a une masse de l'ordre de 10^{30} GeV. Bogoliubov et Shirkov montrèrent alors correctement que ce résultat correspondait à résoudre l'équation de GR (1) à l'ordre dominant, dans la limite de faible charge effective. Comme la charge effective devenait grande à grande impulsion, la théorie des perturbations n'était pas valable dans ce régime de grande masse. Il est amusant de noter que dans le point de vue moderne nous croyons que l'intuition de Landau était fondamentalement correcte, même si son argument était quelque peu naïf dans sa formulation.

5. Le triomphe de la TQC renormalisable : le modèle standard

La théorie quantique des champs dans les années 1960. Les années 1960 furent des années difficiles pour la TQC. La situation peut être décrite de la manière suivante : après le triomphe de la QED il restait trois problèmes essentiels à résoudre liés aux trois autres interactions connues :

(i) Les Interactions Faibles étaient décrites par la théorie non renormalisable de Fermi (Feynman-Gell-Mann). Puisque le couplage était faible, et l'interaction de type courant-courant un peu comme en électrodynamique, il était concevable que cette théorie fût en quelque sorte l'approximation dominante à une théorie genre QED, mais avec au moins deux photons chargés et très lourds (masse de l'ordre de 100 GeV), parce que l'interaction apparaissait essentiellement ponctuelle. Des théories de jauge non-abéliennes, c'est à dire des théories où les interactions sont engendrées par un principe de symétrie généralisé appelé symétrie de

jauge, avaient bien été construites qui généralisaient la QED au cas de « photons » chargés (Yang-Mills 1954). Mais d'une part leur quantification posait des problèmes nouveaux et difficiles. D'autre part une autre difficulté venait de ce que les théories de jauge ont une forte tendance à produire des particules de masse nulle, comme le photon. Ainsi quelques théoriciens essayaient à la fois de quantifier ces théories des champs et de trouver les moyens d'engendrer des termes de masse, dans le cadre de théories renormalisables.

(ii) Beaucoup pensaient, par contre que le cas de la TQC était désespéré dans la physique des Interactions Fortes : parce que les interactions étaient trop fortes, un calcul perturbatif n'avait pas de sens. La théorie des observables physiques, appelée théorie de la matrice S , paraissait le cadre adéquat pour décrire cette physique, et la localité stricte devait sans doute être abandonnée. On peut d'ailleurs noter une première incarnation de la théorie des Cordes dans ce contexte.

(iii) Enfin, puisque la force gravitationnelle était extrêmement faible à courte distance, il n'avait pas d'urgence immédiate à s'occuper de la gravitation quantique, et la solution de ce problème d'impact expérimental incertain pouvait attendre.

Le triomphe de la TQC renormalisable. Vers la fin des années 1960 la situation évolua très rapidement. On trouva enfin une méthode pour quantifier les théories de jauge non-abéliennes (Faddeev-Popov, DeWitt 1967). On put démontrer que ces nouvelles théories étaient renormalisables ('t Hooft, 't Hooft-Veltman, Slavnov, Taylor, Lee-Zinn-Justin, Becchi-Rouet-Stora, 1971-1975), même dans une version de symétrie brisée qui permettaient de donner des masses aux particules de jauge correspondantes (le mécanisme de Higgs, Brout-Englert, Guralnik-Hagen-Kibble 1964).

Ces développements permirent de construire une version quantique d'un modèle pour les Interactions Faibles basé sur une symétrie de jauge, qui avait été proposé auparavant (Weinberg 1967, Salam 1968) et qui unifiait dans une certaine mesure l'électromagnétisme et l'interaction faible. Ses prédictions devaient être rapidement confirmées par l'expérience.

Dans la situation très confuse des Interactions Fortes, la solution vint comme souvent dans de tels cas de l'expérience : les expériences de Diffusion Profondément Inélastique faites au SLAC (Stanford), qui sondaient l'intérieur des protons et neutrons, révélèrent que ces *hadrons* étaient composés de particules ponctuelles quasi libres, appelées initialement *partons* et finalement identifiées avec les *quarks*, ces entités mathématiques qui avaient été introduites pour décrire de façon simple le spectre des hadrons et ses symétries, et les *gluons*, des particules vectorielles comme le photon responsables de l'interaction entre les quarks.

Pour comprendre ce phénomène particulier on fit appel aux idées de GR dans une version modernisée (Callan, Symanzik 1970) valable aussi pour les théories massives, mais le phénomène resta quelque temps mystérieux jusqu'à ce qu'une théorie des champs puisse être trouvée qui ait la propriété de liberté asymptotique, c'est à dire que les interactions deviennent faibles à très courte distance de façon à expliquer les résultats du SLAC. Finalement les mêmes progrès théoriques dans la quantification des théories de jauge non abéliennes qui avaient permis de modéliser les Interactions Faibles, permirent de comprendre

que les théories de jauge non-abéliennes, avec un nombre de fermions pas trop élevé, étaient asymptotiquement libres (Gross-Wilczek, Politzer 1973).

Donc autour de 1973-1974 un modèle complet de TQC pour toutes les interactions fondamentales sauf la gravitation fut proposé, maintenant appelé le modèle standard, qui a survécu avec un succès croissant à plus de quarante ans de tests expérimentaux. Ce fut le triomphe de toutes les idées basées sur le concept de TQC renormalisable. Dans ces conditions, il devenait tentant de conclure qu'en quelque sorte une nouvelle loi de la nature avait été découverte : toutes les interactions peuvent être décrites par des TQC *renormalisables* et par la théorie des perturbations renormalisée. Le problème des divergences avait à cette époque été si bien camouflé, que pour beaucoup de physiciens ce n'était plus un réel souci.

Un problème potentiel restant était ce que Weinberg appelait la condition de protection asymptotique (*asymptotic safety*) : l'existence de points fixes de grande impulsion du GR, dans le formalisme de l'équation (I) des solutions de

$$\beta(e^2) = 0, \quad \text{avec} \quad \beta'(e^2) < 0,$$

semblait nécessaire pour la cohérence à toute échelle d'une TQC (une des options déjà considérées par Gell-Mann et Low). Les théories des champs asymptotiquement libres partagent bien sûr cette propriété, mais les champs scalaires (comme requis par le mécanisme de Higgs) ont tendance à détruire la liberté asymptotique. Enfin il restait à mettre la gravitation quantique dans ce cadre renormalisable, et ceci devint le but de beaucoup d'études théoriques dans les années qui suivirent.

6. Phénomènes critiques et théorie du champ moyen

La théorie de phénomènes critiques a comme objet la description des transitions de phase continues ou du second ordre dans les systèmes macroscopiques. Des exemples simples sont fournis par la transition liquide-vapeur, les transitions dans les mélanges binaires, l'Hélium superfluide, les systèmes magnétiques. Le modèle sur réseau le plus simple qui exhibe une telle transition est le fameux modèle d'Ising.

Ces transitions sont caractérisées par des comportements collectifs à grande échelle à la température de transition (la température critique T_c). Par exemple la longueur de corrélation, qui caractérise la décroissance de corrélations dans le système, devient infinie. Près de T_c ces systèmes font donc apparaître deux échelles de longueur très différentes, une échelle microscopique liée à la taille des atomes, la maille du cristal ou la portée des forces, et une autre engendrée dynamiquement, la longueur de corrélation. À cette nouvelle échelle est associée une physique de longue distance ou macroscopique non triviale.

On s'attend alors à ce que cette physique près de la température critique puisse faire l'objet d'une description macroscopique, ne faisant intervenir qu'un petit nombre de paramètres adaptés à cette échelle, sans référence explicite aux paramètres microscopiques initiaux. Cette idée conduit à la théorie du champ moyen (TCM) et dans sa forme la plus générale à la théorie de Landau des phénomènes critiques (1937).

Parmi les prédictions les plus simples et les plus robustes d'une telle théorie, on trouve l'*universalité* des comportements singuliers des quantités thermodynamiques quand on s'approche de T_c : par exemple la longueur de corrélation ξ diverge toujours comme $(T-T_c)^{-1/2}$, l'aimantation spontanée s'annule comme $(T_c-T)^{1/2}$, ces propriétés étant indépendantes de la dimension de l'espace, de la symétrie du système, et bien sûr des détails de la dynamique microscopique.

Aussi les physiciens furent-ils très surpris quand quelques expériences aussi bien que des calculs de modèles de mécanique statistique sur réseau commencèrent à mettre en cause les prédictions de la TCM. Un coup supplémentaire à la TCM fut porté par la solution exacte du modèle d'Ising à deux dimensions par Onsager (1944) qui confirma les calculs numériques sur réseau correspondant. Dans les années suivantes les preuves empiriques s'accumulèrent, montrant que les phénomènes critiques en deux et trois dimensions d'espace ne pouvaient pas être décrits quantitativement par la TCM. En fait on trouva que le comportement critique variait avec la dimension d'espace ainsi qu'avec d'autres propriétés générales des modèles. Néanmoins il semblait aussi qu'une certaine *universalité* survivait, mais d'une forme plus limitée. Quelques propriétés spécifiques paraissaient importantes, mais pas tous les détails de la dynamique microscopique.

Pour comprendre combien le problème était profond, il faut prendre conscience que cette situation n'avait jamais été confrontée auparavant. En effet l'ingrédient principal de la théorie de Landau est l'hypothèse que, comme d'habitude en physique les différentes échelles se découplent. Illustrons cette idée par un exemple classique très simple à un niveau naïf on obtient la période du pendule, par analyse dimensionnelle,

$$\text{période} \propto \sqrt{(\text{longueur} / g)},$$

où g est l'accélération de la pesanteur. En réalité dans cet argument se cache une hypothèse physique essentielle : à savoir qu'on peut oublier la structure atomique interne du pendule, la taille de la terre ou la distance terre soleil. Ces échelles de distance n'interviennent pas parce que beaucoup trop petites ou trop grandes par rapport à l'échelle du pendule.

De même en mécanique Newtonienne, pour décrire le mouvement planétaire on peut oublier dans une très bonne approximation, à la fois les autres étoiles et la taille de soleil et des planètes, qui peuvent être remplacés par des objets ponctuels. De la même manière encore, en mécanique quantique non relativiste, on peut ignorer la structure interne du proton, et obtenir les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène avec une excellente précision.

L'échec de la théorie du champ moyen démontre au contraire que ceci n'est plus généralement vrai pour les phénomènes critiques, une situation inattendue et totalement nouvelle.

On aurait pu craindre dans ces conditions que la physique macroscopique soit sensible à toute la structure de courte distance, que les phénomènes à grande distance dépendent de la dynamique microscopique détaillée, et donc soient essentiellement imprédictibles. La survivance d'une universalité, même réduite, était encore plus surprenante. Pour comprendre toutes ces observations, un nouveau cadre conceptuel devait évidemment être inventé.

7. Le groupe de renormalisation de Kadanoff-Wilson

En 1966 Kadanoff proposa une méthode pour comprendre ce problème : calculer les observables physiques de façon récursive en sommant d'abord sur les degrés de liberté de courte distance. Comme lui, nous allons illustrer l'idée par le modèle d'Ising, mais avec un point de vue plus général.

Un exemple : le modèle d'Ising. Le modèle d'Ising est défini sur un réseau, initialement de maille a , et une interaction de courte portée (par exemple de proche voisin) entre des spins (classiques) S_i prenant les valeurs ± 1 . L'interaction est spécifiée par la donnée d'une énergie de configuration $H(a ; S)$. La fonction de partition Z (la quantité de base de la mécanique statistique, dont toutes les observables peuvent se déduire) est alors obtenue en sommant sur toutes les configurations de spin avec le poids de Boltzmann $\exp[-H(a ; S)/T]$

$$Z = \sum_{\{S\}} \exp[-H(a ; S) / T] .$$

L'idée alors est de sommer sur les spins S_i à moyenne sur un sous-réseau de maille $2a$ fixé. Par exemple sur un réseau carré on regroupe les spins sur des carrés disjoints et fixe la moyenne sur chaque carré. Après cette sommation la fonction de partition est donnée en sommant sur des configurations de spin sur un réseau de maille double, et qui prennent plus de deux valeurs. À ces spins correspondent une nouvelle énergie de configuration effective $H(2a ; S)$.

On peut itérer cette transformation, aussi longtemps que la maille du réseau reste petite comparée à la longueur de corrélation, c'est à dire l'échelle des phénomènes macroscopiques qu'on veut décrire,

$$H(2^n a ; S) = T [H(2^{n-1} a ; S)] .$$

On espère que l'application répétée de cette transformation produira finalement une interaction effective dont la forme serait indépendante dans une large mesure de l'interaction initiale, justifiant de cette manière l'universalité restante. Un tel espoir est basé sur l'existence possible de *points fixes* ou plutôt de *surfaces fixes* de la transformation T ,

$$H^*(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(2^n a ; S) , H^*(S) = T [H^*(S)] .$$

Ce fut Wilson (1971) qui transforma une idée à l'origine un peu vague, en un cadre précis et opérationnel, passant en particulier en variables de Fourier, unifiant finalement le groupe de renormalisation de Kadanoff et celui de la TQC. Ceci conduisit à une compréhension de l'universalité, comme conséquence de l'existence de points fixes de longue distance du groupe de renormalisation général. Il devint possible de développer des méthodes de calcul précises des quantités universelles, avec l'aide de techniques déjà partiellement préexistantes de la TQC (Brézin-Le Guillou-Zinn-Justin 1973).

Limite continue et théorie quantique des champs. Premièrement il est clair que dans le modèle d'Ising, après de nombreuses itérations, la variable de spin effective, qui est une moyenne locale de beaucoup de spins, prend un ensemble dense de valeurs réelles, et peut être remplacée par un champ continu $S(x)$.

Le point fixe gaussien. Le modèle gaussien (la théorie des champs du boson scalaire de masse nulle en $d > 2$ dimensions)

$$Z = \int [d S(x)] \exp[-H(S)],$$

$$H(S) = \int d^d x [\partial_\mu S(x)]^2,$$

est un point fixe du GR. En effet une intégration partielle sur des variables gaussiennes redonne toujours une distribution gaussienne (ce qui n'est pas sans rapport avec le théorème central limite de la théorie des probabilités). On vérifie alors qu'il engendre les fonctions de corrélation de la TCM à T_c . De plus, après l'ajout d'un terme de masse proportionnel à $\int d^d x S^2(x)$ et un terme linéaire à $\int d^d x S(x)$ le modèle gaussien perturbé reproduit tous les résultats de la TCM au-dessus de T_c (la phase désordonnée).

Au delà de la théorie du champ moyen. Plus généralement près de T_c les valeurs typiques du champ $S(x)$ sont petites ($\langle S(x) \rangle = M$). De plus, si nous ne sommes pas trop loin du point fixe gaussien, le champ ne varie que sur une échelle microscopique ce qui signifie

$$a |\partial_\mu S| \ll |S|,$$

On peut donc faire un développement *local* de l'interaction effective

$$H(S) = \int d^d x \{ [\partial_\mu S(x)]^2 + a^{-2} S^2(x) + a^{-4} S^4(x) + a^{2d-6} S^6(x) + a^2 [\partial^2 S(x)]^2 + \dots \},$$

où nous avons omis les coefficients devant les différents termes mais indiqué seulement les puissances de la maille du réseau dictés par des considérations dimensionnelles. Il est clair alors que dans la limite de longue distance, seul un petit nombre de termes survivent, ceux multipliés par a à une puissance non positive. Pour une dimension d'espace $d > 4$ seule la partie quadratique survit et donc la TCM est correcte, le point fixe gaussien est stable pour la physique de longue distance. Pour $d = 4$ or $d = 4 - \varepsilon$ (on imagine, suivant Wilson-Fisher (1972), que la dimension d'espace peut être considérée comme un paramètre continu) seule l'interaction S^4 doit être ajoutée.

Nous restons donc face à une TQC scalaire renormalisable ! Cette théorie est finie (comme elle l'était initialement) parce que toutes impulsions sont coupées à une échelle $1/a$, réflexion de la structure initiale de réseau. Bien sûr nous devons encore déterminer

le comportement à grande distance de la théorie des champs S^4 , mais ceci peut maintenant être étudié avec le groupe de renormalisation de la TQC. Le groupe de renormalisation de la TQC apparaît ainsi comme une forme limite du groupe de renormalisation général à la Wilson-Kadanoff.

Ce qui est frappant dans cette approche, en particulier pour les physiciens qui s'intéressent à la fois à la Matière Condensée et à la physique des particules, c'est l'apparition naturelle d'une TQC renormalisable, comme théorie effective pour décrire la physique de grande distance des phénomènes critiques. Il devient alors difficile de résister à la tentation d'appliquer les mêmes idées à la théorie quantique des champs qui décrit la physique des particules.

8. Théories quantiques des champs effectives

La condition que les interactions fondamentales devaient être décrites par des théories renormalisables a été un des principes de base dans la construction du modèle standard. Du succès de ce programme il pouvait être conclu que le principe de renormalisabilité était une nouvelle loi de la nature. Ceci impliquait évidemment que toutes les interactions incluant la gravitation devaient être descriptibles par de telles théories. L'incapacité d'exhiber une version renormalisable de la théorie de la gravitation quantique a donc jeté un doute sur le programme lui-même. En effet si par contre le modèle standard et ses extensions naturelles possibles n'étaient que des théories approchées, il devenait difficile de comprendre pourquoi elles devaient obéir à un principe aussi abstrait.

La théorie des phénomènes critiques procure une interprétation beaucoup plus simple et plus naturelle. On peut maintenant imaginer que les interactions fondamentales sont décrites à très courte distance (longueur de Planck ?) ou à très grande énergie par une théorie finie et sans doute non-locale. Pour des raisons qui restent à être comprises, la dynamique collective caractérisée par cette petite échelle engendre une physique de grande distance avec interactions entre particules de très faible masse. Dans les phénomènes critiques c'est l'expérimentateur qui ajuste la température à sa valeur critique. Dans la physique des interactions fondamentales ceci doit se produire naturellement.

Quelques mécanismes possibles sont connus, qui engendrent des particules de masse nulle, les symétries brisées spontanément avec bosons scalaires dit de Goldstone, les particules au cœur des interactions de jauge tel le photon, la symétrie chirale qui produit des fermions de masse nulle.

Alors, comme conséquence de l'existence d'un point fixe de longue distance, la physique de basse énergie, de longue distance, de faible masse, peut être décrite par une théorie des champs effective. Cette théorie des champs est munie naturellement d'un *cut-off*, réflexion de la structure microscopique initiale, et contient toutes les interactions locales permises par le contenu en champs et les symétries. Si la théorie des champs libres (c'est à dire la TCM) n'est pas une trop mauvaise approximation (le point fixe est suffisamment

proche du point fixe gaussien) les interactions peuvent être classées par la dimension des couplages correspondants.

Une des conséquences d'une telle analyse, est la suivante : les interactions de type non renormalisable, qui apparaissent dans la présentation traditionnelle de la TQC comme très dangereuses, sont automatiquement supprimées par des puissances du *cut-off* (ceci est sans doute le cas de la gravitation d'Einstein). Les interactions renormalisables qui sont sans dimension n'évoluent que très lentement (logarithmiquement) avec l'échelle et survivent à longue distance. Ce sont elles qui déterminent la physique à basse énergie. Enfin les interactions super-renormalisables (ceci inclut aussi les termes de *masse*), qu'on jugeait inoffensives car elles engendrent le moins de divergences, sont potentiellement les plus dangereuses. Elles doivent être interdites par les symétries, ou au moins protégées contre des grandes renormalisations, sinon on est confronté au fameux problème de l'ajustage fin : il faut ajuster leurs amplitudes avec une précision d'autant plus grande que l'énergie maximale jusqu'où la théorie est valable est grande. La théorie nue est alors une version de la théorie effective dans laquelle toutes les interactions non renormalisables ont déjà été négligées, excepté dans la partie cinétique pour assurer que la théorie reste finie. Elle n'a nul besoin être physiquement cohérente à très courte distance où elle ne constitue plus une approximation valable.

Bien sûr cette interprétation n'a aucune influence sur la manière dont les calculs perturbatifs sont effectués, et donc on pourrait se demander si cette discussion n'est pas de nature presque philosophique. Pas tout à fait ! Nous avons mentionné ci-dessus que prendre la théorie nue au sérieux conduit en particulier à confronter le problème de l'ajustage fin des paramètres fixant les masses des particules scalaires (ceci s'applique donc au boson de Higgs), et donc force à chercher des solutions (supersymétrie, état lié de fermions plus fondamentaux). Elle résout le problème de la *trivialité* : des interactions renormalisées décroissant logarithmiquement avec le *cut-off* sont acceptables parce que le *cut-off* est fini. Ceci peut par exemple expliquer la faible valeur de la constante de structure fine. Elle suggère la possibilité d'une découverte d'interactions non-renormalisables, bien qu'elles soient très faibles. Un mécanisme possible est le suivant. Des exemples peuvent être trouvés dans les phénomènes critiques dans lesquels la théorie réduite aux interactions renormalisables a plus de symétrie que la théorie complète (la symétrie cubique du réseau conduit à une symétrie de rotation à grande distance). Alors de très petites violations de symétries pourraient être le signe d'interactions non-renormalisables (et comme nous l'avons déjà mentionné la gravitation quantique est déjà peut-être un exemple).

Donc ce point de vue moderne, profondément basé sur le groupe de renormalisation et la notion d'amplitudes des interactions dépendant de l'échelle d'observation, non seulement procure une image plus cohérente de la théorie quantique des champs, mais également un cadre dans lequel de nouveaux phénomènes peuvent être discutés.

Il implique aussi que les théories quantiques des champs sont des objets temporaires, qui ne sont pas nécessairement cohérentes à toutes les échelles, et destinées à être finalement remplacées par une théorie plus fondamentale de nature tout à fait différente. Néanmoins les théories quantiques des champs offrent pour l'instant le cadre le plus fécond

pour discuter les situations de physiques où un nombre très grand de degrés de liberté interagissent fortement.

Une bibliographie succincte

Beaucoup de détails intéressants et des références sur l'histoire primitive de la QED et des divergences peuvent être trouvés dans :

S. Weinberg, *The Theory of Quantum Fields*, vol. I, chap. I, Cambridge 1995 (Cambridge Univ. Press).

Un certain nombre d'articles originaux est contenu dans :

J. Schwinger éd., *Selected Papers in Electrodynamics*, (Dover, New-York 1958).

Voir aussi :

N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience (New-York 1959).

Une revue de la situation après la découverte du modèle standard peut être trouvée dans : *Methods in Field Theory*, Les Houches 1975, R. Balian et J. Zinn-Justin eds., (North-Holland, Amsterdam 1976).

C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New-York 1980).

Pour une présentation des idées de GR appliquées aux phénomènes critiques voir :

L.P. Kadanoff, *Physics* 2 (1966) 263.

K.G. Wilson and J. Kogut, *Physics Reports* 12C (1974) 75.

Et les contributions à :

Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 6, C. Domb et M.S. Green eds. (Academic Press, London 1976).

En particulier la contribution :

Field Theory Approach to Critical Phenomena, E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, décrit l'application des méthodes de la théorie quantique des champs au calcul de quantités universelles.

Pour une introduction niveau M2 à l'application du groupe de renormalisation aux phénomènes critiques on pourra consulter :

J. Zinn-Justin, *Transitions de phase et groupe de renormalisation*, EDP Sciences et CNRS Editions (Les Ulis 2005).

Enfin une présentation unifiée de la théorie quantique des champs telle qu'elle apparaît physique des particules et dans la théorie des phénomènes critiques peut être trouvée dans :

J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press 1989, (Oxford 4ième éd. 2002).

12

A Quantic Universe before the Big Bang(s)?

Gabriele Veneziano

Theory Division, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland
Collège de France, 11 place M. Berthelot, 75005 Paris, France

Abstract

The predictions of general relativity have been verified by now in a variety of different situations, setting strong constraints on any alternative theory of gravity. Nonetheless, there are strong indications that general relativity has to be regarded as an approximation of a more complete theory. Indeed theorists have long been looking for ways to connect general relativity, which describes the cosmos and the infinitely large, to quantum physics, which has been remarkably successful in explaining the infinitely small world of elementary particles. These two worlds, however, come closer and closer to each other as we go back in time all the way up to the Big Bang. Actually, modern cosmology has changed completely the old Big Bang paradigm: we now have to talk about (at least) two (big?) bangs. If we know quite something about the one closer to us, at the end of inflation, we are much more ignorant about the one that may have preceded inflation and possibly marked the beginning of time. No one doubts that quantum mechanics plays an essential role in answering these questions: unfortunately a unified theory of gravity and quantum mechanics is still under construction. Finding such a synthesis and confirming it experimentally will no doubt be one of the biggest challenges of this century's physics.

Résumé

Un univers quantique avant le(s) Big Bang(s)

Les prédictions de la relativité générale ont été vérifiées à l'heure qu'il est dans une grande diversité de situations, posant donc de fortes contraintes à l'encontre de n'importe quelle théorie alternative de la gravitation. Cependant existent de fortes indications concordantes pour dire que cette théorie doit être regardée comme une approximation d'une théorie plus complète. Les théoriciens cherchent depuis longtemps les manières de connecter la relativité générale, pertinente dans la description du Cosmos et de l'infiniment grand, et la physique quantique, qui a montré sa remarquable efficacité dans l'explication du monde infiniment petit des particules élémentaires. Ces deux mondes, cependant, deviennent de plus en plus proches l'un de l'autre lorsqu'on remonte le temps en allant vers le Big Bang. A vrai dire, la cosmologie moderne envisage cette dernière notion d'une manière complètement différente de l'ancienne : il nous faut actuellement parler d'au moins deux big (?) bangs ; si nous savons un bon nombre de choses sur le plus proche - temporellement - de nous, à la fin de la période d'inflation, nous sommes beaucoup plus ignorants de celui qui a pu précéder l'inflation et qui a pu marquer le commencement du temps. Il n'y a aucun doute que la physique quantique joue un rôle essentiel pour répondre à ces questions. Malheureusement une théorie unifiée de la gravitation et de la mécanique quantique est encore en chantier. Faire émerger une telle synthèse et la confirmer expérimentalement constituera sans aucun doute l'un des plus grands enjeux de la physique de ce siècle.

I. Three revolutions 100 years ago

Three crucial revolutions in physics took place at the dawn of last century:

- 1900: Max Planck, puzzled by an ultraviolet divergence in black-body radiation, introduces his famous constant h and starts the *Quantum Revolution*, i.e. the end of determinism;
- 1905: Albert Einstein, building upon the finiteness and constancy of the speed of light c , introduces *Special Relativity*, i.e. the end of absolute time;
- 1915-16: Albert Einstein again, starting from the observed universality of free-fall, introduces a geometric theory of gravity, *General Relativity*. It marks the end of an absolute geometry, which is deformed by matter in a way proportional to the gravitational constant G .

Since then a lot of progress has been made in combining in various ways those three revolutions. The most significant of these are:

- A. The Standard Model of Elementary Particles (SMEP)
- B. The Standard Model of Gravitation and Cosmology (SMGC)

Together, they form our present:
Standard Model of Nature (SMN)

A. The SMEP is the result of combining the principles of the quantum and special relativity revolutions. We may say that it is the marriage between \hbar and c , the two constants of Nature characterizing those two revolutions. Its successes have been amazing, last but not least the discovery in 2012 at CERN of the Higgs boson implementing the Brout-Englert-Higgs mechanism. For lack of time I will not go any further into describing this pillar of the SMN. Rather, I would like to recall the present status of the Standard Model of Gravity before turning to its cosmological applications.

B. As already mentioned the Standard Model of Gravity is based on Einstein's General Relativity, a beautiful theory that can be regarded as a synthesis between special relativity and the Newtonian theory of gravity, a marriage between c and G .

Its starting point is the so-called Equivalence Principle, deeply rooted in the observed universality of free fall. Tests of such universality are expected to reach soon incredible precision attaining the level of 1 part in 10^{15} in the coming few years from the already operative μ scope experiment, with an even better precision foreseen from the future STEP experiment (if and when it will fly).

Besides, GR predicts well-verified corrections to Newtonian gravity (deflection of light, periastron precession, Lense-Thirring effect,...). It also predicts qualitatively new phenomena, most notably:

- The existence and properties of black holes (BH).
- The existence of gravitational waves (GW).

Concerning BH, there has been for quite a while direct evidence for their existence, in particular for the presence, in the centre of most galaxies including our own, of huge black holes over a million times heavier than the sun.

Finally, as far as GW are concerned, the situation has changed dramatically this year when previous indirect evidence (through the observation of the slowing down of the revolution period of binary pulsars) was turned into direct observation in the LIGO interferometers by the LIGO/VIRGO collaboration. Amazingly, this confirmation of GR comes with further evidence for BH as well, this time as sources of GW when two of them (each one of tens of solar masses) merge.

Note that, so far, we have only discussed tests of classical General Relativity ($\hbar=0$). As we will see in a moment, things change considerably once we extend the applications of GR to cosmology.

2. 21st century's cosmology

Let us start by recalling the cosmological model that prevailed in last century till the eighties. It was based on GR and was characterized by what we may call a *classical dogma* known under the resounding name of Hot Big Bang (HBB) cosmology. According to it:

The Universe was born about 13.5 billion years ago
in state of extremely high temperature and density.
A singularity¹ prevents us from going beyond that moment
in our past, therefore identified with the beginning of time.

Since then, an adiabatic expansion, very rapid initially, then slower and slower, cooled down the Universe. Today we see relics of that catastrophic event in the cosmic microwave background (CMB), a thermal spectrum of photons with a temperature of about 2.7K.

The HBB scenario had several important successes. There is very little doubt that an event *like* a hot Big Bang must have taken place in our past. Unfortunately, its necessarily precise form poses some puzzling questions. For lack of time I will only mention a few of them.

2.1 The homogeneity problem

The universe is very homogeneous and isotropic on large scales: the CMB temperature varies by only one part in a hundred thousand (i.e. by tens of μK) depending of the direction it is coming from. Now, this property is put by hand (as initial condition) in the HBB scenario!

If, instead, we start from generic initial conditions and the expansion has always been a decelerating one, the Universe has always been too big (for its age!) for being able to become homogeneous in the short time elapsed since $t=0$.

The problem can be visualized in figure 1, where the blue ellipses, representing the size of our observable Universe at a given time in our past, are compared to the red ones, representing the distance traveled by light from the Big Bang till that generic time. Clearly, throughout our past history the blue ellipses were larger than the red ones, showing that thermalization by causal processes (that cannot travel faster than light) is impossible.

2.2 The flatness problem

We can measure (e.g. by CMB experiments) how far the present geometry of space is from being exactly Euclidean. The result is that it can only have a very small spatial curvature (this is often stated by saying that $\Omega \sim 1$, or that the energy density is nearly critical). However, during a decelerating expansion spatial curvature increases meaning that, in order not to be larger than measured today, it had to be extremely small right after the HBB. Again an initial condition that one has to put in by hand.

(1) A moment at which several physical quantities, like, density and temperature become infinitely large.

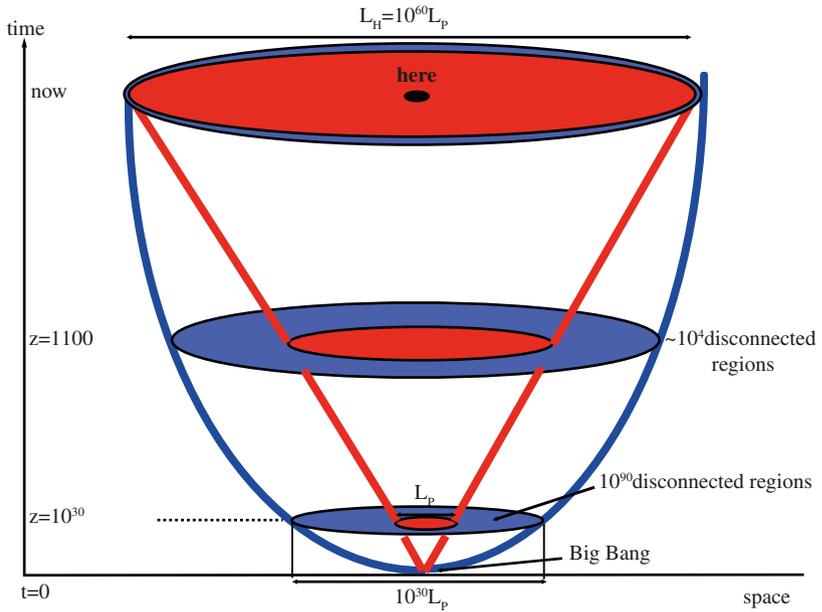


Figure 1. Time evolution (from bottom up) of the size of our presently observable Universe (blue ellipses) and of the distance traveled by light since the Big Bang (red ellipses) in the old HBB scenario. In our past the red ellipses were always smaller than the blue ones.

2.3 Generating the large-scale structure of the Universe

The HBB model either predicts too much structure or none at all (i.e. no galaxies, clusters, stars). To get the right amount of structure one needs again a very fine-tuned initial state. All three problems can be ascribed to two basic features of HBB cosmology:

- The existence of a beginning of time.
- An always decelerating expansion (usually implied by the fact that ordinary matter resists the expansion).

If, instead, a phase of accelerated expansion took place in the primordial Universe, then:

The homogeneity and flatness problems (see below for the 3rd one) are easily solved, since the Universe was so tiny during the inflationary phase that it could have easily become homogeneous by causal processes. This (a posteriori) very simple observation gave rise to an alternative to the HBB called the inflationary scenario (in which figure 1 is replaced by figure 2).

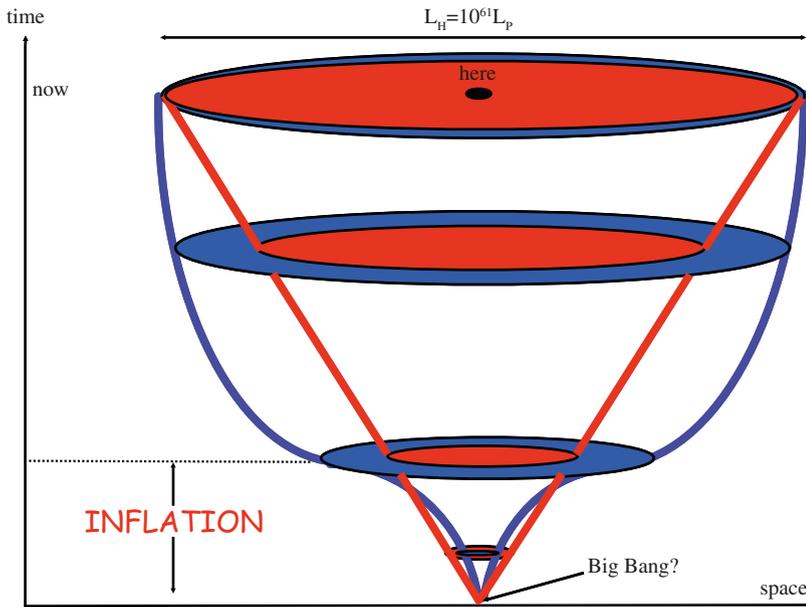


Figure 2. Time evolution (from bottom up) of the size of our presently observable Universe (blue ellipses) and of the distance traveled by light since the Big Bang (red ellipses) in the inflationary scenario. In our far past the red ellipses were larger than the blue ones.

Eventually, in the nineties, cosmologists arrived to what is now considered the new standard model of cosmology, often dubbed as the “Concordance Model”, a model which combines the inflationary paradigm with that of a dark sector in the energy budget of the Universe. The dark sector consists of two components:

- Dark Matter, whose existence is called for by the otherwise mysterious rotation curves of galaxies.
- Dark Energy, which is needed to explain the recent acceleration in the expansion.

So far, we are still talking classical physics/GR and everything looks fine. So why bother with the quantum?

3. The importance of QM in (modern) cosmology

There are, at least, two reasons why inflation without quantum mechanics does not solve the cosmological problems posed by HBB cosmology.

- The origin of large-scale structure.

Without QM inflation produces a perfectly homogeneous Universe. That's because any initial *classical* inhomogeneity (which, by definition, has to be on length scales larger than the Planck length) is stretched far beyond our present horizon during the 60 or more e-folds of expansion and thus effectively erased. In other words, without QM the structures we see today in the sky could not have formed.

Instead, with QM, classical initial inhomogeneities are erased, but they replaced by calculable quantum fluctuations produced, amplified and stretched throughout the inflationary epoch (see [1] for a recent review). Those created during the last 60e-folds are still within our horizon today. And indeed the CMB fluctuations we observe today (e.g. via the Planck satellite) carry an imprint of those primordial quantum fluctuations.

Although, so far, we have only observed the so called density/curvature perturbations these, as the name indicates, can be either seen as matter or as geometry perturbations, the distinction between the two being coordinate(gauge)-dependent. Thus, I maintain that CMB observations are already² a clear indication that gravity needs to be quantized like we already know to be the case for the other fundamental interactions.

- The need to reheat after inflation.

Inflation cools down the Universe (in case it was hot before inflation) to practically zero temperature. How can we generate a hot Universe *after* inflation? If we do not, there is no way to generate the CMB or to have the primordial nucleosynthesis of light elements such as Helium!

Note that, in inflationary cosmology, the Universe is still expanding after inflation. How can it keep expanding and yet reheat? This is where a second intervention of QM takes place by providing a dissipative, non adiabatic conversion of potential energy into a hot thermal soup of elementary particles. Indeed, one of the challenges for any inflationary model is to be able to generate sufficient reheating (or entropy production). It is hard, although perhaps not impossible, to find a classical mechanism achieving that goal but QM does it in a very natural way.

4. Which Big Bang?

An important consequence of our previous discussion is that the phase of reheating after inflation plays the role of the Big Bang of the old HBB cosmology, modulo some important differences:

(2) The observation of cosmological tensor perturbation through the B-mode CMB polarization would be, of course, the ultimate smoking gun for the need to quantize gravity.

1. It has no singularity (such as an infinite temperature) associated with it (if any it's non trivial to make it hot enough);
2. It has nothing to do with the beginning of time!

During many decades we have taught the general public the simple equation:

$$\text{Big Bang} = \text{Beginning of Time}$$

But, as just discussed, according to modern inflationary cosmology, we have to distinguish:

The *physical* non singular BB, at the end of inflation, the one that left measurable relics (the CMB, light nuclei) and:

A *theoretical* singular BB that could have preceded inflation whose relics have been washed out by inflation. In any case:

The BB we know something about has nothing to do with the beginning of time.

Thus the often shown picture depicted below (figure 3) is very misleading.

In conclusion, we are led to accept, on the basis of our discussion, a necessarily quantum cosmology taking place before and during the (true/physical) Big Bang!!

But what about the beginning of time? What preceded inflation? We do not know the answer to this question and standard inflationary cosmology is pretty agnostic about it. We only know that the answer lies in the answer to another question:

Which is the correct quantum theory³ of gravity?

5. Which quantum gravity?

Quantizing General Relativity is a notoriously difficult task. Unlike in the SMEP, in the case of gravity the ultraviolet infinities that are present in any local quantum field theory (in four dimensions) cannot be lumped into a finite number of renormalization constants.

To this date, the most interesting attempts to quantum GR are those of Loop Quantum Gravity and of Asymptotic Safety. Both assume that one can make sense of quantum gravity by modifying the way to quantize GR, not GR itself. Their viability as theoretically consistent quantum theories is still to be demonstrated. The cosmological applications of LQG apparently reach conclusions similar to those of string theory. It is hard (at least for me) to assess the reliability of those claims.

(3) We are referring here to a full-fledged consistent quantum theory of gravity : cosmological perturbations can be treated semi-classically without such a complete quantum gravity formulation.

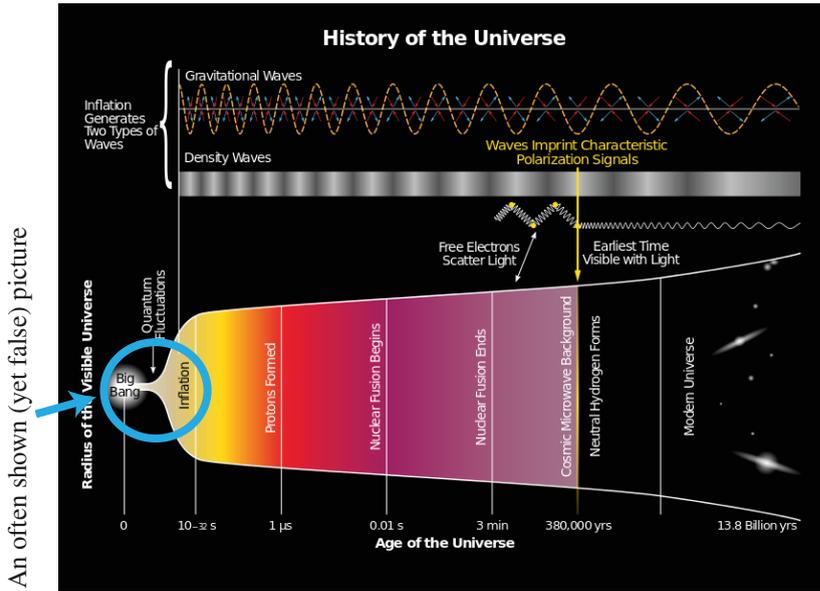


Figure 3. An often shown but yet false picture of the history of the universe.

By contrast, a drastically new approach to quantum gravity (and quantum field theory in general) is offered by (super)string theory thanks to a consistent non-local modification of fundamental interactions below a certain length scale. In order to introduce the basic concepts underlying string theory it is good to recall:

A lesson from particle physics

According to our present understanding, at the most microscopic quantum level, all fundamental interactions are transmitted by massless particles of spin 1 or 2. The first (e.g. the photon) give rise to non-gravitational interactions, while the latter (the graviton) is responsible for gravity.

Once the existence of such particles is assumed the basic theoretical structure of both gauge theories and general relativity (gauge invariance, general covariance) follows from consistency.

As we shall see in a moment, in string theory the existence of massless spinning particles is a consequence of Quantum Mechanics. Therefore Quantum String Theory (QST) represents a kind of Copernican Revolution in which quanta come first, quantum field theory comes next, and classical field theory (Maxwell, General Relativity...) comes last. Let us see how.

6. String theory (and cosmology)

String theory: what's that? We do not quite have a definite answer to this question but, at least at a superficial level, the best reply seems to be:

String Theory is the theory of strings

Jokes apart, what that means is that one replaces the grand principles of gauge invariance and general covariance, which are at the basis of our SMN, by *just* the assumption that everything is made of:

Relativistic Quantum Strings

In other words, when the particles that are usually considered elementary and point-like are looked at with sufficient resolution they actually appear as little one-dimensional objects, open or closed strings (depending on whether or not they have ends). String theory thus combines two of the fundamental revolutions of a century ago (and two fundamental constants, \hbar and c) but, rather than adding from the very beginning the third (General Relativity and G), simply adds the string postulate. As we shall argue below this will be enough thanks to some quantum magic. In one symbolic equation we can write:

SR + QM + Strings = Magic Cocktail

Let us start with two crucial quantum miracles:

6.1 Quantum magic I: emergence of a fundamental length

Classical relativistic strings have no characteristic length scale. Their tension T is simply a conversion factor associating a string size L with a string mass $M \sim TL$. Note the analogy with GR, where, through G and c we also associate a length (a Schwarzschild radius R) to a given mass $R = 2GM/c^2$.

By contrast, quantum strings have a minimal (optimal) size L_s given by $L_s^2 = \hbar/T$. This a truly fundamental scale analogous to the Bohr radius of an atom in non-relativistic QM. There is, again, an analogy with GR, which, at the quantum level, does have a length scale, the Planck length $L_p^2 = \hbar G/c^3$.

The string length scale L_s plays many different crucial roles in QST. In particular, all interactions are smeared over regions of order L_s and thus softened at distances shorter than L_s . This basic property of quantum strings cures the ultraviolet problems of conventional quantum gravity.

6.2 Quantum magic II: massless spinning particles

Classical string cannot have angular momentum without also having a finite size, and thus, through the string tension, a finite mass. Indeed one can prove a classical lower bound on the mass of a bosonic string with (orbital) angular momentum J :

$$M^2 \geq 2\pi T J \quad (1)$$

This classical inequality is slightly violated at the quantum level and becomes (after a consistent regularization of the divergent sum):

$$M^2 \geq 2\pi T(J - a\hbar) \quad , \quad a = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2. \quad (2)$$

with the half-integer values of a occurring in the case of the superstring. This quantum miracle is obviously what leads to the already anticipated Copernican Revolution:

$M=0, J=1$ provides the photons and the other gauge bosons mediating non-gravitational forces

$M=0, J=2$ provides a graviton, mediating the gravitational force.

Unfortunately, the $M=J=0$ case provides dangerous extra massless particles (and corresponding long-range forces, but this matter is beyond the scope of this lecture).

6.3 A Theory of everything?

In QST all elementary particles correspond to different vibrations of the same basic objects: open and closed strings! Thus, combining the two miracles we just described, provides:

A unified and finite theory of elementary particles, and of their gauge and gravitational interactions, not just compatible with, but based upon, Quantum Mechanics!

Quantizing strings gives rise, directly, to quantum versions of gauge and gravitational interactions whose classical limits are the conventional field theories traditionally seen as the starting point of QFTs. Furthermore, the first quantization of strings also provides short-distance corrections without which QFTs are plagued by UV divergences!

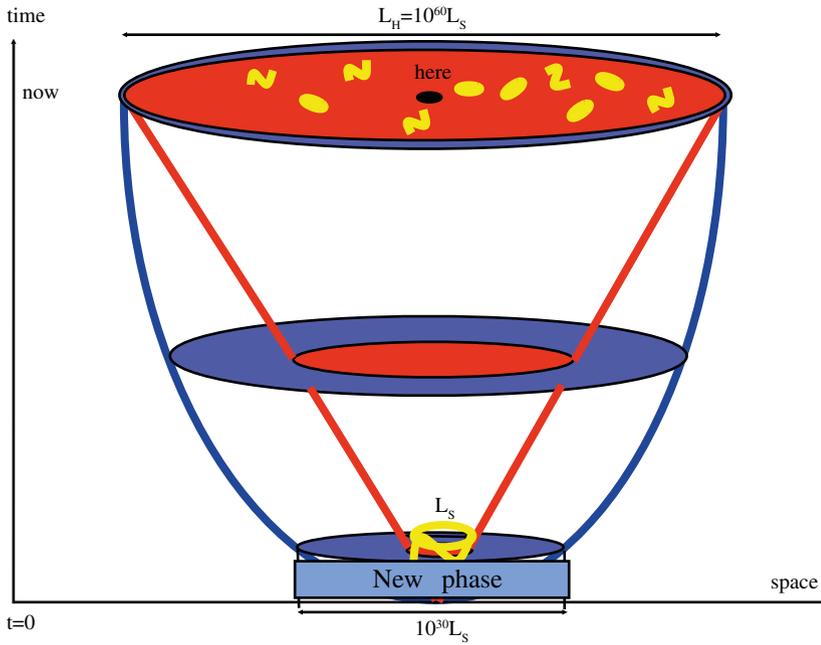


Figure 4. A cosmology without a classical beginning.

6.4 String Cosmology

We are now finally ready to ask the question: What does string theory tell us about the beginning of time⁴?

We have already stressed that QST implies short-distance modifications of GR. Not surprisingly these intervene as soon as the curvature-radius of the geometry (e.g. H^{-1}) becomes comparable to L_s , the minimal size of a quantized string.

Intuitively, this minimal size implies an upper limit to density, temperature, and curvature, all the quantities that supposedly blow-up at the putative beginning of time. Apparently, there is no place for the singular Big Bang of the old BB cosmology. But what is there to replace it? The answer is not known, but two possibilities emerge as most likely:

- A cosmology without a classical beginning.

A very quantum “stringy” phase replaces the old Big Bang. The concepts of a classical space and time spring out of that phase as emerging concepts. This possibility is sketched in figure 4.

(4) See also a non-specialized article of mine in Scientific American [2].

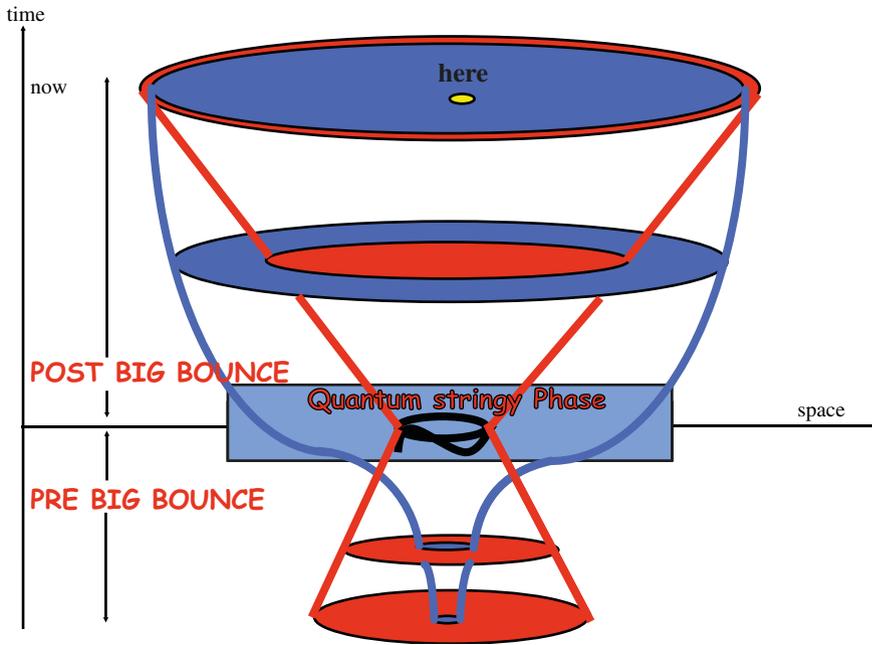


Figure 5. A cosmology without a beginning.

- A cosmology without a beginning.

Here the “stringy” phase plays the role of a “quantum bridge” between our epoch and another classical one, seen as a sort of gravitational collapse from which the Universe bounced when the curvature radius became of order L_s (a Big Bounce). This possibility is sketched in figure 5.

The pre-bounce phase could either prepare or just replace the inflationary one. In the latter case we may very well expect some:

Observable Cosmological Relics of a pre-Big Bang phase.

The following ones are particularly noteworthy (see [3] and references therein):

- A stochastic background of gravitational waves, possibly observable in the next decade by advanced LIGO and/or VIRGO. A possible spectrum is illustrated in figure 6.

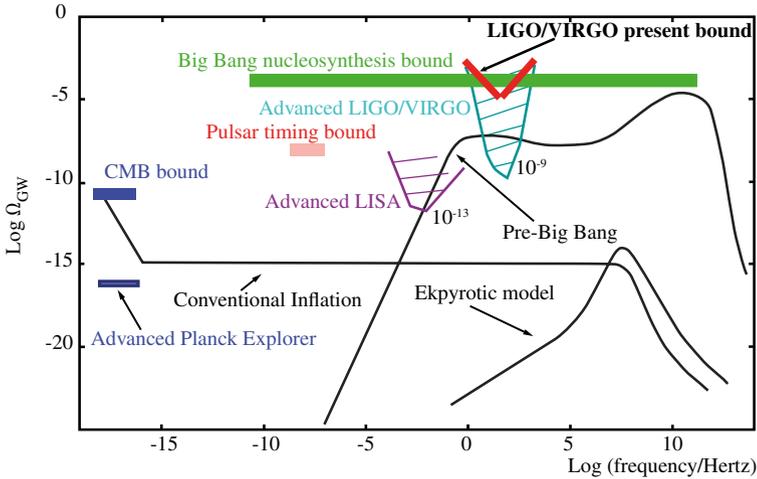


Figure 6. Different possible sources of a stochastic background of GW and the expected sensitivities for their detection.

- A new source of adiabatic density/curvature fluctuations, with distinctive properties w.r.t. those of conventional inflation (e.g. with no primordial B -polarization in the CMB!).
- A new mechanism to generate seeds for the cosmic magnetic fields which are known to exist on galactic and inter-galactic scales and whose origin is mysterious in the absence of a mechanism producing appropriate seeds for them.

7. Conclusions

Classical GR ($\hbar=0$) works very well in a large number of situations ...but:

- For its cosmological applications, and in particular in the inflationary scenario, GR needs QM.
- QM is at the origin of large scale structures in the Universe. It is also necessary to reheat it at the end of inflation.
- That moment of reheating plays the role of the traditional Big Bang but has nothing to do with the beginning of time.

- We don't know what preceded/started inflation. Answering such a question requires knowing the correct theory of quantum gravity and there are not so many options for it.
- In a string-theory context quantum gravity itself, as well as other QFTs, follows from QM, the classical BB singularity is (almost certainly) avoided, and the question of the beginning of time is well posed ...

...but not yet solved!

Acknowledgements

I am very grateful to the organizers of this Symposium, and in particular to Professor Victor Mastrangelo, for having kindly invited me to attend such an exciting event and for gently pushing me to write up my talk.

References

- [1] Mukhanov, Viatcheslav. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] Veneziano, Gabriele. in *A Matter of Time*, a collection of *Scientific American* articles, 2014.
- [3] Gasperini, Maurizio and Veneziano, Gabriele. *Physical Reports*. 2003, vol. **373**, n°1-2, p.1. Preprint <https://arxiv.org/abs/hep-th/0207130>

13

Loop quantum gravity and exploding black holes

Simone Speziale

Centre de Physique Théorique, UMR7332, CNRS, Université d'Aix Marseille
& Université de Toulon, 13288 Marseille, France

Abstract

Black holes are one of the most fascinating objects populating the universe. According to classical general relativity, they are eternal and can only grow bigger in time. Hawking was the first to show that taking quantum effects into account can change the picture, leading to a slow evaporation of black holes by quantum thermal radiation. This theoretical phenomenon, yet to be observed, raises crucial conceptual and technical questions aimed at any fundamental theory of quantum gravity. Among these, the famous information-loss paradox. I will present two different hypothesis to address these questions: a more conservative one, based on modified Einstein's equations and non-singular black holes; and a more speculative one, based on loop quantum gravity and exploding black holes, which may also lead to interesting observational consequences.

Résumé

Gravité quantique à boucle et trous noirs explosifs

Les trous noirs figurent parmi les objets les plus fascinants peuplant notre univers. Selon la relativité générale dans sa version classique, ils sont éternels et ne peuvent que croître avec le temps. Hawking a été le premier à montrer que la prise en compte des effets quantiques peut changer la donne, en conduisant à une lente évaporation par radiation thermique quantique. Ce phénomène théorique, qui a encore à être observé, soulève des questions cruciales, conceptuelles et techniques, visant toute théorie fondamentale de gravitation quantique. Parmi ces questions, le fameux paradoxe de la perte d'information. Ce chapitre présente deux hypothèses différentes pour tenter d'y répondre : une première hypothèse, la plus conservatrice, est basée sur une modification des équations d'Einstein conduisant à des trous noirs avec absence de singularité ; une seconde, plus spéculative, est basée sur la gravité quantique à boucle et des trous noirs explosifs, hypothèse qui peut également conduire à d'intéressantes conséquences potentiellement observables.

I. Introduction

Right on time for the hundredth birthday of Einstein's theory of general relativity, gravitational waves have been observed by the two American laser interferometers led by the LIGO consortium. This extraordinary result has perfectly confirmed once more Einstein's predictions. The difficulty of the observation, the reason why it took so long, lies in the extreme weakness of gravity compared to the other forces: even though the whole Earth is pulling the chalk I hold towards the ground, it takes me a small effort to beat this attraction, using the chemical energy of my muscles, ultimately of electromagnetic origin. For the same weakness, another extraordinary prediction of GR, that is the slowing down of time with the increase of the gravitational field had to wait until the seventies for experimental confirmation, with the building of the first GPS satellites. Around the same time came also the first indirect observation of gravitational waves: an orbital pair of neutron stars with a strong magnetic field was observed losing energy and slowing down at exactly the rate predicted by GR if that energy was carried away in the form of gravitational waves. Direct observation of those waves was not possible at the time, as we did not have an instrument sensitive enough. Now we have, thanks to LIGO, and the era of listening to the universe via gravitational waves has just begun, with the upcoming construction of more laser interferometers around the world.

Black holes also have been predicted using Einstein's theory long before their observation. As early as three months after the publication of the equations of general relativity, Schwarzschild found the simplest spherically symmetric and static solution. This solution describes the deformation of spacetime around a star or a planet, and introduces small but crucial corrections to Newton's description of gravity. In particular, it leads to a correction to the precession of the perihelium of Mercury and to the deflection of light, the two immediate confirmations of general relativity, and includes the slowing down of time,

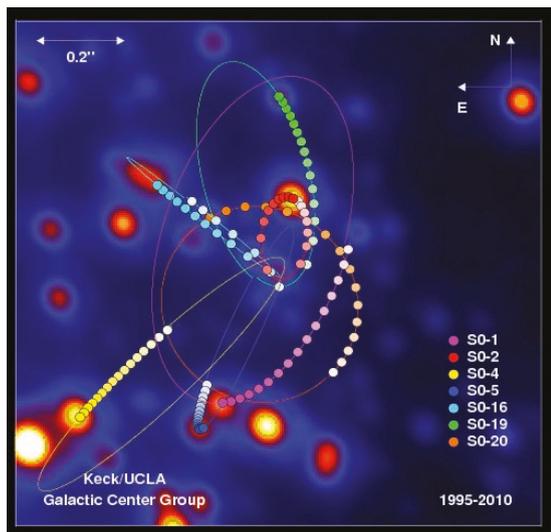


Figure 1

an effect called gravitational redshift. Remarkably, the gravitational redshift and associated slowing down of time can become increasingly large, the more the star is compact. If a star of mass M could be compressed in a region of radius smaller than the critical value $r_s = 2GM/c^2$, the effect would become infinite. This infinite redshift implies also an infinite redshift of any propagating wave, so that nothing, not even light, can emerge from the region inside the surface of radius r_s , thereby named the event horizon: an outside observer has no access to events happening inside this surface.

Initially considered to be just a theoretical abstraction, the notion of such 'black holes' become experimental evidence with the observation of regions of spacetime sourcing strong gravitational field (observed through the effects on the surrounding matter) and being completely invisible. The first such observation dates back to 1964 and the X-ray source Cygnus X1, now understood to be caused by the matter falling into a black hole from a giant star orbiting around it [1]. Since then we have discovered a large number of black holes, in mass ranges that go from a few solar masses, to monsters the equivalent of a hundred million Suns. We even have pictures of them! See for instance this famous image by the KECK telescope (figure 1), showing the center of our galaxy: The highly elliptical orbits of a few stars have been reconstructed over a 15-year period, all turning around a dark object the mass of a million Suns.

Observational confirmation of black holes, even if restricted to the region outside the event horizon, stimulates questions and theoretical thoughts on what lies beyond: what truly happens at the event horizon? What happens inside? From the mathematical viewpoint, these questions can be answered using general relativity. The theory tells us for instance that an observer falling inside the black hole will cross the event horizon in a finite time

and without experiencing any extremal conditions. Looking back at the direction he is coming from, he would see the evolution of its visible universe accelerate exponentially in front of his eyes, like in accelerated motion on a video. As he keeps falling in however, the gravitational attraction increases enormously in strength, until the tidal effects are so strong to destroy the observer spaceship and the observer himself: in Einstein's theory, the gravitational strength grows unboundedly as we approach the center of the solution, where it becomes infinite. This so-called *curvature singularity* at the centre of the black hole is a region where all infalling trajectories end: there is no escape from it, and everything that falls in the black hole is doomed to destruction. Is this really what happens inside a black hole? We will come back to this question below.

In any case, the strange interior region with its singularity lurking in the dark does not affect the physical application of general relativity to astrophysical phenomena, since the singularity is hidden by the event horizon and thus causally disconnected from our universe. Indeed, scientists like Hawking, Penrose and many others developing the classical theory of black holes and general relativity, conjectured that all such singularities are hidden by event horizons. This was called the Cosmic Censorship Conjecture, and it is supported by the mathematical evidence that gravitational collapses form event horizons around singularities. Furthermore, Hawking proved that an event horizon can never decrease in size, but only increase, as new matter falls in the black hole, thus proving that black holes are eternal in classical general relativity.

Shortly after proving the theorem, Hawking realized that quantum mechanical effects would violate one of its hypotheses, in particular, the positivity of energy. Think of instance of anti-particles, or of quantum tunnelling effects. Quantum mechanical effects could then lead to a black hole losing mass and shrinking. Now, including quantum mechanical effects in general relativity is a very delicate issue: the very foundation of quantum mechanics and quantum field theory, its extension to systems with infinitely many degrees of freedom, requires a fixed and flat Minkowski spacetime and its associated isometries, like in special relativity. On the contrary, in general relativity spacetime is dynamical, not fixed and lacks in general the isometries of Minkowski. We will come back to this below, but as an intermediate step, it is possible to consider quantum field theory on a fixed but curved spacetime, provided it is stationary. This set up is strongly limited because it ignores the back-reaction of matter on spacetime, thus the heart of Einstein's theory, but it can provide a simpler setting to test ideas and physical effects when the matter content has little energy content. In this approximate setup, Hawking was able to derive a stupendous conclusion: indeed, quantum effect would lead to energy leaking out of the black hole. The leaking takes the form of a thermal radiation of quantum particles at a temperature given by

$$T_{\text{H}} = \frac{\hbar}{8\pi GM}, \quad (1)$$

where M is the mass of the black hole.

Intuitively, this effect can be understood as a gravitational version of Schwinger's vacuum polarisation: the quantum vacuum of the field is teeming with particle-antiparticle

virtual pairs, and if we apply a strong enough electric field say with a capacitor, the pairs can turn into real particles, separated from each other and attracted to the two opposite plates of the capacitor. The energy to excite real particles from the vacuum is provided by the capacitor. In the Hawking effect, it is the strength of the gravitational redshift near the event horizon that polarises the vacuum, and the energy to create real particles is subtracted to the black hole itself. What is surprising about Hawking's result is the perfectly thermal nature of the quantum radiation. A black hole then behaves exactly as a black body in thermodynamics. Hawking's result is just a first order approximation and it ignores the back reaction. Hence his theory does not tell us how the black hole changes when a quantum of radiation is emitted. But the thermodynamical behaviour of the black hole, suggested by many other properties discovered around the same time such as the famous area entropy law, suggests that we can use Stefan-Boltzmann law to estimate the energy loss rate. This gives

$$\dot{M} = -\frac{\hbar c^6}{G^2 M^2}. \quad (2)$$

If there are no important higher order or non-perturbative corrections appearing, the evaporation will make a black hole lose all its mass in a finite time: integrating (2), we get

$$\tau_{\text{H}} \sim \frac{G^2}{\hbar c^6} M^3. \quad (3)$$

Black holes may not be eternal after all!

Such a finite lifetime is by no means in contradiction with the observed existence of black holes, as for macroscopic black holes is much longer than the age of the universe itself. For instance, the Hawking lifetime of a solar mass black hole is 10^{67} years! Only for microscopic black holes this finite lifetime could be tested; however, although suggested by some theorists, microscopic black holes have never been observed. Furthermore, Hawking's radiation itself is not astrophysically observable: for a solar mass black hole, $T_{\text{H}} \sim 10^{-8} \text{K}$ is smaller than the cosmic microwave background of 2.7K .¹ Even lacking direct testing, Hawking radiation has been rederived in a plentiful of different ways in the passing years, and very few doubt of the solidity of this theoretical result.

From a theoretical point of view, Hawking's radiation poses a number of extraordinary challenges that go hand to hand with the issue of the central singularity. In fact, if classically we could invoke the Cosmic Censorship Conjecture and assume that all singularities are hidden from the eye, and general relativity can be applied without having to deal with them, Hawking's result on the evaporating event horizon brings out the singularity again. To deal with the singularity, it may then be necessary to go beyond general relativity, beyond also the approximate scheme of quantum field theory on curved spacetimes used by Hawking, and deal with a proper quantum theory of gravity.

(1) Efforts of verifying Hawking's radiation rely on so called analogue systems [2].

Applying quantum mechanics to general relativistic systems requires thus going beyond the actual foundations of theoretical physics, and it is considered by many the holy grail of theoretical physics. This quest has fascinated the most brilliant minds for over 80 years now, and a large number of very creative proposals have been put forward. While none of these ideas has led to consistent experimental predictions that could be verified, this question has blossomed into a whole research field that regularly produces important advances in theoretical physics in general, as well as mathematics and foundations of quantum mechanics. In this field the most developed and most followed approach is certainly string theory. The trouble with string theory is that the very foundations of the theory require the existence of supersymmetry and extra-dimensions, and an ever increasing amount of experimental evidence has been building against these two ideas, based on designed experiments failing to see the observed effect. An orthogonal approach, which does not require extra-dimensions nor supersymmetry, but instead focuses on the dynamical nature of spacetime in general relativity, is offered by loop quantum gravity (LQG) [3]. This approach, pioneered by Abhay Ashtekar, Lee Smolin and Carlo Rovelli (whose 60th birthday will be celebrated this year with a conference in his honour in Marseille) will be discussed in more details below.

Summarizing, black holes and Hawking radiation provide a perfect testing ground for any candidate theory of quantum gravity. In particular, we can select three key questions that should be addressed:

The dynamical problem: Is Hawking's evaporation formula valid throughout, i.e. does the black hole evaporate completely?

The singularity problem: If it evaporates completely, what happens to the central singularity? Does it become exposed, does it vanish?

The information paradox: Hawking's radiation is perfectly thermal; if the singularity is absent, what happens to the information of the matter that fell in the black hole?

The situation with the curvature singularities of general relativity is reminiscent of an analogous problem faced by theoreticians in the early 20th century, namely the classical instability of atoms. According to Maxwell's theory of electromagnetism, the electrons spinning around the charged nuclei should have emitted radiation, thus losing angular momentum and inevitably falling into the nucleus. In other words, the classical potential had a singularity at $r = 0$. The solution to this problem came from the inclusion of quantum effects: the uncertainty principle introduces an effective quantum pressure preventing the electron from being localised in the centre with zero momentum. Even in the absence of a complete theory of quantum gravity, many researchers conjecture that something similar will happen also in the gravitational case. Planck-scale quantum gravity effects will modify Einstein's equations, introducing some sort of effective pressure halting the gravitational collapse. The singularity theorems of Hawking and Penrose are violated simply by the modification of Einstein's equations.

There is a vast literature of ideas and results concerning these questions and similar variations. In the following, I will briefly present two different hypothesis on which I have

worked: non-singular black holes [9, 10] and exploding black holes [11]. The two hypotheses share the same fundamental idea, that the fundamental theory of gravity resolves the central singularity, but differ in the detailed realisation and physical consequences. In the case of non-singular black holes, the quantum pressure stops the collapse to a somewhat steady state, still looking like a black hole from the outside, but non singular at its centre. Hawking radiation then comes into play, slowly evaporating away the black hole, finally exposing the inner core of the collapse, thus restoring the information lost in the collapse. In the case of exploding black holes, the quantum pressure is so strong that it leads to a ‘bounce’ of the gravitational collapse, turning the in-falling matter into an outgoing, exploding shell. The relevant quantum effect is a tunnelling process, and Hawking radiation is treated as a sub-leading, dissipative effect.

2. Non-singular black holes

Many tentative theories of quantum gravity predict modifications to the Einstein’s equations. The modifications can be organised in a power series in the quantum gravity parameter L (ideally proportional to the Planck length $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{16\pi G}{c^4} [T_{\mu\nu} + L \dots + L^2 \dots + \dots]. \quad (4)$$

A typical case study for instance is when the extra terms in the ellipses contain higher powers of the Riemann tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. The modification of the theory invalidates the singularity theorems, and solutions with non-singular black hole metrics can now be found. To be interesting, such solutions should satisfy three criteria:

- (i) look like a black hole from outside the event horizon, so to be compatible with general relativity;
- (ii) be regular everywhere, in particular have no central singularity;
- (iii) have all curvature invariants everywhere sub-Planckian in magnitude:

$$R < l_p^{-2}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} < l_p^{-4}, \quad \text{and so on.}$$

The third criterium is needed to justify the use of a classical, smooth metric to describe quantum gravity effects. The point here is that nothing guarantees that a metric description of quantum gravity is possible above the Planck scale. String theory and loop quantum gravity for instance, argue that this is not possible, and a completely different fabric of spacetime emerges at those scales. Therefore the smooth non-singular black hole metric makes sense only to describe regions of sub-Planckian curvature, albeit extremely high. These conditions by themselves turn out to impose important restrictions on the allowed metrics, so that it becomes interesting to study non-singular black hole metrics satisfying (i – iii) in their own right, regardless of the details of the underlying fundamental theory.

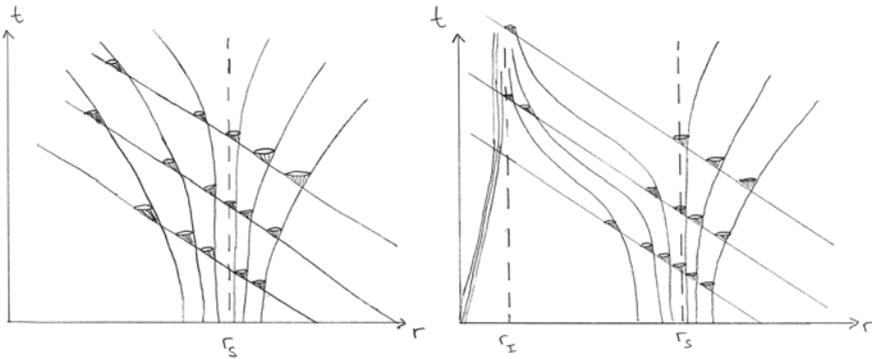


Figure 2

In particular, it is possible to prove that a spherically symmetric non-singular metric that looks like a black hole from far away must have a second horizon inside the event horizon, thus making the central location a time-like region. The new inner horizon has the opposite properties of the event horizon: it is an infinite-blueshift surface, and an accumulation region for geodesics, see figure 2. While this is a rather generic property of non-singular black holes, the details depend of course on the precise metric used. The case study most developed in the literature was introduced some ten years ago by Hayward [4] (see also [5]). Its light cone structure is shown in the figure 2 (right panel), in comparison with the one of Schwarzschild (left panel): We see the presence of a second horizon, acting as an accumulation surface for the outgoing null rays. The central region of the metric has no singularity, but a finite value of the curvature inversely proportional to L in (4), so that if we switch off the deviations from Einstein's equations, namely we take the limit $L \rightarrow 0$, we recover the central singularity. With a non-singular central region, the physical situation of this new black hole is similar to what happens at the centre of a star, where one observer could be static in free fall (provided he doesn't burn!).

What happens if we try to address the puzzles of evaporation in this context? We can assume that the mass evaporates in time according to Hawking's law (2), and see what happens to the resulting spacetime. Since the inner horizon acts as an accumulation surface, all the matter that falls in to form the black hole accumulates at the inner horizon. As the outer, event horizon slowly evaporates for Hawking radiation, matter continues to accumulate. Assuming that the Hawking evaporation goes through all the way, at some point the event horizon will rejoin the inner horizon, and the two will merge together and disappear, leaving the central region exposed. As there is no more a singularity in the centre, this evolution is perfectly compatible with the Cosmic Censorship Conjecture. Furthermore, it answers the information-loss paradox quite simply: the information on the matter fallen in is by no means lost, and becomes available once the event horizon has disappeared.²

(2) Technically, what happens is that the thermal Hawking radiation emitted at early times is purified by the outcoming radiation after the complete evaporation of the event horizon.

This qualitative picture is compelling, it provides a simple and elegant answer to both the singularity resolution and the information paradox. The difficulty is to find a consistent quantum theory of gravity confirming this picture and describing its details. In particular, properly taking into account the back-reaction of Hawking radiation on Hayward's metric, which means also verifying the assumptions that the black hole evaporates completely, requires solving the equations (4) with the specific modification included, and with $T_{\mu\nu}$ on the right hand side computed as expectation value of the quantum field on the Hayward metric. This computation is extremely difficult and we have no explicit answer yet. Nonetheless, preliminary calculations expose the following potential problem: because of the accumulation surface, all the information is released at once, when the event horizon completes its evaporation. This release would be associated with a huge burst of energy much larger than the mass of the black hole itself, and thus incompatible with standard energy conservation. It is possible that a special form of the extra terms in (4) can be found, such that the scenario above is realized resolving this problem with energy conservation, but this we do not know yet.

In conclusions, the hypothesis of non-singular black holes is quite appealing for its simple resolution of the information loss paradox, but needs to be still improved before it can be given substantial theoretical evidence.

3. Quantum tunnelling and exploding black holes

Among the alternatives, a more speculative idea has been recently put forward by Carlo Rovelli and his research group [6–8, 11]. The basic idea is that when the energy density of the collapsing matter reaches the Planckian density (i.e. $\rho_p = c^5/\hbar G^2 \sim 10^{96} \text{kg/m}^3$), quantum gravity induces a repulsive pressure so strong not only to stop the collapse, as in non-singular black holes, but to make the collapsing matter 'bounce back', thus triggering an explosion and the end of the black hole phase. Indications for this very exotic scenario come from loop quantum cosmology, an application of loop quantum gravity to simple cosmological models. In that context, extensive model building shows that using the dynamics of loop quantum cosmology, the initial Big Bang singularity is replaced by a 'Big Bounce': the universe does not come from an initial singularity, but from a previously contracting phase bouncing back once the critical Planck density is reached [12]. Rovelli's scenario extends this possibility from cosmology to gravitational collapse. From the outside, the exploding black hole phase triggered by quantum gravity looks like a white hole metric, namely the time reverse of a black hole, in which all matter is expelled from the white horizon; for this reason, this scenario is often called 'black hole to white hole transition'. Notice that this process is classically impossible: the two trajectories of matter (the collapsing and the exploding phases), or equivalently the two metrics (black hole evolving into a white hole) are not connected by any classical solution of Einstein's equations. The scenario is thus based on the well known quantum mechanical tunnelling effect: two classical configurations not connected by any trajectory could nonetheless have a non zero possibility of being joined by a tunnelling. The most famous example is the radioactive decay of an unstable isotope:

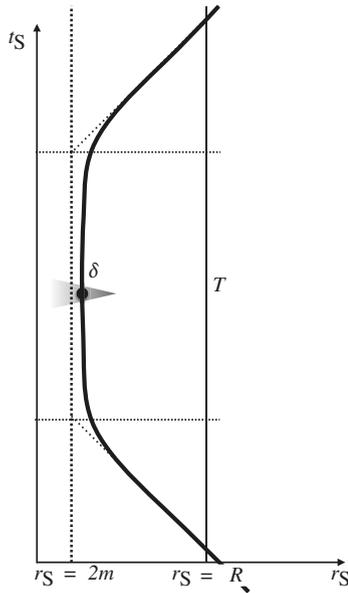


Figure 3

a quantum particle confined to the nucleus can have a non-zero probability of escaping its potential barrier. The key question is to estimate the probability of the tunnelling, hence, the lifetime of the isotope.

Like in all relativistic settings, the notion of time depends on the observer. To understand what is the relevant lifetime discussed here, let us consider the above tunnelling picture from the viewpoint of an observer outside the black hole. From his perspective, he can not see the matter falling in the event horizon and reaching Planckian energy density. Hence, what he would see is the matter falling towards the event horizon, increasingly slowing down and being redshifted as in the classical collapse, until at some point the tunnelling occurs, and the bouncing matter comes out again in the now white hole metric. The complete trajectory of the matter is reproduced in the figure 3.

Notice that the outside observer concludes that non-perturbative quantum effects causing the bounce must happen at the horizon scale, point δ in the picture. Here t_s and r_s are the radial and temporal coordinates of the external observer, and T is the observed lifetime of the black hole.

It is this lifetime as measured from the outside that is crucial for the exploding black hole picture to make sense. In particular, the half-life could be shorter than the extremely long time it takes for Hawking's radiation to make the black hole evaporate. The tunnelling and associated explosion would then occur before complete evaporation. In other words, it is a non-perturbative phenomenon, that could not be predicted in Hawking's perturbative

scheme. Notice that in this picture Hawking radiation plays a sub-leading role, much like a dissipative effect. It is there and affects the evolution of the black hole, but it is not the principal cause of the black hole's finite life. This scenario shares with non-singular black holes the key point of a regular centre, with no singularity, and associated later purification of the Hawking radiation once the event horizon has disappeared. However, while in the non-singular black hole picture it is the Hawking radiation that makes the horizon evaporate completely, in this alternative picture it is the non-perturbative quantum tunnelling that intervenes before and makes the black hole explode. The other crucial difference between the two scenarios is that in the non-singular black hole, strong quantum gravity effects are only invoked near the centre of the black hole. In the exploding black hole instead, the outside observer sees strong quantum gravity effects at the horizon scale.

The idea can be tested in principle with any approach to quantum gravity that is sufficiently developed to tackle this issue. Loop quantum gravity has reached this level, and in the past year we have worked in a collaboration led by Rovelli [11] to set up the ground for the calculation. To understand how this 'bounce' could be possible, it is necessary to know some simple details about loop quantum gravity. In this description of quantum gravity, the very fabric of spacetime is made by a collection of 'atoms of space', much like my desk is made out of atoms. Such atoms of space would have the dizzyingly small size of $10^{-35}m$, and would thus be impossible to see at large, macroscopic scales: their collective behaviour is indistinguishable from the continuous, smooth spacetime of general relativity and quantum field theory. Only when the matter density reaches Planckian values, it is possible to start interacting with the individual atoms of space. The calculation we have set up shows that at Planckian energy densities, there is a transfer of energy from the in-falling matter to the atoms of space. The latter, previously quietly sitting in a coherent state describing a smooth black hole geometry, absorbs enough energy to tunnel into a new configuration, where they settle down into a coherent state describing the white hole. Energy is exchanged back to the matter, and the classical evolution under the white hole metric is restored. The tricky point is to compute the actual probability amplitude for this phenomenon, and because of the complexity of our formula, we still do not know the answer. Nonetheless, we can already advance a few interpretations of the outcome.

Assuming for simplicity spherical symmetry and time-reversal symmetry, the lifetime can depend only on the mass M of the black hole, and can be a priori any function. However, there are strict bounds that can be derived from theory and experiments. Lifetimes proportional to M or $M \log M$ for instance, are incompatible with observations: astrophysical black holes of solar masses would undergo tunnelling in a matter of seconds, contrarily to their observed stability. If the loop quantum gravity calculation predicts a lifetime that is too short, the mechanism can be ruled out. On the other hand, lifetimes proportional to M^3 or longer would mean that the black hole would evaporate under Hawking radiation before tunnelling, making the phenomenon not relevant, and switching interest back to non-singular black holes. Hence, the only interesting outcomes would be lifetimes of order M^2 . Reintroducing physical units, this means

$$\tau \sim \sqrt{\frac{G^3}{\hbar c^7}} M^2. \quad (5)$$

Notice that the effect depends on the inverse square root of \hbar , which indicates that this cannot be a perturbative phenomenon, as expected.

The most interesting aspect of this possibility is that it opens a new window for quantum gravity phenomenology: If the black hole tunnelling hypothesis is true, black holes would actually be exploding, and such explosions could well be observable in telescopes! The reader should appreciate the fact that quantum gravity effects are expected to be so tiny to be virtually invisible. For instance, we know that Newton's law is modified at small scales by graviton loops, much like Coulomb's law. However, while the modifications to Coulomb's law occur at scales of order $10^{-15}m$, and have been abundantly tested to high precision, the modifications to Newton's law occur at the ridiculously small scales of $10^{-35}m$, to be compared with the smallest scales accessible today, $10^{-18}m$. The difference, $10^{-17}m$, is like saying that we are trying to identify the position of Rome using a ruler the size of the galaxy! Most tests lie similarly well outside the experimental domain, thus making quantum gravity typically a purely theoretical and mathematical quest. On the other hand, a lifetime proportional to M^2 implies that primordial black holes of lunar-size mass could be exploding today and yield observable signals [8]. A component of the expected resulting signal is tantalisingly similar to the recently observed Fast Radio Bursts [13], and this intriguing possibility has been presented also to the general public [14]. Tunnelling of black holes could therefore be a testable quantum gravity prediction, and we are looking forward into developing it forward in future research.

References

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cygnus_X-1
- [2] Black-hole analogue works like a laser, *Physics World*, Oct 15, 2014 [<http://physicsworld.com/cws/article/news/2014/oct/15/black-hole-analogue-works-like-a-laser>]
- [3] C. Rovelli, *Quantum gravity*, Cambridge University Press 2004
- [4] S. A. Hayward, Formation and evaporation of regular black holes, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 31103 [[gr-qc/0506126](#)].
- [5] V. P. Frolov, Information loss problem and a 'black hole' model with a closed apparent horizon, *arXiv* (2014) [[1402.5446](#)].
- [6] H. M. Haggard and C. Rovelli, "Quantum-gravity effects outside the horizon spark black to white hole tunneling," *Phys. Rev. D* **92**, n°. 10, 104020 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.104020 [[arXiv:1407.0989](#) [[gr-qc](#)]].
- [7] C. Rovelli and F. Vidotto, "Planck stars," *Int. J. Mod. Phys. D* **23** (2014) n°.12, 1442026 doi:10.1142/S0218271814420267 [[arXiv:1401.6562](#) [[gr-qc](#)]].
- [8] A. Barrau and C. Rovelli, "Planck star phenomenology," *Phys. Lett. B* **739**, 405 (2014) [[arXiv:1404.5821](#) [[gr-qc](#)]].
- [9] T. De Lorenzo, C. Pacilio, C. Rovelli and S. Speziale, *Gen. Rel. Grav.* **47** (2015) n°.4, 41 [[arXiv:1412.6015](#) [[gr-qc](#)]].

- [10] T. De Lorenzo, A. Giusti and S. Speziale, "Non-singular rotating black hole with a time delay in the center," *Gen. Rel. Grav.* **48** (2016) n°3, 31 [arXiv:1510.08828 [gr-qc]].
- [11] M. Christodoulou, C. Rovelli, S. Speziale and I. Vilenky, "Realistic Observable in Background-Free Quantum Gravity: the Planck-Star Tunnelling-Time," *Phys.Rev. D* 94 (2016) n°8, 084035 [arXiv:1605.05268 [gr-qc]].
- [12] Big Bang et gravitation quantique, Pour la science, avril-juin 2014 [<http://www.pourlascience.fr/ewb/pages/a/article-big-bang-et-gravitation-quantique-32826.php>]
- [13] Keane E. et al. *Nature* **530**, 453-456 (25 February 2016).
- [14] Les sursauts radio rapides: des explosions d'étoiles de Planck?, Futura sciences 2015, janvier 2015 [<http://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/trou-noir-sursauts-radio-rapides-explosions-etoiles-planck-56875>]

Quatrième partie

Une nouvelle révolution
scientifique à l'horizon ?

Quatrième partie

Une nouvelle révolution scientifique à l'horizon ?

Présentation

Sur les formes scintillantes
Sur les cloches des couleurs
Sur la vérité physique
J'écris ton nom
Liberté
(Paul Eluard)

La quatrième partie de l'ouvrage s'intitule « Une nouvelle révolution scientifique à l'horizon ? ». À partir des contributions d'Alain Aspect, Françoise Balibar, Claude et Gilles Cohen-Tannoudji, et Dominique Lambert, est mise en débat l'hypothèse d'une nouvelle révolution scientifique se situant dans le prolongement de celle qui s'est ouverte au tournant du XX^e siècle avec la relativité et la *quantique* (terme proposé par Françoise Balibar et Jean-Marc Lévy-Leblond pour désigner la physique quantique).

I. Les révolutions scientifiques selon Kuhn

Le thème de ce débat avait été suggéré initialement par un article de Weinberg, paru d'abord dans le *New York Review of Books*, et qui avait été repris, en français, dans *La Recherche*, dans lequel il critiquait le point de vue de Thomas Kuhn à propos des révolutions scientifiques. Kuhn est un philosophe des sciences plutôt inspiré par la sociologie. Dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques¹, il établit une très forte

(1) Thomas S. Kuhn, *La Structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, coll. Champs, 1983

analogie entre les révolutions sociales ou politiques et les révolutions scientifiques. Le concept sur lequel il s'appuie pour cette analogie est celui de *paradigme*. Pour lui, un paradigme est un corpus théorique autour duquel se constitue une communauté de chercheurs active pendant une période de science dite normale qui, éventuellement se termine par une période de crise. La sortie de cette crise est une révolution scientifique qui se caractérise par un changement de paradigme. Pour lui, dans une révolution scientifique, le paradigme nouveau est complètement incommensurable avec le paradigme ancien. Et ceci est quelque chose qui est complètement refusé par Weinberg : en effet pour lui, qui a pratiqué la recherche pendant une quarantaine d'années marquées par des développements importants, il n'a jamais rencontré de paradigme nouveau qui devienne incommensurable avec l'ancien. D'autre part Weinberg critique aussi la notion de science normale car d'après lui pendant la période dite normale il se passe beaucoup d'avancées spectaculaires.

2. Paradigme, modèle standard, palier des connaissances

Le concept de paradigme n'est pas, à notre avis, suffisant pour apprécier l'évolution de la connaissance scientifique sur une longue période, et éventuellement la qualifier de révolutionnaire. Un autre concept apparu au cours des cinquante à soixante dernières années, celui de modèle standard nous paraît utile, voire nécessaire. Le terme standard, contrairement à l'utilisation qui en est faite par les mathématiciens pour qui les mathématiques standards sont les mathématiques banales, renvoie plutôt au français *étendard*, qui est sa véritable étymologie : en fait, le modèle standard est une modélisation qui s'appuie sur un cadre théorique de référence pouvant concerner un grand nombre de disciplines scientifiques, et dont on peut penser qu'au cours de son évolution historique il ne sera plus complètement invalidé, mais seulement, éventuellement, élargi ou englobé dans un cadre plus large dont il constituerait une sorte d'approximation. Dire que le modèle standard ne sera plus jamais complètement invalidé ne veut pas dire qu'il ne pourra pas évoluer : dans l'expression modèle standard il y a le mot modèle que l'on peut associer à celui que l'on voit apparaître dans l'expression de pâte à modeler, qui veut dire que ce modèle comporte une certaine part de plasticité.

La théorie de la relativité, la théorie quantique des champs et la statistique quantique constituent le cadre théorique de référence d'un *palier des connaissances* comportant les modèles standards de la cosmologie et de la physique des particules qui ont atteint un haut niveau de robustesse, ainsi que l'ensemble des modélisations et algorithmes de simulation en physique des phénomènes émergents. Malgré les tensions de leur mise en relation, les deux modèles standards et la physique de l'émergence semblent actuellement converger vers une sorte de complémentarité généralisée, une consolidation au sein d'un nouveau palier des connaissances, ce qui laisse présager des développements extrêmement importants et peut-être une nouvelle révolution scientifique.

3. Révolution ou évolution ?

Le terme de révolution, pour qualifier tel ou tel changement intervenant dans les sciences, est, en effet, de fait souvent employé par les chercheurs même qui en sont les acteurs. Les célèbres articles d'Aspect, Grangier, Dalibard et Roger (*Phys. Rev. Letters*, 49, 91 et 49, 1804, 1982) qui ont fait l'objet du chapitre 7, présentent les résultats d'expériences qui, en quelque sorte, réalisent l'expérience de pensée EPRB, résultats qui s'avèrent en parfait accord avec les prédictions de la quantique et qui violent les inégalités de Bell. Ces articles marquent le début d'un renouveau de l'interprétation de la physique qui fait jouer un rôle crucial à la notion d'intrication quantique. À propos de ce renouveau, Alain Aspect évoque, dans le chapitre 14 une « seconde révolution quantique ». Il cite ainsi R. Feynman, qui dans un article de 1982, reconnaît le caractère propre (par rapport à la dualité onde-particule) et scientifiquement fécond de l'intrication et introduit du même coup la notion de simulation *quantique*. Il voit dans ce renouveau un exemple d'un phénomène, d'une mutation pourrait-on dire, affectant la vie d'une théorie scientifique : *la prise de conscience*, par un chercheur, puis par l'ensemble de la communauté, *d'un trait de la théorie resté jusque-là inaperçu ou sous-estimé*. La théorie, ses fondements et son formalisme, *restent inchangés*, les résultats des expériences passées ne sont pas remis en cause : si le terme de révolution peut encore être utilisé, du moins qualifiera-t-on cette révolution de « modeste ». Mais apparaissent bien de nouvelles conséquences à tester expérimentalement, de nouvelles interprétations possibles, de nouveaux concepts.

De même Claude Cohen-Tannoudji, qui dans son témoignage à propos des extraordinaires développements dont il a été le témoin et souvent un acteur majeur souhaite que l'on préfère parler d'évolution plutôt que de révolution, ne peut s'empêcher de qualifier de révolutionnaires les développements induits par les nouvelles sources de lumière (les lasers) qui se sont imposées d'abord dans les laboratoires de recherche puis dans l'ensemble des technologies. Il souligne ainsi sur cet exemple le cycle recherche fondamentale (lois de l'interaction matière rayonnement), avancées technologiques ouvertes (pompage optique, masers, lasers...), retour à la recherche fondamentale par les mesures, expériences et questions devenues abordables par ces nouvelles technologies. Sa connaissance de toute cette histoire permet à Claude Cohen-Tannoudji de rappeler combien la durée et les résultats de ces cycles peuvent être imprévisibles (d'où le pari qu'il faut nécessairement faire sur la recherche fondamentale) et d'essayer aussi de cerner quelles sont les *conditions qui peuvent en favoriser l'émergence et le développement*. L'évolution scientifique a en effet besoin d'un terrain stimulant, dont une des composantes essentielles est l'existence d'*enseignements de haut niveau et novateurs* et d'échanges constants. Claude Cohen-Tannoudji garde ainsi en mémoire l'inexistence, au début des années 1950, de tout enseignement sur la physique quantique dans les institutions universitaires classiques ; il met en avant, à contrario, le rôle majeur joué à la même époque par quelques enseignements parallèles initiés par certains laboratoires, tel celui du professeur A. Kastler, et certains scientifiques étrangers tel N. Ramsey.

Le chapitre 15 du présent ouvrage est consacré à l'événement qu'a représenté la sortie du tome III de *Mécanique quantique*, l'ouvrage de référence écrit par Claude Cohen-Tannoudji et ses collègues Bernard Diu et Franck Laloë, qui, de par le monde, a servi à la formation de générations d'étudiants et de jeunes chercheurs. Le fait que la mise à jour représentée

par ce tome III fasse plus de sept cents pages montre bien que tous les nouveaux développements qui y sont expliqués vont au-delà de simples péripéties et pourraient bien mériter d'être qualifiés de révolutionnaires.

Tout en rappelant à nouveau le caractère plein de surprise de l'évolution scientifique, Claude Cohen-Tannoudji évoque enfin le tableau des avancées qu'il pressent dans un avenir plus ou moins proche, par exemple sur le problème du saut quantique lors de la mesure, sur celui de la décohérence, sur l'information quantique et son exploitation par les ordinateurs, ainsi que sur l'utilisation des états intriqués dans l'amélioration de la précision des mesures, en particulier celle du temps, comme le montre le bel exposé de Christophe Salomon qui fait l'objet du chapitre 16².

Pour Dominique Lambert (chapitre 17), le concept de révolution cache, selon lui, toute une gamme d'interprétations différentes. Ce concept pourrait s'apprécier du point de vue du cadre théorique d'abord, ou alors du point de vue des pratiques expérimentales ou opérationnelles, ou enfin à propos de grandes idées dans un cadre plus sémantique. Il envisage six manières d'introduire le concept de révolution scientifique. Ainsi, pour le citer :

- Une première façon d'utiliser le concept de révolution scientifique serait à propos de l'introduction d'un *cadre conceptuel nouveau* permettant de décrire des aspects qui jusque-là n'étaient pas descriptibles.
- Une autre façon d'utiliser le terme de révolution scientifique pourrait être non pas l'introduction d'un cadre conceptuel nouveau mais plutôt l'idée du *transfert de concepts* d'une discipline à une autre (utilisation d'aspects algorithmiques en biologie ou, réciproquement, du transfert de concepts biologiques en algorithmique...).
- Une troisième caractérisation possible des révolutions scientifiques serait la possibilité de *connecter des domaines* qu'il était auparavant inimaginable de pouvoir connecter (l'exemple de Georges Lemaître : connecter le domaine des observations et celui de la relativité générale, et ainsi, de pouvoir envisager un modèle d'univers en expansion).
- Quatrième facette du concept de révolution scientifique, ce pourrait être le *changement de point de vue* ou la réorganisation d'un domaine liée à un changement de perspective. En mathématique par exemple, la révolution Bourbaki est liée à l'adoption du point de vue des structures ou des catégories.
- Cinquième facette, c'est du point de vue expérimental ou observationnel, l'introduction de données qui permettent de poser des questions nouvelles ou de valider des théories. C'est pourquoi, les expériences *cruciales* peuvent jouer un rôle déterminant.
- Un sixième et dernier point, serait l'idée de révolution dans le cadre de *grandes idées* : de nouvelles interprétations, de nouvelles sémantiques, de nouvelles métaphores, voire de nouvelles ontologies.

(2) Voir le chapitre 16, La mesure du temps au XXI^e siècle.

Tous ces points conduisent D. Lambert à conclure qu'il n'est peut-être pas légitime de parler de révolution ; pour lui, ce terme qui vient surtout du travail de Kuhn fait surtout penser à une rupture alors que si l'on considère l'histoire de la physique ou d'autres sciences, on est plutôt en présence d'une évolution ou dans un modèle de *transgression conservative* ou d'inventivité sur le fond de quelque chose qui est conservé du passé. Il serait donc faux de parler d'incommensurabilité entre la mécanique quantique et la mécanique classique. Les théories nouvelles s'appuient sur les anciennes avec l'introduction de concepts novateurs qui permettent de comprendre les concepts de la théorie ancienne d'une façon nouvelle. La révolution apparaît donc plutôt comme une évolution allant vers une *métamorphose inventive*.

4. D'autres analogies possibles pour les révolutions scientifiques

Mais si la dynamique des connaissances scientifiques ne peut être rapprochée utilement de celle des organisations sociales, peut-être faut-il penser à la rapprocher d'une autre dynamique, celle des espèces vivantes. Autrement dit, peut-on, pour comprendre l'évolution scientifique, s'inspirer des théories rendant compte de l'évolution biologique. Cette proposition, évoquée par Françoise Balibar lors de la table ronde suite à l'intervention d'Alain Aspect, va ouvrir une riche discussion. Ainsi, à l'appui de sa proposition, Françoise Balibar souligne qu'à son avis, la dynamique scientifique est plus « poussée » par son histoire passée, son acquis et les éventuelles contradictions ou *incompatibilités* rencontrées, que « tirée » par une réalité, la réalité intrinsèque du monde physique qui serait cernée avec de plus en plus de profondeur et de précision, lors de la recherche de la « Vérité ». Cette thèse (de l'analogie avec l'évolution biologique) se voit objecter que dans l'évolution scientifique, il est légitime de parler de *progrès*, ce qui semble plus discutabile concernant l'évolution des systèmes vivants : on en sait plus qu'hier, par exemple sur les ondes gravitationnelles, et moins que demain. On ne peut contester l'existence d'une *accumulation* des connaissances, d'une profondeur de plus en plus grande dans la compréhension du monde. Et cette accumulation, ce progrès objective selon plusieurs intervenants l'existence d'une Vérité³ qui tirerait l'ensemble du processus dans une direction unique ; ainsi a-t-on pu entendre que si Einstein n'avait pas vu le jour, il y en aurait eu un autre et *la Physique d'aujourd'hui serait la même*.

Le débat rappelle celui concernant les mathématiques et leur « déraisonnable efficacité ». Entre une vision platonicienne des objets mathématiques, qui seraient le reflet des propriétés intrinsèques du monde physique, et une vision plus pragmatique, qui en fait de simples produits du cerveau humain, adaptés à leur fonction. Ce débat rebondit dans la discussion générale en fin de table ronde lorsqu'un intervenant évoque la progression scientifique comme une *adaptation* aux contraintes imposées par le monde extérieur, adaptation efficace certes mais qui ne serait pas nécessairement la seule possible. Autrement dit d'autres concepts scientifiques, produits d'une histoire différente, auraient pu montrer la même efficacité. Ici encore l'objection est vite formulée, notamment par Dominique

(3) À ce propos, Gilles Cohen-Tannoudji a fait remarquer que c'est aussi sur la vérité physique que Paul Eluard écrit le nom de la liberté.

Lambert dans le chapitre 17, en citant les théories de jauge dans la compréhension des interactions en physique quantique des champs : l'efficacité des théories mathématiques du monde physique va au-delà de celle de simples modèles « ad hoc », modèles empiriques décrivant par exemple telle ou telle corrélation. Selon lui ces théories révèlent *en profondeur* la nature et le fonctionnement d'un tel monde.

5. Révolutions scientifiques, ruptures technologiques et mutations anthropologiques

Du point de vue de l'impact sociétal des révolutions scientifiques, il est, nous semble-t-il, nécessaire de considérer avec les bouleversements conceptuels et les ruptures technologiques un troisième volet, celui des mutations anthropologiques. Ces trois volets ont été présents dans les deux révolutions scientifiques qui ont précédé la révolution en cours, savoir :

- Celle qui a permis la naissance de la science moderne au XVII^e siècle, qui a inspiré le siècle des lumières, et qui s'est épanouie dans l'apogée de la physique classique au tournant du XX^e siècle.
- Celle du XX^e siècle, qui, à partir des bouleversements conceptuels de la quantique et de la relativité, a débouché sur les grandes ruptures technologiques du nucléaire, de l'électronique, du spatial et du numérique, et culmine dans le nouveau palier, que nous venons de décrire.

Mais dans la première, ces trois volets sont très décalés dans le temps : la rupture technologique qu'a été l'invention de l'imprimerie et la mutation anthropologique (le siècle des Lumières) qui l'a accompagnée se sont produites bien avant que cette première révolution scientifique ne soit achevée.

Les grandes ruptures technologiques du XX^e siècle, qui sont des conséquences de la révolution quantique, provoquent la mutation anthropologique du numérique aujourd'hui. Dans la révolution scientifique qui s'engage, nous ne pouvons pas encore le savoir, mais nous pouvons anticiper que les trois volets seront presque concomitants, voire... intriqués⁴.

Michel Serres, membre de l'Académie française, devait participer au débat sur l'hypothèse d'une nouvelle révolution scientifique, mais il en a malheureusement été empêché. Nous avons tenu à consacrer le chapitre 18 à son célèbre discours *Petite Poucette*, prononcé en séance solennelle de l'Académie française le 1^{er} mars 2011, dans lequel il évoque la mutation du numérique.

Le comité de lecture de l'AEIS⁵

(4) Gilles Cohen-Tannoudji et Michel Spiro *Relativité et quanta : une nouvelle révolution scientifique...* p. 108, Le Pommier, Paris 2017.

(5) Gilles Cohen-Tannoudji et Jean-Pierre Treuil

14

From Einstein, Bohr, Schrödinger to Bell and Feynman: a New Quantum Revolution?

Alain Aspect

Institut d'Optique, 2 avenue Augustin Fresnel 91120 Palaiseau cedex, France

Abstract

In 1935, the Einstein-Podolsky-Rosen paper introduced a new kind of two-particles quantum state, which was named '*entangled*' by Schrödinger. Showing that measurements on both particles were strongly correlated even if the particles were widely separated, Einstein argued that the formalism did not describe all the elements of the physical reality, and he concluded that Quantum Mechanics was not complete. Bohr immediately opposed this reasoning, claiming that Quantum Mechanics was consistent as it was, and that it did not need to be completed, and even that it should not be completed. The discussion between Einstein and Bohr lasted until the death of the two giants, leaving the question unsettled. It was considered by most of the physicists only as an epistemological debate, holding on questions of interpretation, but without any practical consequence on how to use Quantum Mechanics. The situation changed in 1964, when Bell discovered that taking Einstein's point of view led to consequences in contradiction with the predictions of Quantum Mechanics in some (rare) situations. The debate was then displaced from the realm of epistemology to the one of physics, since it could be settled by experiments. After a series of experiments closer and closer to the ideal Gedankenexperiment, more and more physicists realized that entanglement was definitely weirder than any previous concept, and that it might be used for new ways of processing and transmitting information. This prompted the development of a new field, quantum information, which brings us into a new quantum age, and may change our society as dramatically as the first quantum revolution, which gave us integrated circuits and lasers, responsible for the development of the information and communication society.

Foreword

This chapter is reprinted verbatim from a contribution of the same author with the same title, published in the book Niels Bohr, 1913-2013: Poincaré Seminar 2013, O. Darrigol, B. Duplantier, JM Raimond, V Rivasseau eds., Springer International Publishing (2013).

I. The first quantum revolution: from concepts to technology

Five years after the introduction by M. Planck of the quantization of energy exchanges between light and matter [1], A. Einstein took a major step further in 1905, by proposing the quantization of light itself in order to understand the photoelectric effect [2]. It took a decade for this revolutionary hypothesis to be accepted, after R. A. Millikan found experimental evidences in favor of Einstein's hypothesis [3], while Bohr's 1913 model of the atom [4, 5, 6] gave for the first time a quantitative description of the stability of atoms, and used the relation $\hbar\omega_{ij} = E_i - E_j$ to describe emission or absorption of light by atoms.

It took another decade to establish a comprehensive paradigm of Quantum Mechanics, centered about the 1925 formalisms of Heisenberg on the one hand, and Schrödinger on the other. The latter was a wave equation for matter, completing a beautiful duality: like light, matter can behave as either a particle or a wave, elaborating on the original idea of L. de Broglie, while the former relied on the mathematics of matrices. The two formalisms were demonstrated equivalent by Dirac. The success of this formalism was enormous. It became possible to understand mechanical, optical, electrical and thermal properties of matter. In the following decades, Quantum Mechanics allowed physicists to describe particle physics, and to understand amazing properties of matter such as superconductivity or superfluidity. Studies in light-matter interaction were refined by orders of magnitudes, fitting perfectly within the quantum mechanical framework, which had been refined to be applied both in the elementary phenomenon (Quantum Electrodynamics) as well as in complex situations encountered in condensed matter. But in the early 1950's, Quantum Mechanics still appeared as a game to be played by physicists only for the sake of progress in knowledge, without any impact on everyday life.

Half a century later, the applications of quantum physics are all around us in electronics and photonics. The transistor was invented in 1948 by solid-state physicists, after fundamental reflections about the quantum nature of electrical conduction. This invention and its descendants, micro-fabricated integrated circuits, had a monumental impact. Like the steam engine over a century earlier, the transistor changed our lives and gave birth to a new era, the information age. The second technological progeny of Quantum Mechanics is the laser, developed in the late 1950's. Some of its applications are obvious in every day life: bar code readers, CD recorders and players, medical tools, etc. Less visible but perhaps more important is the use of laser light in telecommunications, where it dramatically boosts the flow of information: terabits (millions of millions of information units) per second can be transmitted across the oceans through a single optical fiber.

Meanwhile, basic research on atom-photon interactions has continued to develop, leading to applications. For example, in 1997 a Nobel Prize was awarded to S. Chu, C. Cohen-Tannoudji, and W. D. Phillips, for the development of methods for cooling and trapping of atoms with lasers. Cold atoms are now used in a new generation of gravimeters, based on atom interferometry, which allow us to explore the underground. Another spectacular application is cold atomic clocks, whose accuracy is now better than 10^{-17} (a few seconds error in the age of the universe!). Better clocks will improve the accuracy of the global positioning system (GPS), as well as fast information transfer. Coming full circle, these improved clocks and gravimeters can be applied to fundamental questions, such as tests of general relativity, or the search for slow variation of fundamental physical constants. The first quantum revolution, with its interplay between basic questions and applications, is still at work.

2. The Einstein-Bohr debate

2.1 The first Bohr-Einstein debate: single particle Quantum Mechanics

Quantum mechanics was constructed at the price of several radical and sometimes painful revisions of classical concepts. For instance, to take into account particle-wave duality, Quantum Mechanics had to renounce the idea of a classical trajectory, as stated by the celebrated Heisenberg inequalities. One can also illustrate this renunciation of classical trajectories by remarking that in an interference experiment the particle “follows many paths at once.” Such renunciations were so radical that several, including Einstein and de Broglie, could not admit their inevitability, and differed with Bohr who had carved the Rosetta stone of interpretation of the new theory under the name of “Copenhagen interpretation”, which was based on the complementarity principle. Einstein did not challenge the formalism and its provisions directly, but seemed to think that the renunciations put forward by Bohr could only signify the incompleteness of the quantum formalism. This position led to Homeric debates in the Solvay congress of 1927 and 1930, when Einstein tried to find an inconsistency in Heisenberg inequalities applied to a single particle, and Bohr each time came with a convincing rebuttal [7].

2.2 The Einstein-Podolsky-Rosen paper [8]

In 1935, Einstein raised a completely different objection. Rather than considering the behavior of a single quantum particle, for which the Heisenberg relations state that the position and the velocity cannot be both perfectly defined, Einstein considered two quantum particles, and he discovered that the quantum formalism allowed this pair to be in a quantum state of the form

$$\begin{aligned}
 \Psi(x_1, x_2) &= \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x_1 - x_2 + x_0)} \\
 &= 2\pi\hbar \delta(x_1 - x_2 + x_0) \\
 &= \int dp e^{\frac{i}{\hbar}px_0} u_p(x_1) u_{-p}(x_2),
 \end{aligned} \tag{1}$$

where $u_p(x_1) = \exp(ipx_1/\hbar)$ describes the particle 1 with a well-defined momentum p , while $u_{-p}(x_2) = \exp(-ipx_2/\hbar)$ describes the particle 2 with a well-defined momentum $-p$.

In such a state, both the momenta of the two particles and their positions are strictly correlated. More precisely, if one measures the position of the first particle and finds x_1 , then the expression of the second line of equation (1) shows that a measurement of the position of particle 2 will yield with certainty the result $x_2 = x_1 + x_0$. Similarly, the third line shows that if one measures the momentum of the first particle and finds p , then a measurement of the momentum of particle 2 will yield with certainty the result $-p$. Since the measurement on the first particle cannot affect the far away second particle, EPR argued, the second particle had already a well-defined position and momentum before any measurement was performed on it. Such a possibility is not envisaged by the standard interpretation of the formalism, for which a measurement of position or momentum on particle 2 can give a priori any result (permitted by equation (1)). EPR concluded that the formalism of Quantum Mechanics is thus incomplete. Moreover, they added, the position and the momentum of the second particle are perfectly defined simultaneously, in contradiction with the Heisenberg uncertainty relation.

2.3 Schrödinger's reaction [9]

The reasoning was published in March 1935. As early as August of the same year, Schrödinger sent a paper to the Cambridge Philosophical Society. In his paper, which was communicated by Born, Schrödinger elaborated on the properties of the states of the kind proposed by EPR, which he named “*entangled*” to emphasize the fact that in such a state, describing two systems that have interacted before separating, the two separated systems “can no longer be described in the same way as before, viz. by endowing each of them with a representative of its own” (i.e. one cannot factorize the wave-function of the whole system as a product of wave functions describing each system separately). He then formulated in his own way the argument of EPR, calling its conclusion ‘a paradox’.¹ And he made it clear that “[his] paper does not aim at a solution of the paradox, it rather adds to it, if possible”. In conclusion, he pointed out the role of the timing in the ‘paradox’: “The paradox would be shaken, though, if an observation did not relate to a definite moment. But this would make the present interpretation of Quantum Mechanics meaningless, because ... the objects of its predictions are considered to be the results of measurements for definite moments of time.” We will see later that indeed the contradiction, between Quantum Mechanics and the intuitive concept of physical reality advocated by Einstein, happens for measurements that are space-like separated, a situation possible only because measurements are done at a well-defined position and time.

(1) It seems that it is Schrödinger who introduced first the term ‘paradox’, a word not employed by EPR.

2.4 Bohr's rebuttal [10]

According to witness, Bohr was shattered by the EPR paper. His reaction has been described by his grandson:²

"When the EPR paper was published, Niels Bohr was working with Leon Rosenfeld on the problem of the measurability of electric and magnetic fields in Quantum Mechanics. Rosenfeld told the story as follows:

This onslaught came down upon us as a bolt from the blue. Its effect on Bohr was remarkable. ... As soon as Bohr had heard my report of Einstein's argument, everything else was abandoned: we had to clear up such a misunderstanding at once. We should reply by taking up the same example and showing the right way to speak about it. In great excitement, Bohr immediately started dictating to me the outline of such a reply. Very soon, however, he became hesitant: "No, this won't do, we must try all over again ... we must make it quite clear ..." ... Eventually, he broke off with the familiar remark that he "must sleep on it". The next morning he at once took up the dictation again, and I was struck by a change of the tone in the sentences: there was no trace in them of the previous day's sharp expressions of dissent. As I pointed out to him that he seemed to take a milder view of the case, he smiled: "That's a sign", he said, "that we are beginning to understand the problem." Bohr's reply was that yes, nature is actually so strange. The quantum predictions are beautifully consistent, but we have to be very careful with what we call 'physical reality'."

The reply of Bohr [10] was published after no more than four months, in *Physical Review*, with the same title as the EPR paper: "Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?". In contrast with Schrödinger, Bohr refuted the reasoning of EPR, on the basis of the notion of complementarity. More precisely, after recalling that when one considers one particle one must choose between measuring the position or the momentum of that particle, he emphasizes similarly that in the EPR situation one has to choose the observable one wants to measure on the first EPR particle, and it is only the value of that observable that can be known with certainty for the second particle.

Actually, Bohr's reply to EPR was for him an opportunity for many statements, with carefully chosen wording, about the specificity of the quantum mechanical description of the world, by comparison with the classical description. Here are a few excerpts of [10]:

- The apparent contradiction in fact discloses only an essential inadequacy of the customary viewpoint of natural philosophy for a rational account of physical phenomena of the type with which we are concerned in quantum mechanics.

(2) Tomas Bohr, speech at the Carlsberg Academy for the Niels Bohr Gold Medal 2013 Ceremony.

- Indeed the finite interaction between object and measuring agencies conditioned by the very existence of the quantum of action entails – because of the impossibility of controlling the reaction of the object on the measuring instruments if these are to serve their purpose – the necessity of a final renunciation of the classical ideal of causality and a radical revision of our attitude towards the problem of physical reality.

- In the phenomena concerned we are not dealing with an incomplete description characterized by the arbitrary picking out of different elements of physical reality at the cost of sacrificing other such elements, but with a rational discrimination between essentially different experimental arrangements and procedures which are suited either for an unambiguous use of the idea of space location, or for a legitimate application of the conservation theorem of momentum.

- Any comparison between Quantum Mechanics and ordinary statistical mechanics, however useful it may be for the formal presentation of the theory, is essentially irrelevant. Indeed we have in each experimental arrangement suited for the study of proper quantum phenomena not merely to do with an ignorance of the value of certain physical quantities, but with the impossibility of defining these quantities in an unambiguous way.

- From our point of view we now see that the wording of the above-mentioned criterion of physical reality proposed by Einstein, Podolsky and Rosen contains an ambiguity as regards the meaning of the expression “without in any way disturbing a system.” Of course, there is in a case like that just considered no question of a mechanical disturbance of the system under investigation during the last critical stage of the measuring procedure. But even at this stage there is essentially the question of an influence on the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behavior of the system. Since these conditions constitute an inherent element of the description of any phenomenon to which the term “physical reality” can be properly attached, we see that the argumentation of the mentioned authors does not justify their conclusion that quantum-mechanical description is essentially incomplete. On the contrary this description, as appears from the preceding discussion, may be characterized as a rational utilization of all possibilities of unambiguous interpretation of measurements, compatible with the finite and uncontrollable interaction between the objects and the measuring instruments in the field of quantum theory. In fact, it is only the mutual exclusion of any two experimental procedures, permitting the unambiguous definition of complementary physical quantities, which provides room for new physical laws, the coexistence of which might at first sight appear irreconcilable with the basic principles of science. It is just this entirely new situation as regards the description of physical phenomena that the notion of complementarity aims at characterizing.

The last quotation is representative of Bohr’s reply. It is not so much a reply to EPR, than a statement about complementarity being the most important feature of Quantum Mechanics, allowing that theory to render an account of phenomena that were impossible to describe in classical physics.

In contrast to the discussions about the Heisenberg inequalities for a single particle, Bohr's reply is not a technical refutation of Einstein's reasoning, it is rather an elaboration on an epistemological point of view, totally opposed to the one of Einstein. This may be a major reason for the lack of interest shown by most physicists about that debate: why should active physicists bother about such a discussion, if Bohr and Einstein disagreed only about the interpretation of the formalism, but not about the formalism itself? Indeed, Einstein and Bohr did not disagree on the results of the calculation, but on the conclusion to draw about the need or the possibility to complete that formalism.

The discussion between Bohr and Einstein on that subject continued until the end of their lives, without any significant evolution of their positions.

3. Bohm's version of the EPR reasoning

In his excellent book on Quantum Mechanics [11], David Bohm presented a version of the EPR situation that differed significantly from the original one (see also [12]). Indeed, Bohm's scheme is based on spins $1/2$, whose observables are dichotomic, rather than particles moving in space, whose position and momentum are continuous observables. This scheme had far reaching consequences. Firstly, it allows one to give a definitely simpler presentation of the EPR argument. Secondly and yet more important, it allowed Bell to discover his famous inequalities [13]. Actually, as it is now clear, it is only with dichotomic variables that one has Bell's type inequalities that can be tested directly, such as the celebrated CHSH inequalities [14], while continuous variables do not permit such simple tests [15].

3.1 Bohm's Gedankenexperiment with photons

Rather than considering spin $1/2$ particles, whose spin components are measured with Stern-Gerlach analyzers, we consider an equivalent scheme with photons, whose polarizations are measured with linear polarization analyzers. The situations are equivalent since in both cases we have dichotomic observables, whose measurement can give only two possible results: parallel or perpendicular to the polarization analyzer orientation in the case of a photon; aligned or anti-aligned with the SternGerlach analyzer orientation in the case of spin $1/2$.

The optical variant of the Bohm's version of the E.P.R. Gedankenexperiment is shown on figure 1. A source S emits a pair of photons (ν_1, ν_2) with different frequencies, counterpropagating along Oz . Suppose that the polarization part of the state vector describing the pair is:

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x, x\rangle + |y, y\rangle\} \quad (2)$$

where $|x\rangle$ and $|y\rangle$ are linear polarizations states. This state is remarkable: it cannot be factorized into a product of two states associated to each photon, so we cannot ascribe

any well-defined polarization state to each individual photon. Such a state describing a system of several objects in a situation that can only be described globally, is an entangled state. Moreover, we notice that the state (2) is rotationally invariant, and can be written as

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x', x'\rangle + |y', y'\rangle\}, \quad (3)$$

where the x' and y' axes are any set of orthogonal axes, perpendicular to the z -axis. We can perform linear polarization measurements on each of the two photons, with analyzers I and II. The analyzer I, in orientation \mathbf{a} , is followed by two detectors, giving results $+$ or $-$, corresponding to a linear polarization found parallel or perpendicular to \mathbf{a} . The analyzer II, in orientation \mathbf{b} , acts similarly. If the direction of analysis is along x , the results $+$ and $-$ are respectively associated with the polarizations $|x\rangle$ and $|y\rangle$ (note the technical difference with spin $1/2$ measurements, where the two 'orthogonal' results associated with a measurement along x correspond to two components along x and $-x$).

3.2 EPR reasoning with photons

We can repeat the EPR reasoning, using the state (2). We consider first a linear polarization measurement on photon ν_1 , along the x -axis. If we find $+$, which is the result associated with $|x\rangle$, we are sure that a measurement on ν_2 along the same direction would also give $+$, and similarly for results $-$ associated with $|y\rangle$. Measuring ν_1 along x allows us to predict with certainty what we would obtain for a similar measurement on ν_2 .

Let us now consider measurements along x' . Since the state $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$ can be written as in equation (3), it is clear that if a measurement on ν_1 yields $+$, which is the result associated with $|x'\rangle$, then a similar measurement on ν_2 along x' would also give $+$, and similarly for results $-$ associated with $|y'\rangle$. Measuring ν_1 along x' also allows us to predict with certainty what we would obtain for a similar measurement on ν_2 .

Since the measurement on the first photon cannot affect the far away second photon, EPR would argue, the second photon had already well-defined components of polarizations along x and along x' , before any measurements was performed on it. Such a statement is in contradiction with the fact that in the state $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$ a measurement on photon ν_2 can give results $+$ or $-$ with equal probabilities. One can then conclude that the formalism of Quantum Mechanics is not complete.

Moreover, EPR would add, the values of the polarization of ν_2 are well-defined simultaneously along x and x' , although the corresponding observables do not commute (if the two axes are neither parallel nor orthogonal). This is in contradiction with the Heisenberg uncertainty relations.

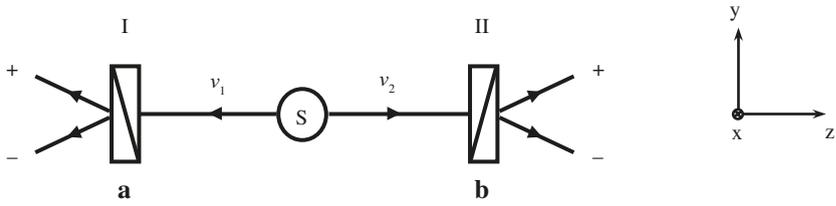


Figure 1. Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment with photons. The two photons v_1 and v_2 , emitted in the state of equation (2), are analyzed by linear polarizers in orientations defined by unit vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} perpendicular to the z -axis. Each photon is eventually detected either in the output channel + or in the output channel - of the polarizer where it enters. One can measure the probabilities of single or joint detections in the output channels of the polarizers.

3.3 Discussion

Reasoning on the Bohm's version of the EPR Gedankenexperiment allows us to emphasize a point that was already implicitly present in the original EPR paper, but not as clearly. There is no need to consider two non commuting observables on one of the particles, to conclude that Quantum Mechanics must be completed, since it does not render an account of all the 'elements of the physical reality'. Let us recall the EPR definition of 'elements of the physical reality': "If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity." According to EPR, a measurement on v_1 cannot disturb v_2 , which is far away (implicitly space-like separated), and nevertheless we can infer with certainty the result of a measurement on v_2 along x , if we do it. So there is a corresponding element of reality, which is not present in the state (2), which does not predict a precise value for the measurement on v_2 .

The fact that such a reasoning can be repeated for another direction of analysis, associated with a non commuting observable, is a supplementary element, which was not necessary to conclude to the incompleteness of Quantum Mechanics. But this fact will play a crucial role in the violation of Bell's inequalities by quantum predictions, and this is why we give now the results of a standard quantum mechanical calculation for polarizers at any orientation.

3.4 Correlations: general case

It is easy to derive the quantum mechanical predictions for the measurements of polarization, single or in coincidence, for polarizers in any orientations \mathbf{a} and \mathbf{b} . For the state of equation (2), a simple calculation yields the probabilities of single detections

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{a}) &= P_-(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \\ P_+(\mathbf{b}) &= P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Each individual polarization measurement gives a random result.

The probabilities of joint detections are easily obtained by projecting the two photon state (2) onto the four state vectors $|\pm_a, \pm_b\rangle$ associated with the four possible joint results (\pm, \pm)

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (5)$$

If we consider the cases where the polarizers I and II are parallel, i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, we have

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

This is in agreement with our reasoning of subsection 3.2: a measurement on v_1 along x can give either the result $+$ or the result $-$, but if one gets $+$ then the measurement on v_2 along the same direction x will give with certainty the result $+$ (the conditional probability is 1). The same reasoning holds for any direction.

A convenient way to measure the amount of correlations between *classical* random quantities, such as the results of measurements by polarizers I or II, is to calculate the *classical* correlation coefficient. For the polarization measurements considered above, whose average values are 0 (see equations (4)), it is defined as

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (7)$$

Using (5), we find a correlation coefficient predicted by Quantum Mechanics

$$E_{\text{QM}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (8)$$

In the particular case of parallel polarizers (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , we find $E_{\text{QM}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$: this confirms that the correlation is total. In conclusion, the quantum mechanical calculations shows that although each individual measurement gives random results, these random results are correlated, as expressed by equation (8).

4. How to complete Quantum Mechanics? Supplementary parameters

4.1 What is suggested by the quantum formalism is weird

A most natural approach to find a way to complete the quantum formalism may seem to follow the quantum mechanical calculations leading to (5). In fact, there are several ways to do this calculation. The most direct one is to project the two photon state (2) onto the four state vectors $|\pm_a, \pm_b\rangle$ associated with the four possible joint results (\pm, \pm) . However, this calculation bears on state vectors of the configuration space of the two particles, and it is not clear how to deduce elements of the physical reality pertaining to the ordinary space, an implicit demand of EPR.

In order to overcome this problem, and find a description in our ordinary space, we treat separately the two measurements done on both ends of the experiment, and we split the joint measurement in two steps. Suppose for instance that the measurement on photon ν_1 takes place first and gives the result $+$, with the polarizer I aligned along x . To proceed with the following of the calculation, we must then use the postulate of reduction of the state vector, which states that after this measurement, the new state vector describing the pair is obtained by projection of the initial state vector, onto the eigenspace associated to the result $+$: this two dimensional eigenspace has a basis $\{|x, x\rangle; |x, y\rangle\}$. Using the corresponding projector, we find

$$|\Psi'(\nu_1, \nu_2)\rangle = |x, x\rangle. \quad (9)$$

This means that immediately after the first measurement, photon ν_1 falls into the polarization state $|x\rangle$: this was to be expected because it was measured with a polarizer oriented along x , and the result $+$ was found. More surprisingly, the distant photon ν_2 , which has not yet interacted with any polarizer, has also been projected into the state $|x\rangle$ with a well-defined polarization, parallel to the one found for photon ν_1 .

This surprising conclusion, however, leads to the correct final values (5) for the probabilities of joint detections, by a straightforward use of Malus law in the case where the subsequent measurement on photon ν_2 is done along a different direction.

The calculation in two steps therefore gives the same result as the direct calculation. But in addition it suggests the following picture in the ordinary space:

- Photon ν_1 , which had not a well-defined polarization before its measurement, takes the polarization associated to the obtained result, at the moment of its measurement: this is not surprising.
- When the measurement on ν_1 is done, photon ν_2 , which had not a well-defined polarization before this measurement, is projected into a state of polarization parallel

to the result of the measurement on v_1 . This is very surprising, because this change in the description of v_2 happens instantaneously, whatever the distance between the two photons at the moment of the first measurement, and without any effective measurement being done on photon v_2 .

This picture seems in contradiction with relativity. According to Einstein, what happens in a given region of space-time cannot be influenced by an event happening in a region of space-time that is separated by a space-like interval. It is therefore not unreasonable to try to find more acceptable descriptions of the EPR correlations. It is such a picture that we consider now.

4.2 Supplementary parameters

Correlations between distant measurements on two separated systems that had previously interacted are common in the classical world. For instance, if a mechanical object with a null angular momentum is split in two parts by some internal repulsion, the angular momenta of the two separated parts remain equal and opposite in the case of a free evolution. In the general case where each fragment is submitted to some external action that may evolve its angular momentum, the two momenta remain nevertheless correlated, since their values are at each moment determined by their initial values, which had a perfectly defined sum.

It is tempting to use such a classical picture to render an account of the EPR correlations, in term of common properties of the two systems. Let us consider again the perfect correlation of polarization measurements in the case of parallel polarizers along x . We can easily describe the observed correlations by assuming that some pairs are emitted with both photons in a well-defined polarization along x , while other pairs are emitted with both photons in a well-defined polarization perpendicular to x . If the proportions of the two kinds of pairs are equal, we obtain the total correlation predicted by Quantum Mechanics.

Using such a model for describing such correlations is good scientific methodology. Indeed, when biologists or medical doctors observe strong correlations between some feature of identical twins, they can conclude safely that this feature is determined by the identical sets of chromosomes. We are thus led to admit that there is some common property ('an element of physical reality'), whose value determines the result of the polarization. But such a property, which may differ from one pair to another one, is not taken into account by the quantum mechanical state vector (2), which is the same for all pairs. One can thus conclude with EPR that Quantum Mechanics is not complete. And this is why such additional properties are referred to as "supplementary parameters", or "hidden-variables".

As a conclusion, it seems possible to describe the EPR correlations by such a picture, involving supplementary parameters that differ from one pair to another one. It can be hoped to recover the statistical quantum mechanical predictions when averaging over the supplementary parameters, which amounts to considering Quantum Mechanics as the Statistical Mechanics description of a deeper level. It seems that so was Einstein's position [12, 16, 17]. In contrast, we already mentioned that Bohr strongly refused such an option ('any comparison between Quantum Mechanics and ordinary statistical mechanics

– however useful it may be for the formal presentation of the theory – is essentially irrelevant'). Note that at this stage of the reasoning, a commitment to Einstein's position does not contradict Quantum Mechanics: in fact, Einstein never suggested that the predictions of Quantum Mechanics were wrong, he considered that it was not the deepest level of description that could be used.

5. Bell's inequalities

5.1 Formalism

Three decades after the EPR paper, Bell translated into (quite simple) mathematics the consequences of the preceding discussion, and he explicitly introduced supplementary parameters, denoted λ . Their distribution on an ensemble of emitted pairs is specified by a probability distribution $\rho(\lambda)$, such that

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &\geq 0, \\ \int d\lambda \rho(\lambda) &= 1. \end{aligned} \tag{10}$$

For a given pair, characterized by a given supplementary parameter λ , the results of measurements at polarizers I and II are given by the bi-valued functions

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \pm 1, \\ B(\lambda, \mathbf{a}) &= \pm 1. \end{aligned} \tag{11}$$

A particular Supplementary Parameter Theory is completely defined by the explicit form of the functions $\rho(\lambda)$, $A(\lambda, \mathbf{a})$ and $B(\lambda, \mathbf{b})$. It is then easy to express the probabilities of the various results of measurements, and the correlation function assumes the simple form

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}). \tag{12}$$

5.2 A (naive) example of Supplementary Parameters Theory

As an example of Supplementary Parameter Theory, we present a model where each photon traveling along z is supposed to have a well-defined linear polarization, perpendicular to the z -axis, determined by its angle λ with the x -axis. In order to account for the strong correlation, we assume that the two photons of a same pair are emitted with the same

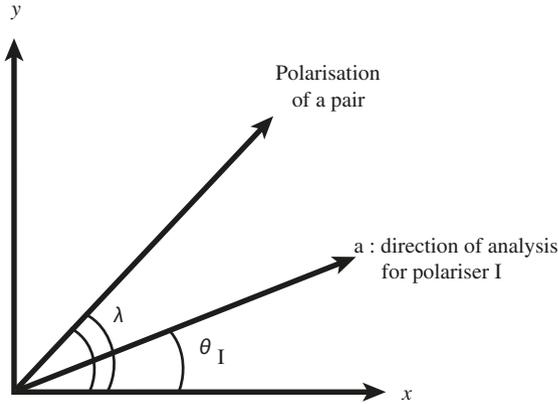


Figure 2. The naive example of Supplementary Parameters Theory. Each pair of photons has a 'direction of polarisation', defined by λ , which is the supplementary parameter of the model. Polarizer I makes a polarization measurement along \mathbf{a} , at an angle θ_I from the x-axis.

linear polarization, defined by the angle λ (figure 2). The polarization of the various pairs is randomly distributed, according to a probability distribution that we take rotationally invariant:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}. \quad (13)$$

We must also give an explicit form for the functions $A(\lambda, \mathbf{a})$ and $B(\lambda, \mathbf{b})$, which we take with the following form

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \text{sign} \{ \cos 2(\theta_I - \lambda) \} \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \text{sign} \{ \cos 2(\theta_{II} - \lambda) \}, \end{aligned} \quad (14)$$

where the angles θ_I and θ_{II} indicate the orientations of the polarisers. Note that these forms are very reasonable: $A(\lambda, \mathbf{a})$ assumes the value +1 when the polarization of photon v_1 is closer to the direction of analysis \mathbf{a} , and -1 for the complementary case (polarization closer to the perpendicular to \mathbf{a}). With this explicit model, we can calculate the probabilities of the various measurements, and the polarization correlation function. We find inserting the expressions (13,14) into (12):

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - 4 \frac{|\theta_I - \theta_{II}|}{\pi} = 1 - 4 \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{\pi}. \quad (15)$$

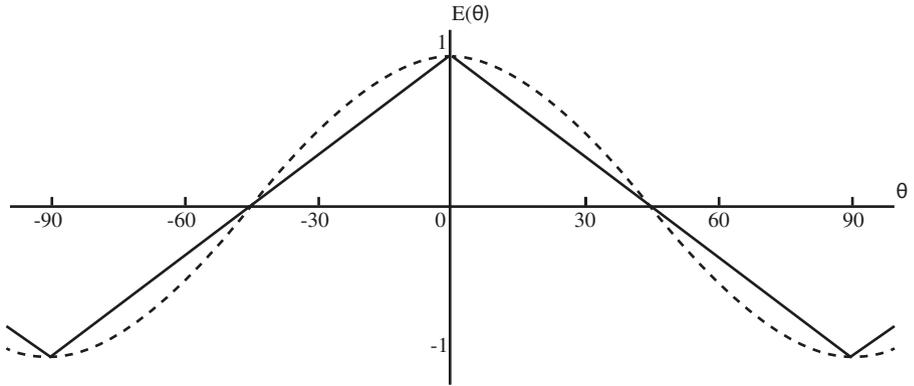


Figure 3. Polarization correlation coefficient, as a function of the relative orientation of the polarisers: (i) Dotted line: quantum mechanical prediction; (ii) solid line: the naive supplementary parameters model.

This is a remarkable result. Note first that $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ depends only on the relative angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , as the quantum mechanical prediction (8). Moreover, as shown on figure 3, the difference between the predictions of the supplementary parameters model and the quantum mechanical predictions is not large, and the agreement is exact for the angles 0 and $\pi/2$, i.e., the cases of total correlation. This result, obtained with an extremely simple supplementary parameters model, is very encouraging, and it might be hoped that a more sophisticated model could be able to reproduce exactly the quantum mechanical predictions. Bell's discovery is the fact that the search for such models is hopeless, as we are going to show now.

5.3 Bell's inequalities

There are many different forms, and demonstrations of Bell's inequalities. We give here a very simple demonstration leading to a form directly applicable to the experiments. Let us consider the quantity

$$s = A(\lambda, \mathbf{a}) \cdot B(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a}) \cdot B(\lambda, \mathbf{b}') + A(\lambda, \mathbf{a}') \cdot B(\lambda, \mathbf{b}) + A(\lambda, \mathbf{a}') \cdot B(\lambda, \mathbf{b}') \quad (16)$$

$$= A(\lambda, \mathbf{a}) [B(\lambda, \mathbf{b}) - B(\lambda, \mathbf{b}')] + A(\lambda, \mathbf{a}') [B(\lambda, \mathbf{b}) + B(\lambda, \mathbf{b}')] .$$

Remembering that the four quantities A and B take only the values ± 1 , a simple inspection of the second line of (16) shows that

$$s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \pm 2. \quad (17)$$

The average $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ of $s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ over λ is therefore comprised between +2 and -2. Recalling (12), we thus conclude that

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq +2 \quad (18)$$

where

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \quad (19)$$

These are the BCHSH inequalities, i.e., Bell's inequalities as generalized by Clauser, Horne, Shimony and Holt [14]. They bear upon the combination S of the four polarization correlation coefficients, associated with two directions of analysis for each polarizer. They apply to any Supplementary Parameter Theory of the very general form defined in subsection 5.1, of which our naive model is only an example.

6. Conflict with Quantum Mechanics

6.1 Evidence of a conflict

Let us consider the sets of orientations shown in figure 4.a. If we express the quantity $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ of equation (19) with the correlation coefficients (8) predicted by Quantum Mechanics for the EPR state, we find

$$S_{\text{QM}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 2\sqrt{2}, \quad (20)$$

a value obviously in conflict with the right inequality in (18). We have thus found a situation where the quantum mechanical predictions cannot be reproduced (mimicked) by Supplementary Parameters Theories. This is the essence of Bell's theorem: it is impossible to find a Supplementary Parameter Theory, of the general form defined in subsection 5.1, able to reproduce *all* the predictions of Quantum Mechanics. This statement is the generalization of what appears on figure 3, for the particular supplementary parameter model considered in subsection 5.2: the model exactly reproduces the predictions of Quantum Mechanics for some particular angles ($0, \pi/4, \pi/2$), but it somewhat deviates at other angles. The importance of Bell's theorem is that it is not restricted to a particular supplementary parameters model, but it is general.

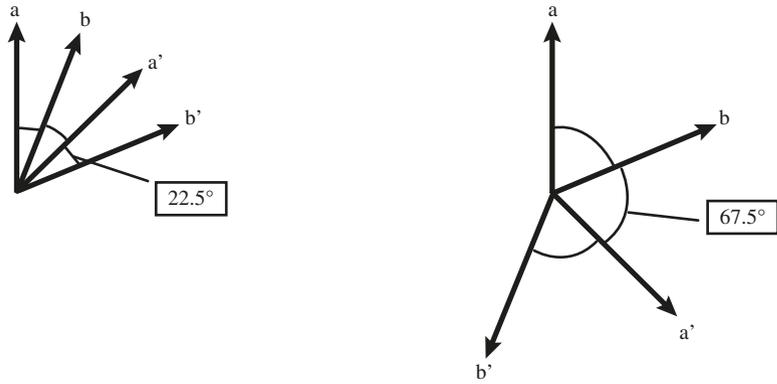


Figure 4. Orientations yielding the largest conflict between Bell's inequalities and Quantum Mechanics.

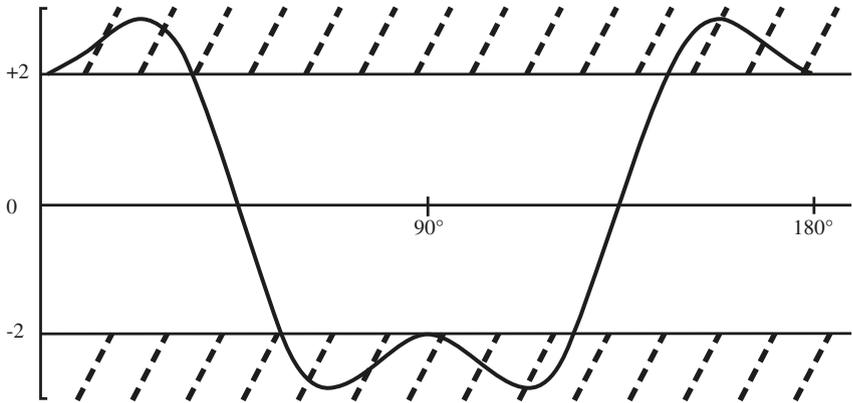


Figure 5. $S_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ as predicted by Quantum Mechanics for EPR pairs, for the condition $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}') = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \theta$, which maximizes the conflict with Bell's inequalities. The conflict happens when $|S|$ is larger than 2, and it is maximum for the sets of orientations of figure 4.

It is possible to show that in fact the orientations of figure 4 lead to the largest conflict. Moreover, as shown on figure 5, there are many orientations where there is no conflict between the quantum mechanical predictions and Bell's inequalities. Recalling the EPR discussion, it is interesting to remark that the quantum mechanical predictions do not violate Bell's inequalities if one considers only orientations associated to observables that commute.

6.2 Discussion: the locality condition

Having a conflict between a very reasonable model, in the spirit of Einstein's world views, and Quantum Mechanics, a so successful theory, clearly cries for a discussion to try to identify the properties of the model that entail the conflict. We therefore examine now the various ingredients underlying the Supplementary Parameter Theories introduced in subsection 4.1.

A first ingredient is the use of supplementary parameters, carried along by each particle, and determining the outcome of the measurement at each measuring apparatus. As we have seen, supplementary parameters have been introduced in order to render an account of the correlations at a distance, without invoking instantaneous action at a distance. The model is thus strongly related to a conception of the world, as expressed by Einstein, and sometimes called 'local realism', where it is meaningful to invoke separated physical realities for space-like separated systems. It is clear that here the word 'local' must be understood in the relativistic sense of 'localized in space time', not to be confused with Bell's locality condition that we will encounter below.

Another apparent ingredient of the formalism is determinism. As a matter of fact, in the formalism of subsection 4.1 the results $A(\lambda, \mathbf{a})$ and $B(\lambda, \mathbf{b})$ of the polarization measurements are certain, once λ is fixed. One has speculated that it may be the reason for a conflict with the non-deterministic formalism of Quantum Mechanics. In fact, as first shown by Bell, and subsequently elaborated,³ it is easy to generalize the formalism of subsection 4.1 to Stochastic Supplementary Parameter Theories where the deterministic measurement functions $A(\lambda, \mathbf{a})$ and $B(\lambda, \mathbf{b})$ are replaced by probabilistic functions. One then finds that the Bell's inequalities still hold, and that the conflict does not disappear. It is therefore generally accepted that the deterministic character of the formalism is not the reason for the conflict.

The most important ingredient, stressed by Bell in all his papers, is the local character of the formalism of subsection 4.1. We have indeed implicitly assumed that the result $A(\lambda, \mathbf{a})$ of the measurement at polarizer I, does not depend on the orientation \mathbf{b} of the remote polarizer II, and vice-versa. Similarly, it is assumed that the probability distribution $\rho(\lambda)$ (i.e. the way in which pairs are emitted) does not depend on the orientations \mathbf{a} and \mathbf{b} . This locality assumption is crucial: Bell's Inequalities would no longer hold without it. It is indeed clear that the demonstration of 5.3 fails with quantities such as $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ or $\rho(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

To conclude, there are two ingredients that seem to be necessary to obtain Bell's inequalities, and thus to have a conflict with Quantum Mechanics :

- Distant correlations can be understood by introduction of supplementary parameters carried along by the separated particles, in the spirit of Einstein's ideas that separated objects have separated physical realities.
- The quantities $A(\lambda, \mathbf{a})$, $B(\lambda, \mathbf{b})$ and $\rho(\lambda)$ obey the Bell's locality condition, i.e. they do not depend on the orientations of the distant polarizers.

(3) For a simple demonstration, see for instance [18], available at <http://tel.archives-ouvertes.fr/?langue=en>

6.3 A Gedankenexperiment with variable analyzers: Bell's locality as a consequence of relativistic causality

In static experiments, in which the polarizers are held fixed for the whole duration of a run, the Locality Condition must be stated as an assumption. Although highly reasonable, this condition is not prescribed by any fundamental physical law. To quote Bell [13]: “the settings of the instruments are made sufficiently in advance to allow them to reach some mutual rapport by exchange of signals with velocity less than or equal to that of light”. In that case, the result of the measurement at polarizer I could depend on the orientation of the remote polarizer II, and vice-versa. The Locality Condition would no longer hold, nor would Bell's Inequalities. Bell thus insisted upon the importance of “experiments of the type proposed by Bohm and Aharonov [12], in which the settings are changed during the flight of the particles”. In such a timing-experiment, the locality condition would become a consequence of Einstein's relativistic Causality that prevents any faster-than-light influence.

As shown in a 1975 proposal [19, 20], it is sufficient to switch each polarizer between two particular settings (\mathbf{a} and \mathbf{a}' for I, \mathbf{b} and \mathbf{b}' for II), to test experimentally a very large class of Supplementary Parameters Theories: those obeying Einstein's relativistic Causality. In such theories, the response of polarizer I at time t , is allowed to depend on the orientation \mathbf{b} (or \mathbf{b}') of polarizer II at times anterior to $t - L/c$ (L is the distance between the polarizers and c the velocity of light). A similar retarded dependence is considered for the probability distribution $\rho(\lambda)$, i.e. the way in which pairs are emitted at the source.

On the other hand, one can show [18] that the polarization correlations predicted by Quantum Mechanics depend only on the orientations \mathbf{a} and \mathbf{b} at the very time of the measurements, and do not involve any retardation terms. For a suitable choice of the set of orientations (\mathbf{a} , \mathbf{a}' , \mathbf{b} , \mathbf{b}') for instance the sets displayed on figure 4 the quantum mechanical predictions still conflict with generalized Bell's Inequalities.

7. Experimental tests

7.1 From the Gedankenexperiment to realistic experiments with entangled photons: a short history

With Bell's inequalities, the debate on the possibility (or necessity) to complete Quantum Mechanics changed dramatically. It was no longer a matter of philosophical position (realism versus positivism), or of personal taste (Einstein vs. Bohr). It became possible to settle the question by an experiment. If one can produce pairs of photons in an EPR state, and measure the 4 coincidence rates $N_{\pm, \pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ with detectors in the output channels of the polarizers (or Stern-Gerlach filters), one obtains directly, without any extra calibration the polarization correlation coefficient, for polarizers in orientations \mathbf{a} and \mathbf{b} :

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}. \quad (21)$$

By performing four measurements of this type in orientations (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$, $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$ and $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$, one obtains a measured value $S_{\text{exp}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ for the quantity defined in equation (19). Choosing a situation where Quantum Mechanics predicts that this quantity violates Bell's inequalities, we have a test allowing one to discriminate between Quantum Mechanics and any local supplementary parameter theory fulfilling the Bell's locality condition. If in addition we use a scheme with variable polarizers, we even test the more general class of Local Supplementary Parameters Theories where 'local' must be understood in the relativistic sense, i.e. as meaning 'space-like separated'.

Finding pairs of systems in an EPR-like entangled state is not easy. Pairs of spin 1/2 particles in a singlet state are an example, but none practical implementation has been done yet, although a somewhat related experiment has been done with protons [21]. The disintegration of positronium in the singlet state leads to pairs of γ photons in an EPR state, as emphasized by Bohm and Aharonov [12], but there is no polarizer for such MeV photons. Experiments must then rely on Compton scattering to calculate what would have been the result of a true polarization measurements if a polarizer would have existed [22]. After some conflicting results, experiments have been found in agreement with Quantum Mechanics [23, 24], but we are still far from a genuine test of Bell's inequalities.

A breakthrough was the proposal by Clauser et al. [14] to use pairs of optical photons, for which true polarizers do exist, and to show that pairs of photons emitted in well chosen atomic cascades would be in the EPR state of equation (2). This launched a first series of experiments, initially yielding conflicting results, but eventually giving clear results in favor of Quantum Mechanics [25, 26, 27]. These experiments were nevertheless still quite different from the ideal Gedankenexperiment scheme, and this is why I embarked into a new series of experiments, with the goal to achieve schemes closer and closer to the ideal scheme.

The development of a source of entangled photons of unprecedented efficiency, led to the publication of three tests of Bell's inequalities [28, 29, 30], with the following new features:

- The polarizers were pulled at a distance of the source farther than the coherence length of the second photon, realizing a space-like separation between the measurement events.
- We implemented true polarization analyzers, with two output channels, in contrast to previous experiments realized with single channel polarizers where the second channel is lost. The scheme is then identical to the one of figure 1, and one no longer depends on auxiliary calibrations and a supplementary hypothesis to test Bell's inequalities. The result was a spectacular violation of Bell's inequalities by more than 40 standard deviations, and a perfect agreement with the quantum mechanical predictions.

- We implemented a scheme where the direction of analysis of polarization was changed while the photons were in flight, realizing a space-like separation between the choices of the measured observables, thus implementing a full separation in space-time. Although not perfect since the choices of the directions of the polarizers were not fully random, this experiment was the first evidence of quantum non-locality in the relativistic sense.

All these three experiments gave a clear violation of Bell's inequalities, and a remarkable agreement with the prediction of Quantum Mechanics, in schemes closer and closer to the ideal Gedankenexperiment.

In the 1990's, progress in non-linear optical materials permitted to develop new types of sources of entangled photons, with the directions of emissions strictly correlated, in contrast to the previous sources based on atomic radiative cascades, where the momenta of the emitted photons are not correlated since the recoiling atom can accommodate momentum conservation for any emission directions. This permitted to inject the emitted photons in optical fibers, and to realize long distance tests of Bell's inequalities [31, 32], leaving enough time to make a true random choice of the polarizers orientation [33]. Here again, the violation of Bell's inequalities was spectacular, and the agreement with Quantum Mechanics remarkable.

7.2 Loophole-free tests

As soon as it was realized that it was possible to test experimentally Bell's inequalities, in order to settle experimentally the question of the possibility to complete Quantum Mechanics, it was emphasized that real experiments could leave some loophole open for particular Supplementary Parameters Theories able to reproduce the experimental results. Three loopholes have been considered, and discussed in particular by Bell [34]:

1. The locality loophole.
2. The sensitivity loophole.
3. The free-will loophole.

The *locality loophole* refers to what was mentioned in subsections 6.2 and 6.3, i.e., that in an experiment with static polarizers there might be an influence between the distant polarizers, and between the polarizers and the source. This loophole has been closed by the experiments of [29] and [33].

The *sensitivity loophole* refers to the fact that standard photon detectors have a limited quantum efficiency and miss a significant fraction of the photons. One can then develop supplementary parameters models in which the detectors select well chosen sub-ensembles of photons, to mimic Quantum Mechanics. In order to test Bell's inequalities with such experimental results, one must use a supplementary hypothesis, the 'fair sampling assumption', that states that the detected photons are a fair representative of the ensemble of photons,

without any bias. Recent experiments using new types of high sensitivity detectors have closed that loophole [35, 36].

The *free-will loophole* is different in nature. It is based on the fact that it might happen that the apparently independent random choices of the settings of the distant polarizers are in fact determined by some cause in the backward light cone of the two choices. One could then have a local (in the relativistic sense) Supplementary Parameters Theory rendering an account of results violating Bell's inequalities. Following Bell, I doubt that there is any possibility to close that loophole, which could be used, as a matter of fact, to interpret anything happening in the world, since it amounts to accepting that things have been determined long ago (at the Big Bang?). A discussion exists, however, about the following question: is the randomness of a decision made by a human operator, supposed to have a full free will, similar in nature to the randomness of a 'Swiss lottery machine' (the favorite example of Bell) or any device we think really random?

8. The emergence of quantum information

After the experimental observation of the violation of Bell's inequalities, it could be thought that it was the end of the story. But in fact some physicists, in particular Feynman [37], realizing that entanglement is definitely different from wave particle duality, proposed to use it for new applications, and laid the ground for a new field of research, quantum information [38]. Quantum information involves totally new ways of transmitting and processing information, such as quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computing, and quantum simulation. If these new methods become practical and available on a large scale, they may well change our society as deeply as the inventions of the transistor, the integrated circuits, and the laser, i.e. the fruits of the first quantum revolution, led our society into the Information and Communication society.

8.1 Quantum cryptography

Cryptography is the science of encoding and/or transmitting a secret message without its being read/understood by a third party. Both encoding and code-breaking have progressed due to advances in mathematics and to the ever-increasing power of computers. When contemplating the continuing progress of encrypting and code breaking over ages, it seems clear that the security of an encrypted transmission can be assured only under the hypothesis that the adversary (who is trying to break the code) has neither more advanced mathematics nor more powerful computers than the sender and intended receiver.

By contrast, in quantum cryptography, the security of a transmission rests on the fundamental physical laws at work in Quantum Mechanics. There, it is possible to detect an eavesdropper by using the trace that is necessarily left by him/her [39, 40], since in quantum physics all measurements perturb the system in some way. In quantum cryptography one can check the absence of such a trace, and then be certain that the message (or more precisely an encoding key) has passed without having been read by a spy.

Many demonstrations of quantum cryptography have been carried out, and commercial systems are already available and experimented in commercial (banking) or government (elections) activities.

8.2 Quantum computing

In the early 1980's, the fundamental assumption in information theory – that all computers are conceptually equivalent – started to be challenged. Several scientists, for instance R. Landauer or D. Deutsch, suggested that if one had a quantum computer, one could implement radically new algorithms to perform certain tasks. A breakthrough happened in 1994 when P. Shor showed that a quantum computer should allow one to factor large numbers in times much shorter than with conventional methods. Factorization belongs to a class of problems (complexity class) whose solution (with classical computers) requires a time super-polynomial in the size of the problem (that is, the time needed grows faster than any power of the number of digits in the number to be factored). With a quantum computer running the Shor's algorithm, on the other hand, the computation time would only grow as a power of the size of the number. This discovery had considerable conceptual implications, since it showed that contrary to what had been thought previously, the complexity class of a problem was not independent of the type of machine used. It also was the starting point of an immense experimental effort worldwide, aiming at realizing a quantum computer able to implement quantum algorithms such as the one of Shor.

Several groups have started to develop the basic elements of a quantum computer: quantum bits, and quantum gates. A quantum logic gate performs basic operations on quantum bits or "qubits", just as an electronic logic gate manipulates ordinary bits. However, in contrast to normal bits, which can take only one of the two values 0 and 1, quantum bits can be put in a superposition of 0 and 1. A quantum logic gate must thus be capable of combining two quantum bits to produce an entangled state which is the superposition of the four possible combinations (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), of the two qubits basic states. It is the possibility to work with such entangled states that opens new and incommensurate possibilities as compared to the classical algorithms. To give a flavor of it, let us notice that if one entangles 10 qubits, the number of combinations of 0 and 1 states is now $2^{10} = 1024$, while for 20 entangled qubits it is $2^{20} =$ about 1 million, etc. It means that with a limited number of qubits, constituting a quantum register, one can in principle store a huge amount of information, and that any operation acting on an entangled state will process a huge quantity of information, realizing a kind of massively parallel computing.

Experimental research on quantum gates is extremely active, and has already obtained important results. Many approaches are being explored, with a diversity of physical realizations of qubits, including atoms, ions, photons, nuclear spins, Josephson junctions, RF circuits... For all these systems there are large unknowns. A universal quantum computer would rely on the ability to entangle hundreds of thousands of quantum bits, and perform thousands of operations before decoherence disrupts the quantum register. Decoherence results from the interaction with the outside world, and its effect is to wash out entanglement, putting previously entangled objects into a state where they behave as separated objects. The scalability to a large number of entangled qubits may turn out to be overwhelmingly

difficult since it is generally observed that decoherence dramatically increases when the number of entangled particles increases. An entire community of experimentalists and theorists is engaged in that quest. Understanding and reducing the effects of decoherence may well be the key question facing quantum computation, as a technological revolution. But even in the absence of an efficient quantum computer, the idea of quantum computation is certainly a milestone in computation science.

8.3 Quantum simulation

In contrast to quantum computing with quantum gates and qubits, another kind of quantum computing is already operational, that is quantum simulation. Quantum simulation is in fact what was primarily suggested in the 1982 Feynman's paper [37], often considered as the starting point of quantum information. In this paper, Feynman shows first that it is absolutely impossible but to store in a classical computer a quantum state of many entangled quantum systems, since this would demand a number of bits larger than the number of atoms in the universe. He then concludes that the only support for such huge quantity of information is a quantum system involving many entangled elementary quantum systems. A quantum computer made of many entangled quantum bits would be such a system. But there is another possibility, which has already led to several experimental implementations. It consists of considering a situation difficult to investigate directly, for instance many entangled electrons in a material, and simulating it with a system similar but offering more possibilities of study, such as many ultra-cold atoms in a potential synthesized with laser beams.

A first example is the case of electrons in a perfect crystal, i.e. in a perfect periodic potential. One can simulate such a situation by placing many ultra-cold atoms (atoms with a motion perfectly controlled at the quantum level) in a potential constituted of laser standing waves, whose intensity is modulated in an absolutely perfect periodic way along the three dimensions of space. This realizes a perfect lattice of potential wells where the atoms may be trapped. The cold atoms system has two main advantages. Firstly, one has many observation tools allowing experimentalists to directly observe the atoms and record their distribution in space, or the distribution of their velocities. Secondly, one can change parameters such as, for instance, the height of the barrier between neighbor trapping sites, in contrast to the case of electrons in a piece of material, where the parameters are given by the very nature of the material and can hardly be modified. By lowering the barriers between the sites where atoms were trapped, experimentalists could observe a transition from a situation where the atoms are fixed to a situation where they can propagate freely. This would correspond to a transition from an insulating to a supra-conducting state in the case of electrons, and such a quantum transition called 'a Mott transition' had been predicted decades ago, but never observed directly.

Another example is a situation where the atoms are plunged in a disordered potential realized with laser beams passed through a scattering plate. The intensity varies randomly in space, achieving a disordered potential that we can describe accurately with the tools of statistical optics. This has allowed us to observe another emblematic phenomenon of condensed matter physics, Anderson localization. This fully quantum phenomenon was

predicted more than fifty years ago. The prediction was that when the randomness of the potential is large enough (or equivalently the density of impurities in a material is large enough), the motion of the particles (the electrons in a material) would not only be hindered but even totally stopped, due to a quantum interference between the many multiple-scattering paths. This is again a quantum phase transition, never observed directly with electrons in materials, which can be directly observed and studied with ultra-cold atoms.

To describe such condensed matter situations, only idealized theoretical models exist, and it often happens that we do not know exact solutions for these models. Quantum simulators allow one to implement these models, explore their solutions by changing the parameters, and check whether some of these solutions correspond to the observed phenomena.

9. The Bohr-Einstein discussion: visionary

For a long time, it was considered that the discussion between Einstein and Bohr on EPR was nothing else than a philosophical discussion, without any consequence on the practical way of doing physics. We know that the situation changed with the discovery by Bell that taking Einstein's point of view led to a conflict with Quantum Mechanics, but it is clear that it took a long time for this discovery to be recognized by a majority of physicists. Feynman gives us a remarkable example of this difficulty. In the early 1960's, in his famous 'Lectures on Physics' [41], he writes that all the 'mystery' of Quantum Mechanics is in the wave-particle duality of a particle able to interfere with itself, and he considers that there is nothing special in the EPR situation: "This point was never accepted by Einstein... it became known as the 'Einstein-Podolsky-Rosen paradox'. But when the situation is described as we have done it here, there doesn't seem to be any paradox at all..." It took another 20 years for Feynman to realize that there is another quantum mystery, and to write [37]: "We always have had a great deal of difficulty in understanding the world view that Quantum Mechanics represents... It has not yet become obvious to me that there is no real problem... I've entertained myself always by squeezing the difficulty of Quantum Mechanics into a smaller and smaller place, so as to get more and more worried about this particular item. It seems to be almost ridiculous that you can squeeze it to a numerical question that one thing is bigger than another. But there you are – it is bigger..." What Feynman is alluding to is nothing else than the violation of Bell's inequalities, and the weirdness of entanglement.

It thus seems clear that the revolutionary nature of entanglement between several quantum objects took a very long time to be fully appreciated. But it seems just as clear that Bohr and Einstein had understood it in 1935, and it is a fact that for the rest of their lives their discussions about Quantum Mechanics centered on that point. Here again we can acknowledge that these two giants were far ahead of their contemporaries (with the exception of Schrödinger). Einstein because he discovered entanglement, and understood that it was different in nature from wave particle duality. Bohr because he had the correct intuition, thirty years before it was demonstrated by Bell, that adopting Einstein's position would lead to an inconsistency with Quantum Mechanics. At this time of celebration of Niels Bohr, it is good to notice that he was among the few physicists who had not underestimated the EPR discovery.

References

- [1] Planck, M.: Law of energy distribution in normal spectra. *Annalen der Physik* **4**, pp. 553–563 (1901).
- [2] Einstein, A.: Generation and conversion of light with regard to a heuristic point of view. *Annalen Der Physik* **17**, n° 6, pp. 132–148 (1905).
- [3] Millikan, R.: Albert Einstein on his 70th Birthday. *Reviews of Modern Physics* **21**, n° 3, pp. 343–345 (1949).
- [4] Bohr, N.: On the Constitution of Atoms and Molecules. *Philosophical Magazine* **26**, pp. 1–25 (1913).
- [5] Bohr, N.: On the Constitution of Atoms and Molecules. *Philosophical Magazine* **26**, pp. 476–502 (1913).
- [6] Bohr, N.: On the Constitution of Atoms and Molecules. *Philosophical Magazine* **26**, pp. 857–875 (1913).
- [7] Jammer, M.: *Philosophy of Quantum Mechanics. The interpretations of quantum mechanics in historical perspective*. John Wiley & Sons, 1974.
- [8] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N.: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* **47**, n° 10, pp. 777–780 (1935).
- [9] Schrödinger, E.: Discussion of probability relations between separated systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **31**, pp. 555–563 (1935).
- [10] Bohr, N.: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* **48**, n° 8, pp. 696–702 (1935).
- [11] Bohm, D.: *Quantum Theory*. Dover Publications, 1951.
- [12] Bohm, D., and Aharonov, Y.: Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review* **108**, n° 4, pp. 1070–1076 (1957).
- [13] Bell, J. S., et al.: On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics* **1**, n° 3, pp. 195–200 (1964).
- [14] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., and Holt, R. A.: Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **23**, n° 15, pp. 880–884 (1969).
- [15] Wenger, J., Hafezi, M., Grosshans, F., Tualle-Brouri, R., and Grangier, P.: Maximal violation of Bell inequalities using continuous-variable measurements. *Physical Review A* **67**, n° 1, p. 012105 (2003).
- [16] Schilpp, P. A.: *Albert Einstein: philosopher-scientist*. Vol. I. Open Court, 1970.

- [17] Born, M., Einstein, A., and Born, I.: *The Born-Einstein Letters: correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955 with commentaries by Max Born*. Translated by Irene Born. Basingstoke, Macmillan Press, 1971.
- [18] Aspect, A.: *Three experimental tests of Bell inequalities by the measurement of polarization correlations between photons*. PhD Thesis, vol. 2674, 1983.
- [19] Aspect, A.: Proposed experiment to test separable hidden-variable theories. *Physics Letters A* **54**, n° 2, pp. 117–118 (1975).
- [20] Aspect, A.: Proposed experiment to test nonseparability of quantum-mechanics. *Physical Review D* **14**, n° 8, pp. 1944–1951 (1976).
- [21] Lamehi-Rachti, M., and Mittig, W.: Quantum mechanics and hidden variables: A test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low-energy proton-proton scattering. *Physical Review D* **14**, n° 10, p. 2543–2555 (1976).
- [22] Kasday, L., Ullman, J., and Wu, C.: Angular correlation of Compton-scattered annihilation photons and hidden variables. *Il Nuovo Cimento B Series II* **25**, n° 2, pp. 633–661 (1975).
- [23] Bruno, M., Dagostino, M., and Maroni, C.: Measurement of linear polarization of positron-annihilation photons. *Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica B-General Physics Relativity Astronomy and Mathematical Physics and Methods* **40**, n° 1, pp. 143–152 (1977).
- [24] Wilson, A., Lowe, J., and Butt, D.: Measurement of the relative planes of polarization of annihilation quanta as a function of separation distance. *Journal of Physics G: Nuclear Physics* **2**, n° 9, p. 613 (1976).
- [25] Clauser, J. F.: Experimental investigation of a polarization correlation anomaly. *Physical Review Letters* **36**, n° 21, pp. 1223–1226 (1976).
- [26] Freedman, S. J., and Clauser, J. F.: Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **28**, n° 14, pp. 938–941 (1972).
- [27] Fry, E. S., and Thompson, R. C.: Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **37**, n° 8, pp. 465–468 (1976).
- [28] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G.: Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Physical Review Letters* **47**, n° 7, pp. 460–463 (1981).
- [29] Aspect, A., Dalibard, J., and Roger, G.: Experimental test of Bell inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters* **49**, n° 25, pp. 1804–1807 (1982).
- [30] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G.: Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment - a new violation of Bell inequalities. *Physical Review Letters* **49**, n° 2, pp. 91–94 (1982).

- [31] Tapster, P., Rarity, J., and Owens, P.: Violation of Bell inequality over 4 km of optical-fiber. *Physical Review Letters* **73**, n° 14, pp. 1923–1926 (1994).
- [32] Tittel, W., Brendel, J., Zbinden, H., and Gisin, N.: Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Physical Review Letters* **81**, n° 17, pp. 3563–3566 (1998).
- [33] Weihs, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H., and Zeilinger, A.: Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions. *Physical Review Letters* **81**, n° 23, pp. 5039–5043 (1998).
- [34] Bell, J. S.: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*. Cambridge University Press, 2004.
- [35] Giustina, M., Mech, A., Ramelow, S., Wittmann, B., Kofler, J., Beyer, J., Lita, A., Calkins, B., Gerrits, T., Nam, S., Ursin, R., and Zeilinger, A.: Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption. *Nature* **497**, pp. 227–230 (2013).
- [36] Christensen, B. G., McCusker, K. T., Altepeter, J. B., Calkins, B., Gerrits, T., Lita, A. E., Miller, A., Shalm, L. K., Zhang, Y., Nam, S. W., Brunner, N., Lim, C. C. W., Gisin, N., and Kwiat, P. G.: Detection-Loophole-Free Test of Quantum Nonlocality, and Applications. *Physical Review Letters* **111**, 130406 (2013).
- [37] Feynman, R. P.: Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics* **21**, n° 6-7, pp. 467–488 (1982).
- [38] Nielsen, M. A., and Chuang, I. L.: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [39] Bennett, C. H., Brassard, G., and Ekert, A. K.: Quantum cryptography. *Scientific American* **267**, n° 4, pp. 50–57 (1992).
- [40] Ekert, A. K.: Quantum cryptography based on Bell theorem. *Physical Review Letters* **67**, n° 6, pp. 661–663 (1991).
- [41] Feynman, R. P.: *Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1963.

Claude Cohen-Tannoudji**Bernard Diu****Franck Laloë**

Mécanique quantique - Tome III. Fermions, bosons, photons, corrélations et intrication. Cohen-Tannoudji, Claude, Laloë, Franck, et Diu, Bernard. EDP Sciences / CNRS Editions, Collection : Savoirs Actuels. Septembre 2017.

I. Préambule

La sortie du tome 3 toute récente (septembre 2017) du cours de Mécanique quantique de Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë est un événement en soi. Par ailleurs ce tome 3 et ceux (1 et 2) déjà parus constituent à présent un corpus unique dans le domaine de l'enseignement de la Mécanique quantique. Les deux premiers tomes ont été étudiés par des générations d'étudiants et de jeunes chercheurs pour se former dans cette discipline réputée difficile et nul doute qu'à présent ce corpus sera une référence internationale scientifique et pédagogique incontournable pour tous ceux qui veulent apprendre la physique quantique et ses applications qui sont fort nombreuses de nos jours car cette dernière occupe une position centrale avec la relativité générale pour une compréhension intelligible du monde tel que nous le vivons.

Le Président et le Comité de lecture de l'AEIS ont pensé que la présentation institutionnelle de ces trois tomes devait figurer dans leur ouvrage dédié à ces deux grandes disciplines et à leurs implications les plus fondamentales.

Claude Cohen-Tannoudji ou l'histoire et la réalité illuminées

Cette recension a été publiée dans la revue *Raison Présente* de l'Union rationaliste, n° 204, décembre 2017. L'AEIS remercie Michèle Leduc pour son aimable autorisation à reproduire cet article.

Au mois de septembre 2017 est paru le troisième tome d'un cours de mécanique quantique célèbre dans le monde entier. Très attendue, cette suite expose les progrès récents de la discipline. Rigueur mathématique et clarté des discussions physiques caractérisent les trois volumes. Ces qualités, omniprésentes dans les cours au Collège de France de Claude Cohen-Tannoudji, aussi bien que dans ses livres, ici écrit avec deux physiciens d'envergure, Bernard Diu et Franck Laloë, nous ont permis de comprendre pourquoi ses explications et conférences répandaient autant de transparente beauté.

C'est que l'objet dont cette trinité parle est le même que la manière dont notre prix Nobel en parle : la lumière.

I. La réalité illuminée

En mesurant les ombres portées par les Pyramides, Thalès inventa, dit-on, la Géométrie; pour Platon, le soleil engendre la connaissance; auteur de quelques lois d'optique, Descartes célèbre les idées claires et distinctes; saint Jean et les Lumières comparent l'ignorance aux ténèbres... une tradition longue associe donc connaître à éclairer. En projetant un faisceau laser sur les atomes, Claude Cohen-Tannoudji avait déjà pris une place singulière et décisive parmi cette suite de génies puisqu'il la confirme mais y introduit aussi une coupure essentielle : chez lui, le couplage photon-atome les rend presque indiscernables l'un de l'autre.

Nos trois auteurs montrent en effet qu'un rayonnement spontané induit un décalage du spectre en énergie d'un système quantifié. Cette perturbation, qualifiée par Claude Cohen-Tannoudji de *déplacement lumineux* l'a poussé à comprendre l'interaction atome-photon dans sa globalité. Introduisant le concept d'*atome habillé*, sous entendu *baigné par la lumière*, le spectre énergétique de l'atome éclairé a ainsi pu être calculé exactement. La résolution de ce problème subtil, conjugué avec

l'avènement des sources laser ont inspiré de nombreuses avancées en physique atomique lors des dernières décennies.

Puisque sonder l'état physique d'un système revient la plupart du temps à le soumettre à un rayonnement dont les variations en dévoilent la nature, le monde de l'infiniment petit se mesure donc bien à l'aune d'une *réalité illuminée*.

II. Composition, intrication

Voici plus de deux millénaires, Lucrèce le premier composa d'atomes la réalité ; à sa suite, Leibniz la traita comme un agrégat de monades ; depuis les chimistes allemands, fascinés par l'affinité, depuis le livre de Jean Perrin, depuis Max Planck surtout, qui annonça les Quanta, nous pénétrâmes enfin dans l'intimité des particules. Et de nouveau, Claude Cohen-Tannoudji et ses pairs prennent une place éminente dans cette géniale tradition.

Voici. Entre lumière et particules se produisent plusieurs types d'échanges. Des transferts d'énergie, d'impulsion ou de moment cinétique, génèrent des actions radiatives sur les atomes à l'origine notamment du ralentissement et du refroidissement par rayonnement. La manipulation des degrés de liberté externes des atomes, entités infimes mais composites, est rendue possible par la lumière stimulée opérant en réalité sur leurs degrés de liberté internes. L'ensemble de ces échanges, établis dans un respect très strict des lois de conservation, conduisent à des règles de sélection fondamentales en physique atomique.

Pour les avancées décisives réalisées dans le domaine de l'interaction matière-rayonnement, Claude Cohen-Tannoudji a reçu le prix Nobel de Physique en 1997, il y a tout juste vingt ans. Ce dernier livre, coécrit à trois, propose, de plus, une présentation des états intriqués et invite à une réflexion sur le contenu physique de la mécanique quantique. Outre des questions d'interprétation délicates, la production de paires de photons jumeaux préfigure une forme idéale de cryptographie ainsi que le procédé de calcul parallèle des ordinateurs quantiques. L'intrication, idée mathématique désormais concrétisée, est-elle une forme spéciale d'interaction ?

Comprenons-nous vraiment la Mécanique Quantique ? Dans un ouvrage récent, Franck Laloë, l'un des coauteurs du livre, a tenté brillamment de faire le point sur les interprétations possibles de la physique des Quanta.

III. Le miracle des mathématiques

Mathématiques : abstraites ou concrètes ? Comment a-t-il pu se faire que les courbes dites coniques inventées par Apollonius de Perge au III^e siècle avant J.-C. ait servi

aux astronomes du XVI^e siècle de notre ère pour décrire les mouvements des planètes autour du Soleil ? Pourquoi telle formule explicite la chute des corps, que telle autre équation semble organiser le mouvement des fluides ? Cette interrogation ne cessa de se poser dans l'Histoire ; question à laquelle Galilée répondit jadis en disant que le monde était écrit en langue mathématique.

Nous ne cessons de la reposer. Comment se fait-il que des formules de plus en plus abstraites nous ouvrent la plus secrète des réalités ? Ouvrez le livre que nous citons, vous ne tarderez pas à vous éblouir de ce que cette langue, inventée de manière formelle et poussée au comble de l'abstraction SOIT précisément celle du réel le plus fin. Faut-il que les choses que nous inventons décrivent le réel tel quel, et cela d'autant mieux qu'elles plongent dans l'abstrait le plus ardu ? Einstein réputait incompréhensible cette compréhension du monde. Et pourtant, il en est ainsi, et ici mieux qu'ailleurs et même mieux qu'avant.

Le dernier triptyque du célèbre cours illustre très bien la grande unité du formalisme mathématique utilisé avec succès aussi bien dans le cadre de la quantification des particules que dans celle du rayonnement électromagnétique. Décrits dans des espaces de Hilbert, les états des systèmes sont obtenus à l'aide d'opérateurs de création ou d'annihilation bien adaptés à la problématique du dénombrement des particules identiques et indiscernables. Regroupements bosoniques et exclusions fermioniques se révèlent très clairement par le calcul des fonctions de corrélations.

Les premières prédictions de la mécanique quantique, édictées par les mathématiciens, ont donné lieu à des expériences de pensée devenues célèbres. Les progrès technologiques nés de la maîtrise de l'interaction atome-photon autorisent aujourd'hui des tests très précis sur ces questions fondamentales. Couronnés de succès, ces résultats semblent établir que la mécanique quantique construit un pont entre notre univers classique et un monde plus abstrait.

À quelle échelle et pourquoi la réalité, possiblement multiple du monde de l'infiniment petit, se fige-t-elle à la manière dont nous apparaît le réel, peut-être unique ? Quelles manipulations, quelles mathématiques nous l'apprendront ?

IV. Tombeau du matérialisme ?

Des nombreux sens du mot tombeau, le texte qui suit en choisit deux et les développe de concert : monument funéraire sous lequel gît un cadavre ; œuvre poétique ou musicale en l'honneur d'une personne ou d'une chose d'importance disparues quoique sans cesse renaissantes.

François Jacob allait disant : « Nous n'étudions plus la vie dans nos laboratoires ». De fait, nous y pourchassons les acides aminés, le cycle de Krebs ou la topologie pliée

des molécules. Ainsi, le vitalisme recule-t-il, pas à pas, de tissus en cellules, de molécules en éléments, sous le brouillard de la métaphysique. Sauf, qu'en dernière analyse, subsiste la question *pourquoi* dont l'inquiétude recule avec les solutions progressives à la question *comment* : qu'est-ce qui a fait que la première molécule se dupliqua ?

Depuis *Les Atomes* de Jean Perrin jusqu'aux dernières œuvres de Claude Cohen-Tannoudji, ici accompagné, comme en une cordée, par deux autres savants, nous pourrions dire que nous n'étudions plus la matière dans nos laboratoires, puisque nous y pourchassons fermions et bosons. Ainsi, sous le brouillard métaphysique, le matérialisme ne cesse-t-il de reculer, pas à pas, du cristal aux molécules, d'atomes en particules. Sauf qu'en dernière analyse, subsiste la question de la matière, dont on ne sait encore si la dissocier de la lumière est une décision pertinente.

Reculer, voilà le verbe adéquat, vers, voici la préposition adaptée. Vitalisme et matérialisme ressemblent, en effet, à deux armées en déroute qui, rebroussant chemin devant l'avancée ennemie, prend ses quartiers où elle peut encore s'accrocher pour se défendre. Voici donc toute l'histoire : la matière, la masse résidaient d'abord parmi les éléments ; quand il n'y eut plus d'eau d'air ni de terre restèrent cristaux et molécules ; sous ces derniers, les atomes ; puis les particules. Où va donc, en dernier recours, se nicher la matière, d'autant que depuis la découverte du boson de Higgs, il semble que la relation produise la masse ?

Vecteur d'information, la lumière joue également un rôle actif et structurant. En effet, tandis qu'il y a peu étaient utilisés des objets au travers desquels la lumière diffractait puis interférait, aujourd'hui, les jets d'atomes interagissent avec des ondes électromagnétiques stationnaires conduisant, par échange d'impulsion, à une diffraction puis à des interférences *particulières*. Guidés par la lumière, les *ondes de matière* offrent des perspectives inédites et prometteuses à une optique, désormais atomique, pour laquelle la longueur d'onde de de Broglie revient au premier plan.

Fiat lux ! À peu près 370 000 ans après le mur de Planck, une formidable brisure de symétrie a libéré les premiers photons. Refroidie par l'expansion de l'espace, cette lumière originelle illumina l'univers, devenu alors d'une transparente incandescence ; elle contribue aujourd'hui au rayonnement cosmologique diffus. Depuis lors, la lumière émerge et disparaît d'interactions matérielles. De la médiation du rayonnement spontané à l'entrelacement profond de l'émission laser stimulée, les photons pénètrent plus loin l'intimité des atomes, offrant un dialogue, peut-être inédit, entre ces partenaires initialement unifiés.

Fervents de la lumière ou dévots de la matière, les philosophies les plus opposées depuis deux ou trois millénaires se donneraient-elles enfin la main, sous la bénédiction de Cohen-Tannoudji et de ses deux talentueux équipiers ?

V. Empirisme et sens commun

Jusqu'aux années vingt du XX^e siècle, il existait une sorte de vision du monde commune au public et aux savants. *L'Astronomie populaire* de Flammarion et les romans de Jules Verne en donnent autant d'illustrations. À partir des Quanta et de la Relativité, les sciences exactes quittent le sens commun et donc le public, même cultivé. Elles entrent dans un monde contre-intuitif. Vieille et vénérable question : les sciences exactes, mieux, nos connaissances en général, commencent-elles par les sens ? Vu l'équipement ultra sophistiqué des laboratoires, on peut en douter. Elles commenceraient plutôt par la modélisation et les mathématiques.

Richard Feynman considérait l'intrication comme la part la plus mystérieuse – hors du sens commun – de la mécanique quantique. Si le paradoxe EPR énoncé par Einstein avait pour objectif de réfuter l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique, Bell a montré par un jeu d'inégalités que la question pouvait être tranchée par la mesure. Comme l'ont révélé les expériences d'Alain Aspect à Orsay au début des années quatre-vingts, la mécanique quantique viole ces inégalités, sous-tendant une non séparabilité des systèmes et une non localité de la théorie, notions quasi contre intuitives. Mais où sont donc passés le sens commun ou le bon sens de nos aïeux et leurs évidences visibles ?

VI. Conclusion

Voilà donc quelques courbes de niveau historiques qui, dans cette œuvre de génies, convergent et se croisent en un lieu où elles se confirment, certes, mais qui les transforme et parfois les renverse, les fait apparaître, en tous cas, sous un jour si nouveau qu'on les reconnaîtrait à peine, sous l'éclat et le scintillement de l'étoile qu'elles forment.

Nous voilà revenus à la lumière du commencement.

Olivier Joachim, professeur de physique en classe préparatoire
et Michel Serres, membre de l'Académie française

2. Avant-propos du Tome III

Ce tome III poursuit l'étude de la mécanique quantique présentée dans les tomes I et II de notre ouvrage. Il introduit de nouvelles approches et méthodes de calcul qui se révèlent essentielles pour décrire et interpréter des phénomènes physiques observés dans de nombreux domaines de la physique, dont certains sont en plein développement.

Un premier sujet étudié est l'étude des ensembles de particules identiques, libres ou en interaction. De tels systèmes ont déjà été décrits dans le Chapitre XIV du tome II en partant du postulat de symétrisation, qui impose à la fonction d'onde du système global de rester invariante par permutation de deux particules (cas des bosons, de spin entier ou nul) ou de changer de signe dans une permutation impaire (cas des fermions, de spin demi-entier). Dans ce tome III, nous introduisons une autre méthode qui conduit à des calculs souvent beaucoup plus simples, parfois appelée « seconde quantification ». Cette description est basée sur l'utilisation dans un « espace de Fock » d'opérateurs d'annihilation a_i et de création a_i^\dagger , qui respectivement détruisent ou créent une particule dans un état $|u_i\rangle$ appartenant à une base orthonormée. Les relations de commutation ou d'anti-commutation de ces opérateurs sont parfaitement équivalentes aux propriétés de symétrie des fonctions d'ondes imposées par le postulat de symétrisation du Chapitre XIV. La méthode est illustrée par l'étude de nombreux exemples, comme les propriétés des électrons dans un solide ou celles des atomes identiques dans un gaz à très basse température. Dans les approximations de « champ moyen », souvent utilisées pour prendre en compte les interactions entre particules, l'évolution de chaque particule dans un système de N particules est décrite comme résultant de l'interaction moyenne de cette particule avec les $N-1$ autres. On établit ainsi les équations de Hartree-Fock (pour des fermions) et de Gross-Pitaevskii (pour des bosons). L'étude de l'équation de Gross-Pitaevskii permet en particulier de comprendre certains aspects d'un phénomène physique important, la superfluidité des bosons. Nous présentons également le phénomène d'appariement en mécanique quantique, de façon unifiée en traitant dans le même cadre général fermions (condensation « BCS » pour Bardeen-Cooper-Schrieffer) et bosons (théorie de Bogolubov). Pour des fermions, la théorie BCS est à la base de notre compréhension de la supraconductivité dans les métaux. Notre étude des états appariés permet également de discuter dans quelle mesure un système de deux fermions appariés peut se comporter comme un boson. Mentionnons enfin que, dans le cas où la base $|u_i\rangle$ est la base $|r\rangle$ des états propres de l'opérateur position, les opérateurs d'annihilation et de création $\psi(r)$ et $\psi^\dagger(r)$ sont des champs d'opérateurs et constituent un exemple de « champ quantique ». Ainsi, la valeur moyenne $\langle \psi^\dagger(r_1)\psi^\dagger(r_2)\psi(r_2)\psi(r_1) \rangle$ est une « fonction de corrélation » spatiale, décrivant comment la détection d'une particule en r_1 influence la détection d'une autre particule en r_2 . On peut ainsi obtenir un nouvel éclairage sur les interférences spatiales en physique quantique ; elles sont associées, non plus à une interférence entre deux ondes classiques, mais à une interférence entre deux amplitudes de probabilité quantiques associées à deux chemins différents conduisant le système d'un même état initial à un même état final.

Un second grand sujet abordé dans ce tome III est la théorie quantique du champ électromagnétique. Certes, le Chapitre XIII du tome II abordait la description des interactions matière-rayonnement, mais uniquement dans le cadre de la théorie des perturbations dépendant du temps où le champ est décrit classiquement ; des notions essentielles, comme

par exemple celle d'émission spontanée, sont alors perdues. De surcroît, la compréhension de phénomènes couramment observés (par exemple en optique quantique) requiert une description quantique du rayonnement. Nous avons donc consacré plusieurs chapitres à ces sujets. Afin de partir d'une base solide, nous commençons au Chapitre XVIII par des rappels d'électromagnétisme classique, ce qui a l'avantage de considérablement simplifier l'exposé de la quantification. Cette dernière est ensuite introduite au Chapitre XIX avec la présentation d'une théorie quantique du champ électromagnétique de manière aussi simple que possible, ainsi que de ses interactions avec les atomes. Nous montrons ainsi comment apparaissent les excitations élémentaires du champ, les photons. Les processus fondamentaux d'interaction atomes-photons (absorption, émissions induite et spontanée) sont introduits, y compris la photo-ionisation (absorption d'un photon faisant passer l'atome de son état fondamental vers le continuum d'ionisation). L'accent est mis aussi sur les lois de conservation du moment cinétique total et de l'impulsion totale lors de l'absorption d'un photon par un atome. Ces lois sont en effet à la base de méthodes importantes, comme le pompage optique et le refroidissement et le piégeage d'atomes par des faisceaux laser ; elles peuvent être considérées comme des outils de manipulation d'atomes par la lumière et ont donné naissance à de nombreuses applications. Des processus d'ordre supérieur, faisant intervenir plusieurs photons dans une transition entre deux niveaux atomiques, sont également étudiés. On montre aussi comment le comportement d'un atome dans un champ intense, résonnant ou quasi-résonnant, peut être interprété en termes d'atome « habillé » par les photons avec lesquels il interagit.

Mentionnons enfin que, dans la théorie quantique du rayonnement, les opérateurs associés au champ électrique constituent un autre exemple de champ quantique, différent de celui mentionné plus haut pour des particules matérielles identiques. Dans ce cas également, on peut introduire des fonctions de corrélation spatiales très utiles pour comprendre comment des effets d'interférence peuvent apparaître sur la distribution des positions où sont détectés les photons, même si les deux faisceaux lumineux qui interfèrent sont incohérents (effet Handbury Brown-Twiss).

Les corrélations entre particules matérielles ou entre photons sont un exemple important de corrélations entre deux systèmes dans la mesure où une observation effectuée sur un système modifie les prédictions sur une observation effectuée sur l'autre. Bien sûr, des corrélations peuvent aussi exister entre deux systèmes classiques. Pour souligner les différences importantes entre corrélations classiques et quantiques, nous introduisons, dans le dernier chapitre de ce tome III, la notion fondamentale d'intrication quantique : deux systèmes 1 et 2 sont intriqués si le vecteur d'état qui décrit leur état n'est pas un simple produit de deux vecteurs d'état, un pour le système 1 et un autre pour le système 2. Nous analysons en détail plusieurs conséquences physiques intéressantes d'une telle situation qui est à la base d'un domaine très actif de recherches à l'heure actuelle. Ce chapitre nous fournit ainsi l'occasion de discuter le théorème d'Einstein, Podolsky et Rosen, ainsi que celui de Bell, et de souligner certains aspects troublants de la mécanique quantique.

L'ouvrage se termine par quatre appendices, dont deux exposent une autre façon d'introduire la mécanique quantique. L'Appendice IV expose brièvement la méthode de l'intégrale de chemin de Feynman, qui constitue une procédure de quantification différente de la quantification canonique, très importante par exemple en théorie quantique des

champs. L'Appendice VII sur la transformée de Wigner montre comment il est possible de reformuler la mécanique quantique en termes de quasi-distributions, ce qui peut d'ailleurs également fournir une procédure de quantification.

Malgré un intervalle de temps de plusieurs décennies, nous avons porté toute notre attention à conserver l'esprit des deux premiers tomes, avec un style d'exposition où toutes les étapes du raisonnement sont explicitées. Nous avons conservé la structure de l'ouvrage en chapitres et compléments où les chapitres, au nombre de 7, peuvent être lus indépendamment des compléments ; chacun de ces derniers est d'ailleurs rédigé comme un ensemble indépendant. Le but des compléments est de prolonger ou d'approfondir tel ou tel aspect abordé dans le chapitre qui précède, et de présenter des applications possibles.

En première lecture, il est déconseillé de lire tous les compléments dans l'ordre où ils se présentent. En fonction de ses intérêts et de son degré d'avancement dans la lecture, chacun pourra choisir ceux qui l'intéressent. Il sera guidé pour cela, à la fin de chaque chapitre, par une liste commentée de l'ensemble de ses compléments.

Il est indéniable que le niveau du tome III est (un peu) supérieur à celui des deux premiers tomes, qui s'adressent à ceux qui débutent en mécanique quantique. Nous n'avons pas hésité à procéder à de nombreux renvois vers les tomes I et II, au cas où le lecteur n'aurait plus en tête les bases de la théorie. Mais ce n'est pas pour autant que ce tome III se place au niveau d'un cours de mécanique quantique avancée. Nous renvoyons d'ailleurs à plusieurs reprises le lecteur à des ouvrages plus complets que le nôtre ou des références plus avancées.

Remerciements

Nicole et Daniel Ostrowsky ont, à l'occasion de leur traduction du texte en anglais, proposé de nombreuses améliorations ou clarifications, et nous leur en sommes très reconnaissants. Nombreux sont en fait les collègues et amis qui ont grandement contribué à la mise au point de cet ouvrage. Cela nous a d'autant plus aidés que chacun, dans son style propre, nous a apporté des remarques et suggestions complémentaires, et toujours utiles. Tous nos remerciements vont donc en particulier à :

Pierre-François Cohadon, Jean Dalibard, Sébastien Gleyzes, Markus Holzmann, Thibaut Jacqmin, Philippe Jacquier, Amaury Mouchet, Nicole Ostrowsky, Jean-Michel Raimond, Félix Werner.

De plus, Marco Picco et Pierre Cladé nous ont grandement aidés à maîtriser certains aspects délicats de la typographie Latex. Roger Balian, Edouard Brézin et William Mullin nous ont fait bénéficier d'utiles conseils et suggestions. Enfin, pour un certain nombre de figures, nous remercions vivement pour leur aide Geneviève Tastevin, Pierre-François Cohadon et Samuel Deléglise.

3. Présentation des Tomes I et 2

3.1 Mécanique quantique I

Ondes et particules. Introduction aux idées fondamentales de la mécanique quantique. Les outils mathématiques de la mécanique quantique. Les postulats de la mécanique quantique. Application des postulats à des cas simples : spin $1/2$ et systèmes à deux niveaux. L'oscillateur harmonique à une dimension. Propriétés générales à des moments cinétiques en mécanique quantique. Particule dans un potentiel central. Atome d'hydrogène.

3.2 Mécanique quantique II

Notions élémentaires sur la théorie de la diffusion par un potentiel. Le spin de l'électron. Composition des moments cinétiques. Théorie des perturbations : structure fine et hyperfine de l'atome d'hydrogène. Perturbation dépendant du temps. Systèmes de particules identiques. Appendices : séries de Fourier et transformation de Fourier. La fonction de Dirac. Lagrangien et Hamiltonien en mécanique classique.

4. Table des matières du Tome III

XV Opérateurs de création et d'annihilation pour des particules identiques	1
A Formalisme général	2
B Opérateurs symétriques à une particule	14
C Opérateurs à deux particules	19
Compléments du chapitre XV GUIDE DE LECTURE	29
A _{XV} Particules et trous	33
1 Etat fondamental d'un gaz de fermions sans interactions . .	33
2 Nouvelle définition des opérateurs de création et d'annihilation	34
3 Vide d'excitations	35
B _{XV} Gaz parfait en équilibre thermique; fonctions de distribution quantiques	37
1 Description grand-canonique d'un système sans interactions	38
2 Valeurs moyennes des opérateurs symétriques à une particule	40
3 Opérateurs à deux particules	44
4 Nombre total de particules	47
5 Equation d'état, pression	52

C_{XV}	Systèmes de bosons condensés, équation de Gross-Pitaevskii	57
1	Notations, ket variationnel	57
2	Une première approche	59
3	Généralisation, calcul en notation de Dirac	62
4	Discussion physique	65
D_{XV}	Équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps	73
1	Evolution temporelle	73
2	Analogie hydrodynamique	80
3	Ecoulements métastables, superfluidité	83
E_{XV}	Systèmes de fermions, approximation de Hartree-Fock	95
1	Les bases de la méthode	96
2	Généralisation : méthode opératorielle	107
F_{XV}	Fermions, Hartree-Fock dépendant du temps	119
1	Ket variationnel et notations	119
2	Méthode variationnelle	120
3	Calcul de l'optimisateur	123
4	Equations du mouvement	125
G_{XV}	Fermions ou bosons : équilibre thermique en champ moyen	129
1	Principe variationnel	130
2	Approximation de l'opérateur densité à l'équilibre	134
3	Equations de champ moyen dépendant de la température	144
H_{XV}	Applications de la méthode du champ moyen à température non nulle	153
1	Hartree-Fock à température non nulle, bref rappel	153
2	Système homogène	154
3	Magnétisme spontané de fermions répulsifs	157
4	Bosons : équation d'état, instabilité attractive	165
<hr/> <hr/>		
XVI	Opérateur champ	171
A	Définition de l'opérateur champ	172
B	Opérateurs symétriques	175
C	Evolution dans le temps de l'opérateur champ (point de vue de Heisenberg)	184
D	Lien avec la quantification d'un champ	186
Compléments du chapitre XVI		
GUIDE DE LECTURE		189
A_{XVI}	Corrélations spatiales dans un gaz parfait de bosons ou de fermions	191
1	Système dans un état de Fock	191
2	Fermions dans l'état fondamental	194
3	Bosons dans un état de Fock	198

B_{XVI}	Fonctions de corrélation spatio-temporelles, fonctions de Green	203
1	Fonctions de Green dans l'espace ordinaire	203
2	Transformées de Fourier	212
3	Fonction spectrale, règle de somme	218
C_{XVI}	Théorème de Wick	223
1	Démonstration du théorème	223
2	Applications : fonctions de corrélation d'un gaz parfait . .	228
<hr/>		
XVII	Etats appariés de particules identiques	235
A	Opérateurs création et annihilation d'une paire de particules	238
B	Construction d'états appariés	242
C	Propriétés des kets caractérisant les paires d'états	247
D	Corrélations entre particules, fonction d'onde de paires . .	255
E	Les états appariés comme vide de quasi-particules; transformations de Bogolubov-Valatin	261
Compléments du chapitre XVII		
GUIDE DE LECTURE		269
A_{XVII}	Opérateur champ de paires de particules identiques	271
1	Opérateurs de création et d'annihilation de paires	272
2	Valeurs moyennes dans un état apparié	277
3	Relations de commutation des opérateurs champ	288
B_{XVII}	Energie moyenne dans un état apparié	295
1	Utilisation d'états qui ne sont pas états propres du nombre total de particules	295
2	Hamiltonien	297
3	Fermions de spin 1/2 dans un état singulet	300
4	Bosons de spin nul	306
C_{XVII}	Appariement de fermions, théorie BCS	315
1	Optimisation de l'énergie	317
2	Fonctions de distribution, corrélations	326
3	Discussion physique	341
4	Etats excités	346
D_{XVII}	Paires de Cooper	355
1	Le modèle de Cooper	355
2	Vecteur d'état et hamiltonien	355
3	Solution de l'équation aux valeurs propres	357
4	Calcul de l'énergie de liaison dans un cas simple	357

E_{XVII}	Bosons répulsifs condensés	361
1	Etat variationnel, énergie	363
2	Optimisation	365
3	Propriétés de l'état fondamental	368
4	Méthode opératorielle de Bogolubov	379
<hr/>		
XVIII	Rappels d'électrodynamique classique	385
A	Electrodynamique classique	387
B	Description du champ transverse comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques	396
Complément du chapitre XVIII		
GUIDE DE LECTURE		405
A_{XVIII}	Formulation lagrangienne de l'électrodynamique	407
1	Lagrangien avec divers types de variables	408
2	Application au champ de rayonnement libre	414
3	Lagrangien du système global champ + particules en interaction	420
<hr/>		
XIX	Quantification du rayonnement électromagnétique	425
A	Quantification du rayonnement en jauge de Coulomb	427
B	Les photons, excitations élémentaires du champ quantique libre	432
C	Description des interactions	437
Compléments du chapitre XIX		
GUIDE DE LECTURE		445
A_{XIX}	Echanges d'impulsion entre atomes et photons	447
1	Recul d'un atome libre absorbant ou émettant un photon	448
2	Applications de la force de pression de radiation : ralentissement et refroidissement des atomes	453
3	Blocage du recul par un confinement spatial	464
4	Suppression du recul dans certains processus multiphotoniques	469
B_{XIX}	Moment cinétique du rayonnement	473
1	Valeur moyenne du moment cinétique pour une particule de spin 1	474
2	Moment cinétique du rayonnement libre classique en fonction des variables normales	477
3	Discussion physique	480
C_{XIX}	Echanges de moment cinétique entre atomes et photons	485
1	Transfert de moment cinétique de spin aux variables atomiques internes	486
2	Les méthodes optiques	488
3	Transfert de moment cinétique orbital aux variables atomiques externes	495

XX	Absorption, émission, et diffusion de photons par un atome	497
A	Outil de base : l'opérateur d'évolution	498
B	Absorption de photons entre deux niveaux atomiques discrets	503
C	Processus d'émission induite et d'émission spontanée	510
D	Rôle des fonctions de corrélation dans les processus à un photon	514
E	Diffusion de photons par un atome	516
Compléments du chapitre XX		
GUIDE DE LECTURE		527
A_{XX}	Exemple de processus multiphotonique : absorption à deux photons	529
1	Rayonnement monochromatique	529
2	Rayonnement non monochromatique	533
3	Discussion physique	537
B_{XX}	Photo-ionisation	541
1	Brefs rappels sur l'effet photo-électrique	542
2	Calcul des taux de photo-ionisation	544
3	Une théorie quantique du rayonnement est-elle essentielle pour décrire la photo-ionisation ?	550
4	Photo-ionisation à deux photons	556
5	Ionisation tunnel avec des champs laser intenses	559
C_{XX}	Atome à deux niveaux dans un champ monochromatique.	
	Méthode de l'atome habillé	561
1	Brève description de la méthode de l'atome habillé	563
2	Domaine des couplages faibles	569
3	Domaine des couplages forts	574
4	Modifications du champ. Dispersion et absorption	580
D_{XX}	Les déplacements lumineux : un outil pour manipuler les atomes et le champ	585
1	Forces dipolaires et pièges laser	585
2	Miroirs pour atomes	587
3	Réseaux optiques	588
4	Refroidissement sub-Doppler. Effet Sisyphé	589
5	Détection non destructive d'un photon	593
E_{XX}	Détection de paquets d'ondes à un ou deux photons, interférences	597
1	Paquets d'ondes à un photon, probabilité de photo-détection	599
2	Signaux d'interférence à un ou deux photons	602
3	Amplitude d'absorption d'un photon par un atome	608
4	Diffusion d'un paquet d'ondes	610
5	Exemple de paquet d'ondes à deux photons intriqués	615
<hr/>		
XXI	Intrication quantique, mesures, inégalités de Bell	623
A	Notion d'intrication, buts de ce chapitre	624
B	Etats intriqués d'un système de deux spins 1/2	626
C	Intrication entre systèmes physiques quelconques	629
D	Mesure idéale et états intriqués	632

E	Expériences “quel chemin” : peut-on identifier le chemin suivi par le photon dans l’expérience des fentes d’Young ? .	639
F	Intrication, non-localité, théorème de Bell	641
Compléments du chapitre XXI		
GUIDE DE LECTURE		651
A_{XXI}	Opérateur densité et corrélations ; séparabilité	653
1	Entropie statistique de von Neumann	653
2	Différences entre corrélations classiques et quantiques . . .	656
3	Séparabilité	659
B_{XXI}	Etats GHZ, échange d’intrication	663
1	Désaccord de signe dans un état GHZ	663
2	Échange d’intrication	668
C_{XXI}	Emergence d’une phase relative sous l’effet de processus de détection	673
1	Probabilités des mesures de position simple, double, etc. .	674
2	Augmentation de l’intrication sous l’effet du processus de détection	679
3	Détection d’un grand nombre de particules Q	681
D_{XXI}	Emergence d’une phase relative sur des condensats à spin, argument EPR et non-localité macroscopiques	689
1	Deux condensats à spin	690
2	Probabilités des différents résultats de mesure	692
3	Discussion	696
<hr/> <hr/>		
APPENDICES		703
IV	Intégrale de chemins de Feynman	703
1	Propagateur quantique d’une particule	704
2	Interprétation en termes d’histoires classiques	708
3	Discussion ; une nouvelle règle de quantification	710
4	Opérateurs	712
<hr/>		
		Avant-propos
V	Multiplicateurs de Lagrange	717
1	Fonction de deux variables	717
2	Fonction de N variables	719
VI	Rappels de mécanique statistique quantique	721
1	Ensembles statistiques	721
2	Variables intensives ou extensives ; valeur des grandeurs physiques	729

VII	Transformée de Wigner	735
1	Fonction delta d'un opérateur	737
2	Distribution de Wigner de l'opérateur densité (particule sans spin)	737
3	Transformée de Wigner d'un opérateur	749
4	Généralisations	757
5	Discussion physique, distribution de Wigner et effets quantiques	758

BIBLIOGRAPHIE	765
----------------------	------------

INDEX	770
--------------	------------

Christophe Salomon

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Sorbonne Université,
Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

Note

Ce chapitre reprend l'essentiel du texte préparé pour le séminaire Poincaré de l'année 2010. Les horloges atomiques ont beaucoup progressé depuis et le lecteur intéressé pourra utilement se reporter à la référence 4 ci-dessous pour suivre les derniers développements.

I. Un peu d'histoire : la quête de la précision

Depuis l'antiquité les hommes ont toujours cherché à mesurer le temps ou, plus précisément, les intervalles de temps. Ils se sont d'abord tournés vers les phénomènes naturels qui présentent une grande régularité comme la rotation de la Terre autour du Soleil, la rotation de la Lune autour de la Terre ou encore la rotation de la Terre sur elle-même pour définir des calendriers et des échelles de temps. Ils ont ensuite cherché à réaliser eux-mêmes des instruments toujours plus précis et l'un des plus anciens instruments connus est le sablier égyptien. Cependant, il faudra attendre le début des années 1600 et la découverte du pendule par Galilée et sa mise en pratique par Huygens, pour que ces instruments commencent à atteindre une précision de l'ordre de quelques dizaines de secondes par jour (figure 1).

Les petites oscillations du pendule sont indépendantes de l'amplitude du mouvement et sont remarquablement régulières, c'est-à-dire périodiques (figure 2). La période du pendule ne dépend que d'un petit nombre de paramètres, la longueur du fil l et l'accélération de la pesanteur g : $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. Cette formule simple montre également les limites du dispositif : si la longueur du fil change, à cause de la température par exemple, l'horloge perdra sa précision ; de même si l'accélération de la pesanteur change (par exemple en prenant de l'altitude). Poussés par les enjeux de la navigation marine transocéanique et la détermination de la longitude, mais aussi par les prix en espèces sonnantes et trébuchantes promis par les

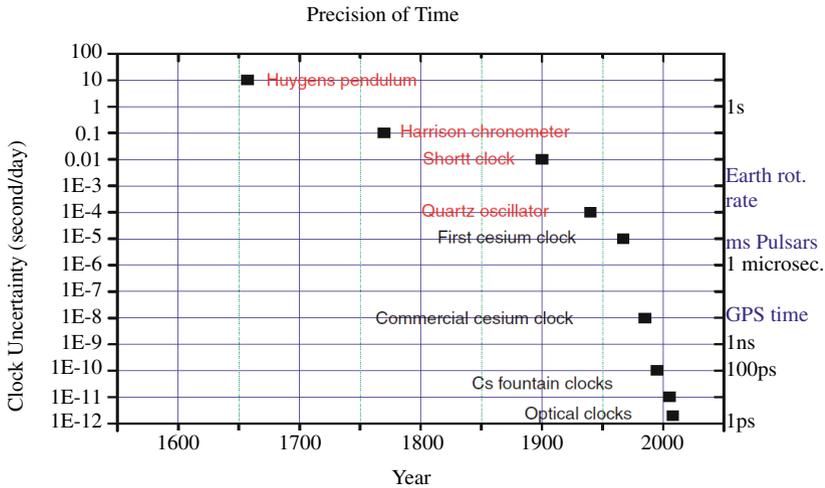


Figure 1. L'évolution de la précision de la mesure du temps sur les quatre derniers siècles. Avant 1950 les horloges utilisaient des systèmes mécaniques comme le pendule ou les montres à échappement. Depuis le milieu du XX^e siècle, les horloges les plus précises sont des horloges atomiques. Les horloges les plus récentes présentent une erreur qui n'excède pas une seconde tous les 15 milliards d'années, l'âge de l'Univers.

souverains des deux siècles suivants, les pendules, montres mécaniques et chronomètres ont subi des raffinements de plus en plus avancés. Combattant l'influence néfaste des changements de température et d'humidité sur le fonctionnement de ses chronomètres, Harrison finit par produire en 1759, après quarante années d'efforts un instrument qui présentait une erreur inférieure à un dixième de seconde par jour. Son chronomètre fut testé en mer par un navire britannique qui fit l'aller et retour Portsmouth - les Antilles en un peu moins de 3 mois. Au retour, le chronomètre embarqué avait moins de 5 secondes d'écart avec ceux restés au sol. Il reçut pour cet exploit un prix de 40 000 livres, une somme considérable pour l'époque !

La percée scientifique suivante fut l'invention de l'oscillateur à quartz en 1918. Le système périodique n'est plus un système mécanique mais un champ électromagnétique oscillant reposant sur les propriétés piézoélectriques du quartz. La vibration mécanique du cristal de quartz produit un champ électrique oscillant à une fréquence bien définie et bien plus élevée que celle du pendule (quelques millions d'oscillations par seconde). Ce champ est amplifié électroniquement jusqu'à atteindre le seuil d'oscillation, ce qui se produit lorsque le gain de l'amplificateur excède les pertes du système. Les montres et oscillateurs à quartz ont envahi notre monde moderne et constituent une base de temps suffisamment stable pour la plupart des applications courantes.

Cependant, comme le pendule, mais à un degré bien moindre, l'oscillateur à quartz présente des dérives en température. Pour domestiquer ces oscillateurs, les physiciens ont eu l'idée de réaliser une horloge atomique qui combine les propriétés de l'oscillateur à quartz et celles de l'atome. Dans un atome, l'énergie d'excitation ne peut prendre que



Figure 2. Le pendule de Galilée/Huygens. Les petites oscillations du pendule sont indépendantes de l'amplitude du mouvement et sont remarquablement périodiques. En comptant le nombre d'oscillations du pendule, on mesure un intervalle de temps, réalisant ainsi une horloge. Plus la période du pendule est courte, plus élevé sera le nombre d'oscillations dans un intervalle de temps donné et plus précise sera la mesure de cet intervalle. Enfin, une formule simple relie la période des oscillations à la longueur du fil et à l'accélération de la gravité indiquant aussi les limites d'un tel dispositif, les variations de température et les variations de l'accélération de la pesanteur.

des valeurs discrètes ; on dit que les niveaux d'énergie sont quantifiés ; ils sont régis par les lois de la mécanique quantique qui gouverne le comportement des objets microscopiques. Les niveaux d'énergie ne dépendent pas de la température (ou plus exactement très, très peu !). Les atomes sont universels : un atome de césium à Paris présentera exactement les mêmes propriétés qu'un atome de césium à New-York ou Tokyo. Ce n'est pas le cas des pendules ou des oscillateurs à quartz qui sont extrêmement difficiles à réaliser à l'identique. La première horloge à césium réalisée en Angleterre par Essen et Parry en 1955 fonctionnait sur le principe décrit sur la figure 3 et son erreur journalière n'était que de 0,00001 seconde bien plus faible que l'erreur d'un quartz ou des meilleurs systèmes mécaniques.

La 13^e Conférence générale des poids et mesures de 1967 choisit ainsi l'atome de césium pour donner la définition actuelle de la seconde du système international d'unités : « La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état électronique fondamental du césium 133 ». Depuis cette époque, plusieurs milliers d'horloges à césium commerciales ont été produites pour de nombreuses applications dont le fameux système de navigation par satellite GPS. Au début des années 1990, les atomes refroidis par laser ont permis d'augmenter la précision des horloges à césium par encore deux ordres de grandeur. En effet, à une température

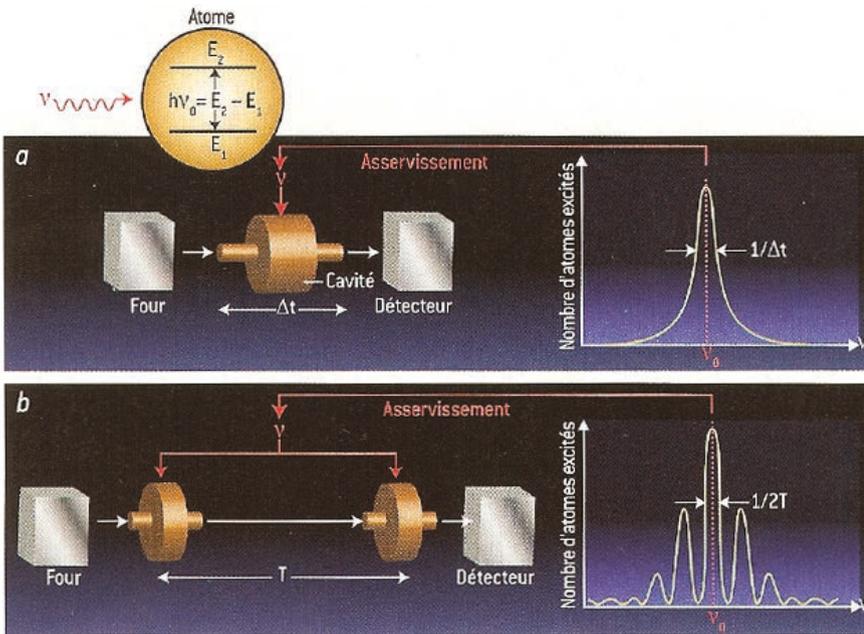


Figure 3. Principe d'une horloge atomique. Une radiation électromagnétique de fréquence ν éclaire un ensemble d'atomes à deux niveaux d'énergie E_1 (fondamental) et E_2 (excité). La séparation en énergie est $h\nu_0$ ou h est la constante de Planck. Les atomes de césium issus d'un four forment un jet atomique qui traverse une cavité où la radiation est appliquée. Le détecteur D compte le nombre d'atomes portés dans l'état excité quand la radiation de fréquence ν est proche de la fréquence atomique ν_0 . Lorsqu'on balaye la fréquence de la radiation autour de ν_0 , le nombre d'atomes excités fournit une courbe en cloche, une courbe de résonance centrée en ν_0 , dont la largeur est inversement proportionnelle au temps d'interaction Δt entre la radiation et les atomes. La méthode proposée par N. Ramsey utilise deux zones séparées dans l'espace. Les atomes subissent deux interactions successives séparées dans le temps par une quantité T . Il en résulte un phénomène d'interférence produisant des franges de largeur $1/2T$. Plus les atomes sont lents, plus les franges seront étroites et meilleure sera l'horloge.

de un millionième de degré au-dessus du zéro absolu les atomes de césium ont une vitesse d'agitation de seulement 7 millimètres par seconde. Ils peuvent être utilisés en fontaine atomique de façon à obtenir un temps d'interaction avec l'onde électromagnétique excitatrice approchant 1 seconde (figure 4). Cette durée est cent à mille fois plus longue que dans l'horloge à jet atomique de Essen et Parry. Les fontaines atomiques du LNE-SYRTE présentent une erreur de 10 picosecondes par jour et, avec d'autres horloges disséminées dans le monde, contribuent à la réalisation du temps atomique international (TAI) qui est le temps de référence au niveau mondial. Aujourd'hui, une vingtaine de fontaines atomiques sont en fonctionnement dans le monde et sont régulièrement comparées entre elles pour réaliser le TAI.

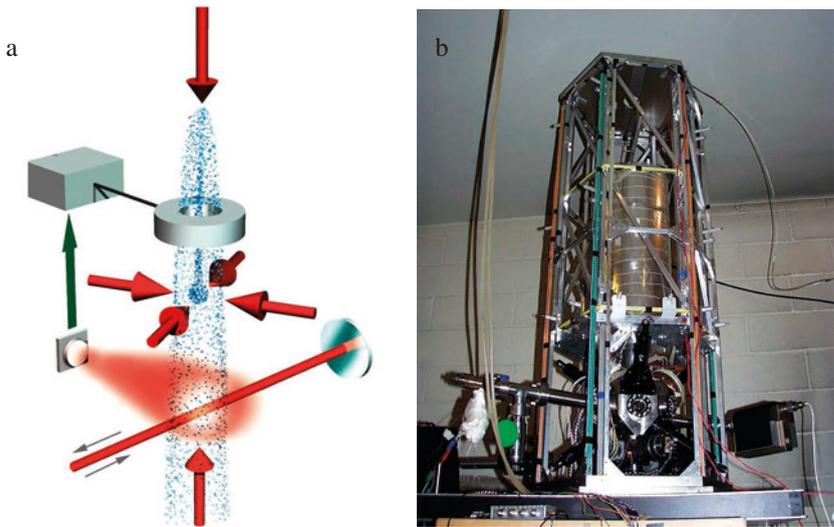


Figure 4. (a) Une fontaine atomique. Les atomes de césium sont refroidis par laser à une température de 1 microKelvin et lancés vers le haut avec une vitesse de 4 m/s. Ils traversent à la montée et à la descente la cavité micro-onde qui contient le champ exciteur de fréquence ν . Le temps entre les deux interactions atomes-champ atteint 0,5 seconde et est environ 100 fois plus long que dans une horloge à jet thermique illustrée sur la figure 3. (b) Une fontaine à atomes froids du LNE-SYRTE de l'observatoire de Paris.

Ces deux dernières années, de nouveaux développements sur les horloges atomiques ont permis de passer en dessous de la picoseconde d'erreur par jour, soit moins d'une seconde tous les 15 milliards d'années, l'âge de l'Univers ! Ces nouvelles horloges sont des horloges optiques : au lieu d'utiliser un champ électromagnétique de période 10^{10} Hertz comme l'horloge à césium, (le pendule bat à 10 milliards de périodes par seconde !) elles utilisent un champ lumineux qui oscille encore plus vite : 10^{15} Hz, soit 100 000 fois plus vite. Ce champ lumineux est produit par un laser et ce laser est asservi sur une transition atomique qui se trouve dans le spectre visible ou proche ultra-violet. L'analogie avec le pendule décrit plus haut indique que la période d'oscillation est ici beaucoup plus courte : il est donc plus facile de détecter un infime écart de temps en comptant un nombre entier de périodes. Mais comment compter ces oscillations si rapides ? Aucun photodétecteur n'est capable de répondre à un champ oscillant si rapidement. C'est ici que la contribution des prix Nobel de physique 2005, Jan Hall et Theodore Haensch est cruciale. Ces deux chercheurs et leurs équipes ont mis au point un « diviseur » de fréquences optiques très efficace et simple à mettre en œuvre. Avec ce diviseur, il est maintenant facile de raccorder les fréquences rapides du domaine optique au domaine radio où les signaux oscillants sont plus lents : ils peuvent être transmis simplement sur des câbles et les périodes d'oscillation comptées par des méthodes électroniques standard. Le diviseur peut aussi être utilisé en sens inverse, comme multiplicateur et réaliser, à partir des basses fréquences, des références de fréquences précises dans le domaine visible du spectre.

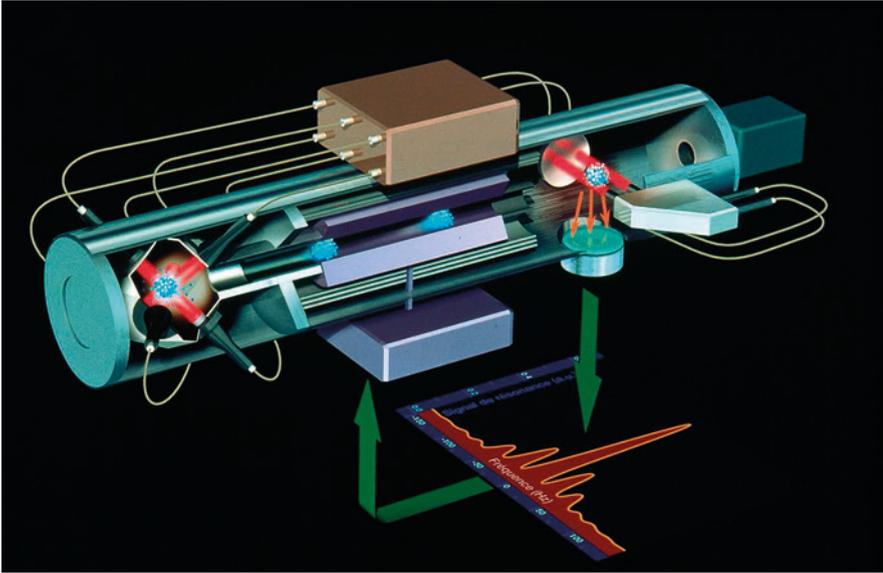


Figure 5. Principe de l'horloge à atomes froids PHARAO en microgravité. Les atomes de césium sont collectés dans une mélasse optique et refroidis par laser dans une première chambre à vide (à gauche). Ils sont ensuite envoyés lentement dans la cavité micro-onde où ils subissent les deux interactions successives avec le champ accordé à la fréquence de l'atome de césium $\nu_0 = 9\,192\,631\,770$ Hz. Les atomes excités sont ensuite détectés par fluorescence induite par laser. Pour une vitesse de lancement de 10 cm/s la largeur de la résonance attendue en microgravité est 0,2 Hz, cinq fois plus fine que dans une fontaine atomique en présence de gravité.

Comme le montre le graphe de la figure 1, l'amélioration des performances des horloges est spectaculaire : en un peu plus de 4 siècles, les meilleures horloges atomiques ont gagné 13 ordres de grandeurs par rapport au pendule de Huygens ! Sur les 50 dernières années le gain est d'un facteur 10 tous les 10 ans ! Nul ne sait si cette progression se maintiendra à un tel rythme dans l'avenir !

2. Les horloges à atomes froids et l'horloge spatiale PHARAO

Revenons au principe des fontaines atomiques illustré sur la figure 4. Comme nous l'avons dit plus haut, la fontaine atomique utilise la gravité pour allonger le temps d'interaction entre le champ oscillant exciteur et les atomes. Dans la méthode inventée en 1952 par le prix Nobel N. Ramsey, il n'est pas nécessaire que ce champ oscillant éclaire en permanence les atomes. Deux interactions successives suffisent et la courbe de résonance possède une largeur donnée par l'inverse du temps entre ces deux interactions et non pas le temps passé

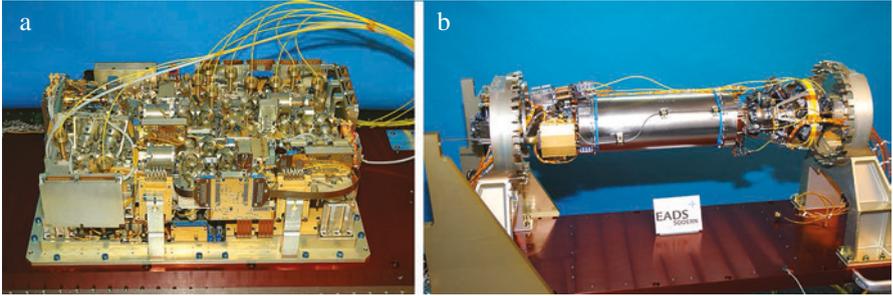


Figure 6. (a) Le banc optique de l'horloge PHARAO. Il comporte huit lasers à diode stabilisés en température, en fréquence et en intensité. Les faisceaux sont dirigés vers la chambre à vide à l'aide de fibres optiques (en jaune). Il occupe un volume de 30 litres et pèse 20 kg. Réalisation société EADS-SODERN
 (b) Le tube à vide de l'horloge PHARAO où a lieu l'interaction entre les atomes froids et le champ excitateur micro-onde. Sa longueur est de 900 mm et son poids de 45 kg. Réalisation de la société EADS-SODERN.

par les atomes à l'intérieur de la cavité. Pour allonger ce temps, il est donc tentant de lancer les atomes de la fontaine le plus haut possible et une expérience à l'Université de Stanford explore cette direction avec une fontaine de 10 mètres de haut. De telles dimensions apportent de nouvelles contraintes et le gain en précision attendu n'évolue que comme la racine de la hauteur ; il sera d'un facteur 3 par rapport aux fontaines en fonctionnement. Une solution plus radicale est de s'affranchir de l'accélération de la pesanteur. C'est le projet spatial PHARAO (projet d'horloge atomique par refroidissement d'atomes en orbite) conduit par le CNES, le LNE-SYRTE à l'observatoire de Paris et le LKB à l'École normale supérieure.

Le principe de l'horloge en microgravité PHARAO est illustré sur la figure 5. L'on revient en quelque sorte au schéma de l'horloge de Essen et Parry mais les atomes du jet atomique sont maintenant remplacés par un jet ultra-lent d'atomes refroidis par laser. L'absence de gravité qui règne à bord d'un satellite permet aux atomes d'évoluer à vitesse constante et les deux zones d'interaction sont séparées spatialement. Dans un dispositif compact (figure 6 a et b), on espère produire une résonance atomique 5 à 10 fois plus fine que dans une fontaine atomique, soit près de dix mille fois plus fine que dans une horloge commerciale !

L'horloge PHARAO sera un élément central de la mission spatiale européenne ACES (Atomic Clock Ensemble in Space) de l'Agence spatiale européenne ESA. Le modèle de vol de l'horloge à atomes froids réalisé par la société SODERN a été assemblé au CNES à Toulouse et testé durant l'année 2014. Il a été livré à l'ESA en juillet 2014. La charge utile ACES (figure 8) sera installée en 2019 à bord de la station spatiale internationale (ISS) qui orbite autour de la Terre à une altitude moyenne de 400 km. Par temps clair, il est très facile de voir l'ISS à l'œil nu une heure environ après le coucher du Soleil. Éclairée par le Soleil, elle apparaît à l'observateur comme une étoile très brillante qui parcourt la voûte céleste en environ 5 minutes ! Sa période orbitale est d'environ une heure et demie, soit 5400 secondes. Outre l'horloge PHARAO, la mission spatiale ACES comporte un maser

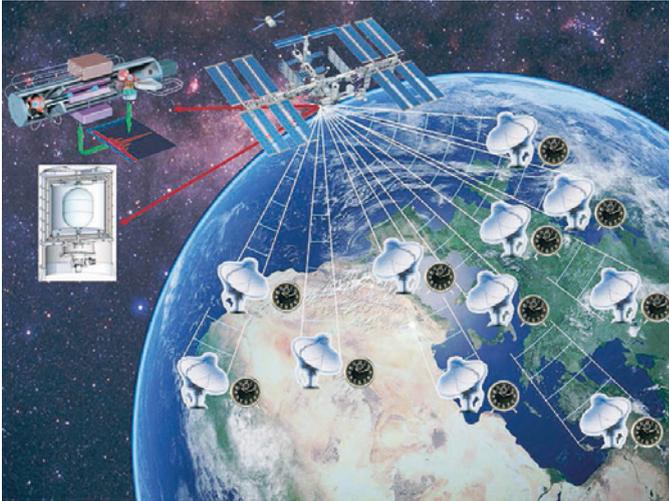


Figure 7. La mission spatiale ACES de l'Agence spatiale européenne. L'horloge PHARAO et un maser à hydrogène seront mis en orbite à bord de la station spatiale internationale en 2019. Des comparaisons de temps ultra-précises avec un réseau d'horloges au sol permettront d'effectuer des tests de physique fondamentale et relativité. Un récepteur GPS/GALILEO permettra également des applications en sciences de la Terre et en navigation.

à hydrogène développé par la Suisse, un système de comparaison de temps sol-bord ultra-précis développé par l'Allemagne et actuellement en cours de tests, un transfert de temps par laser, un récepteur GPS/GALILEO et des équipements de support. L'ensemble pèse 220 kg et consomme 450 watts.

3. Les tests de physique fondamentale

Les objectifs scientifiques d'une telle mission comportent plusieurs volets : tout d'abord l'horloge PHARAO en microgravité et le maser à hydrogène réaliseront dans l'espace une échelle de temps de très haute stabilité. Cette échelle de temps sera comparée à celle fournie par un réseau d'horloges au sol. Il sera alors possible de mesurer avec une grande précision l'effet Einstein, le décalage gravitationnel des horloges : la fréquence de l'horloge PHARAO, mesurée par le réseau d'horloges au sol apparaîtra plus élevée par une quantité gH/c^2 , où g est l'accélération de la pesanteur, H l'altitude de l'ISS est c la vitesse de la lumière. Avec l'altitude de 400 km, on attend un décalage de fréquence de $+4,5 \cdot 10^{-11}$ en valeur relative. Avec des horloges stables et exactes à 10^{-16} , l'effet Einstein pourra être testé au niveau de $2 \cdot 10^{-6}$, une amélioration par un facteur 70 par rapport à la précédente expérience spatiale Gravity Probe A de la NASA en 1976.

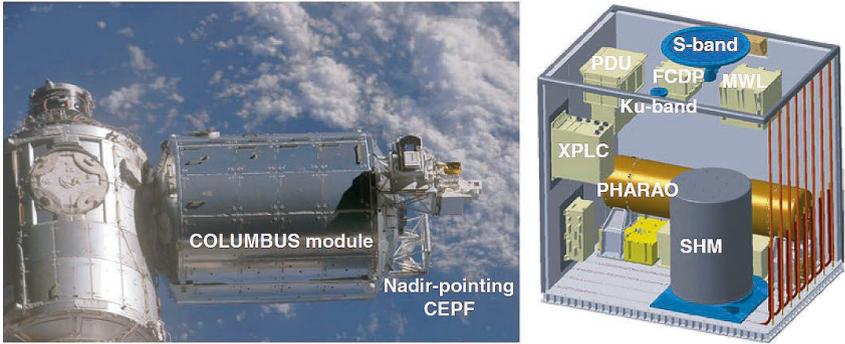


Figure 8. À gauche le module européen Columbus de la station spatiale internationale et la plateforme orientée vers la Terre où seront installés les équipements de la mission ACES. À droite, vue d'ensemble de la palette ACES comportant l'horloge PHARAO, le maser SHM, un transfert de temps ultra-précis fonctionnant dans le domaine micro-onde (MWL), un transfert de temps par laser et des équipements de support.

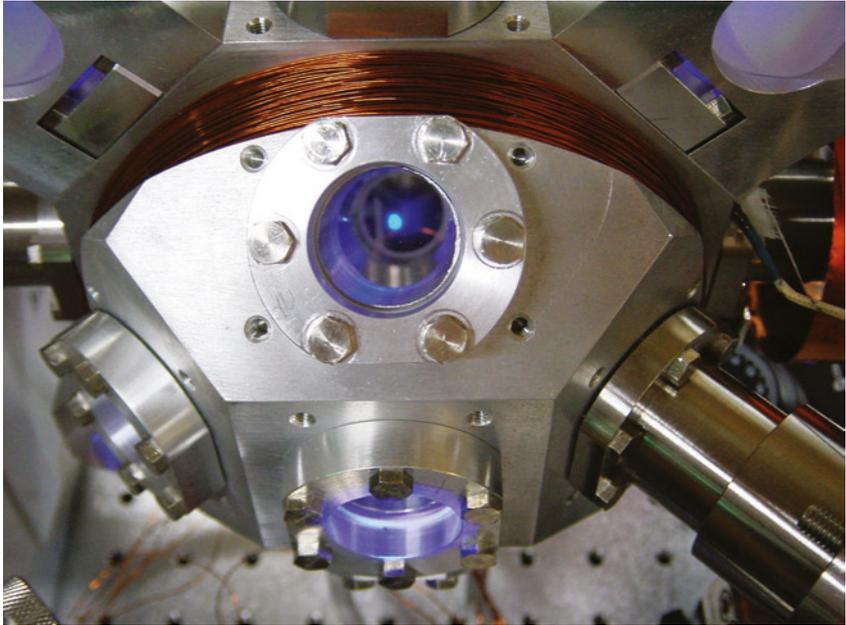


Figure 9. Une horloge optique à atomes de strontium refroidis par laser, en cours de développement par l'équipe de Pierre Lemonde, Jérôme Lodewyck et Rodolphe Le Targat au laboratoire LNE-SYRTE de l'observatoire de Paris. La fluorescence bleue des atomes de strontium est visible au centre de l'enceinte à vide. Ce type d'horloge est l'un des plus prometteurs pour atteindre une stabilité de fréquence dans la gamme des 10^{-18} - 10^{-19} .

En second lieu, grâce à cette échelle de temps spatiale, il sera possible de comparer entre elles les diverses horloges au sol qui participeront à la mission. Celles-ci fonctionnent souvent sur des principes physiques différents, utilisent des atomes différents ou encore des transitions atomiques différentes. Cela permettra alors de tester la conjecture du grand physicien P. Dirac : est-ce que les constantes fondamentales de la physique sont invariables dans le temps ? L'objectif de la mission ACES est ici de réaliser un tel test au niveau global avec une sensibilité de $10^{-17}/\text{an}$. Par exemple, la constante de structure fine α qui caractérise l'interaction électromagnétique et qui est responsable de la stabilité des atomes et des molécules a-t-elle évolué depuis les premiers âges de l'Univers ? Ou encore le rapport des masses des constituants fondamentaux de la matière que sont les protons et les électrons est-il en train de changer avec l'âge de l'Univers ? Cette recherche est extrêmement active aujourd'hui au niveau mondial car son enjeu est considérable. Si l'on trouve en effet une variation pour l'une de ces quantités, ce sera le signe que le principe d'équivalence, l'un des fondements, depuis Einstein, de notre description actuelle de la physique, est violé. Cela indiquerait que de nouvelles interactions ou nouvelles forces sont en jeu, qu'il faudra découvrir et étudier ! Il est utile de rappeler ici que les astrophysiciens nous indiquent que près de 95 % de la masse de l'Univers visible aujourd'hui est constituée de matière noire ou d'énergie noire d'origine inconnue !

4. Quelques applications

Enfin, outre ces objectifs de test des lois fondamentales de la physique et une amélioration prévisible du temps atomique international par ces comparaisons entre horloges au niveau global, la mission ACES comporte également des objectifs scientifiques appliqués : le premier a trait à la géodésie. En effet, ayant testé la validité du décalage gravitationnel des horloges, on pourra ensuite utiliser l'effet Einstein pour réaliser une nouvelle sorte de géodésie : l'effet Einstein sera utilisé pour déterminer la différence des potentiels gravitationnels entre deux horloges distantes. Supposons que ces deux horloges soient identiques, au repos, et leurs fréquences comparées à distance par la mission ACES ou, pour des distances plus faibles, par fibre optique télécom. Leur écart de fréquence sera directement imputable à leur différence de potentiel gravitationnel. Cette nouvelle méthode de géodésie pourra être comparée aux méthodes existantes pour la détermination du géoïde terrestre qui reposent principalement sur des missions spatiales ou des méthodes de nivellement terrestres. ACES vise à démontrer ce nouveau type de géodésie relativiste avec une sensibilité en distance verticale au niveau de 10 centimètres. Dans une publication récente, l'équipe de D. Wineland au NIST Boulder a mis en évidence cet effet en comparant deux horloges optiques dont l'une était soulevée verticalement d'une trentaine de centimètres ! Les horloges optiques actuelles présentent une stabilité de fréquence de 10^{-18} soit l'équivalent de 1 cm de décalage gravitationnel et vont s'améliorer encore ! À ce niveau, le potentiel terrestre n'est plus du tout stable ; suivant l'état des marées océaniques, la pression atmosphérique, les vents et le niveau de l'eau dans les nappes phréatiques, le potentiel terrestre varie ! Les horloges deviennent ainsi un nouveau type de senseur géodésique ; mais inversement l'on peut craindre que ces fluctuations du potentiel terrestre ne viennent limiter la qualité de la mesure du temps et de ses applications !

Une solution possible à ce problème sera alors de mettre dans l'espace une ou plusieurs horloges ultrastables de façon à s'affranchir de ces fluctuations. En effet leur influence décroît très vite lorsque l'on s'éloigne de la surface de la Terre.

Une seconde classe d'applications repose sur l'utilisation du récepteur GPS/GALILEO qui sera placé sur la plateforme ACES pour l'étude de l'atmosphère terrestre. Les signaux émis par les satellites GPS lorsqu'ils apparaissent ou disparaissent au-dessus de l'horizon vu par l'ISS sont perturbés par la vapeur d'eau de l'atmosphère présente sur le trajet satellite GPS-ISS. De même les signaux sont affectés par les différences de température en fonction de l'altitude. Les spécialistes de météorologie utilisent ces signaux pour reconstituer une carte des zones nuageuses et les profils de température de l'atmosphère. Une direction de recherche actuelle concerne également la réflexion des signaux GPS sur la surface de la mer qui donne accès à la hauteur des vagues et à leur direction.

5. Le futur

La mission spatiale ACES aborde la dernière phase d'assemblage et de tests avant son lancement vers l'ISS fin 2019 par une fusée américaine SPACE X. Les équipes d'ingénieurs et de scientifiques préparent maintenant les opérations en vol, l'acquisition des données et leur exploitation.

Si l'on revient à l'amélioration exponentielle des performances des horloges qu'indique la figure 1, jusqu'où les horloges atomiques pourront elles progresser avant qu'une nouvelle technologie ne viennent les surpasser ? De façon plus prosaïque, après 45 ans de bons et loyaux services, la précision de la définition actuelle de la seconde fondée sur l'atome de césium est maintenant dépassée par un facteur 100 par les horloges optiques. Il va donc falloir changer la définition de la seconde du SI ; les atomes candidats sont nombreux (figure 9) et les travaux en laboratoire explorent plusieurs pistes pour atteindre des stabilités de fréquence et des exactitudes de 10^{-18} - 10^{-19} !

Gageons que de nouvelles applications scientifiques et de nouvelles idées pour mesurer le temps de façon de plus en plus précise verront le jour dans les prochaines années !

Références

[1] Cacciapuoti Luigi et Salomon Christophe. Space clocks and fundamental tests: the ACES experiments. *The European Physical Journal-Special topics*, 2009, **172** (1), 57-68. <http://dx.doi.org/10.1140/epjst/e2009-01041-7>

[2] Schiller S. et al. Optical clocks in space. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 2007, **166**, 300-302. <https://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.12.032>

[3] Tino G. M. et al. Atom interferometers and atomic clocks: New quantum sensors for fundamental physics experiments in space. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 2007, **166**, 159-165. <https://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.12.061>

[4] Ludlow A. D, Boyd M.M, Ye J., Peik E. , and Schmidt P.O. Optical atomic clocks. *Reviews of Modern Physics*, 2015, **87** (2), 637.

17

La théorie des probabilités et le problème de l'efficacité (dé-)raisonnable des mathématiques

Dominique Lambert

Facultés Universitaires N-D. de la Paix, 61 rue de Bruxelles, Namur, Belgique

Résumé

Le but de cette contribution est de montrer que les interrogations épistémologiques relatives au statut de la théorie des probabilités présentent un intérêt indéniable dans le contexte d'une tentative de réponse au problème de « l'efficacité déraisonnable » des mathématiques dans les sciences de la nature, pour reprendre les termes de Wigner. Nous montrerons que le fait de retrouver un statut véritable à la théorie des probabilités, en se refusant de la réduire, purement et simplement, à la théorie abstraite de la mesure, n'est pas sans incidence sur la possibilité même de résoudre ce problème d'efficacité. La théorie des probabilités, revêtue de son propre statut épistémologique, est en fait une des illustrations de l'existence d'une composante proprement « expérimentale » de l'activité mathématique. L'oubli de cette composante ainsi que celui de la dimension irréductiblement historique et spécifiquement biologique (neurophysiologique) de la connaissance mathématique sont autant de freins empêchant de parvenir à une ébauche de solution rationnelle au problème de l'efficacité des mathématiques. L'interrogation sur le statut des probabilités constitue donc une invitation à reprendre en profondeur et de manière quelque peu latérale ce célèbre problème.

Abstract

The aim of this contribution is to show that the epistemological interrogations concerning the status of probability theory are of undeniable interest in the context of an attempt to answer the problem of the “unreasonable effectiveness” of mathematics in the natural sciences, to use the words of Wigner. We shall show that the fact of regaining a true status for probability theory by refusing to reduce it purely and simply to the abstract theory of measurement is not without affecting the very possibility of solving this problem of efficiency. The theory of probability, assuming its own epistemological status, is in fact one of the illustrations of the existence of a properly “experimental” component of the mathematical activity. The forgetting of this component as well as that of the irreducibly historical and specifically biological (neurophysiological) dimension of mathematical knowledge are all obstacles which prevent us from arriving at a rational solution to the problem of the effectiveness of mathematics. The interrogation on the status of probabilities thus constitutes an invitation to resume in depth and somewhat laterally this famous problem.

Note

Ce texte est issu de la conférence du même nom donnée en 1997 dans le cadre des troisièmes rencontres « Physique et interrogations fondamentales » et publiée dans « Prédiction et Probabilité dans les Sciences », édité par Etienne Klein & Yves Sacquin¹, Éditions FRONTIERES (1998).

I. Introduction

Le but de cette contribution est de montrer que les interrogations épistémologiques relatives au statut de la théorie des probabilités présentent un intérêt indéniable dans le contexte d'une tentative de réponse au problème de « l'efficacité déraisonnable » des mathématiques dans les sciences de la nature, pour reprendre les termes de Wigner. Nous montrerons que le fait de retrouver un statut véritable à la théorie des probabilités, en se refusant de la réduire, purement et simplement, à la théorie abstraite de la mesure, n'est pas sans incidence sur la possibilité même de résoudre ce problème d'efficacité. La théorie des probabilités, revêtue de son propre statut épistémologique, est en fait une des illustrations de l'existence d'une composante proprement « expérimentale » de l'activité mathématique. L'oubli de cette composante ainsi que celui de la dimension irréductiblement historique et spécifiquement biologique (neurophysiologique) de la connaissance mathématique sont autant de freins empêchant de parvenir à une ébauche de solution rationnelle au problème de l'efficacité des mathématiques. L'interrogation sur le statut des probabilités constitue donc une invitation à reprendre en profondeur et de manière quelque peu latérale ce célèbre problème.

(1) L'AEIS remercie Étienne Klein & Yves Sacquin pour leur aimable autorisation à reproduire cet article

2. La théorie des probabilités existe-t-elle ?

Certains estiment aujourd'hui qu'en toute rigueur de termes il ne convient plus de parler de « théorie des probabilités ». En effet, celle-ci ne renverrait qu'à des intuitions plus ou moins vagues ou à des « recettes de calcul » plus ou moins rigoureuses, dont les brumes conceptuelles auraient été dissipées par la tout élégante théorie de la mesure. Si l'on consulte les *Eléments d'histoire des mathématiques* de Bourbaki² par exemple, on ne trouve aucune rubrique intitulée : « théorie des probabilités ». Dans son ouvrage, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Jean Dieudonné³ souligne que la théorie des probabilités n'appartenait pas vraiment aux mathématiques avant d'être rattachée à la théorie de la mesure. Au niveau des mathématiques pures, la théorie des probabilités comme telle s'est évanouie laissant la place à un chapitre de la théorie de la mesure qui ne considère « que des mesures dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 »⁴. De la même manière, dans son *Panorama des mathématiques pures*, Dieudonné déclare⁵ :

« Le calcul des probabilités, en tant que discipline, n'existe guère que depuis 1933, comme partie de la théorie moderne de l'Intégration ; mais elle a hérité ses problèmes propres, et même son langage, des trois siècles antérieurs au cours desquels le Calcul des probabilités était un mélange de raisonnements d'allure mathématique et de considérations plus ou moins intuitives sur le rôle et l'évaluation du hasard dans les comportements humains ou les phénomènes naturels ».

Suivant une même ligne de pensée, Joseph Doob affirme que⁶ :

"Probability is simply a branch of measure theory, with its own emphasis and field of application".

Les probabilités font leur entrée en théorie de la mesure grâce au travail fondamental de Kolmogorov de 1933⁷. Ce travail d'axiomatisation confère à la notion de probabilité une définition rigoureuse et consistante, lui permettant de sortir des pétitions de principe qu'elle engendrait auparavant en faisant intervenir un concept fondateur d'événement « équiprobable ». L'importance d'une telle axiomatisation est également de mettre en évidence un domaine particulièrement fécond et unificateur des mathématiques. Elle induit, par exemple, un grand nombre de concepts nouveaux de convergence (« convergence p-presque sûre » par exemple) et suscite, plus largement, un autre point de vue sur les fonctions en analyse, comme l'a fait remarquer récemment Doob lui-même⁸. On ne peut donc légitimement remettre en question, au niveau des mathématiques pures, la nécessité

(2) N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Masson, 1984

(3) J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Paris, Hachette, 1987, p. 169.

(4) J. Dieudonné, *id.*

(5) J. Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Paris, Gauthier-Villars, 1977, p. 233.

(6) J. Doob, *Stochastic processes*, New York, Wiley, 1953, p.v.

(7) A. Kolmogorov, *Grundbegriffe des Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, Springer, 1933.

(8) J. Doob, "The development of rigor in mathematical probability (1900-1950)" in *Development of mathematics, 1900-1950*, Basel, Birkhäuser, 1994, pp. 158-169.

de cette métamorphose de la théorie des probabilités en un chapitre de la théorie de la mesure. Mais, faut-il seulement, pour comprendre les mathématiciens et ce que font les mathématiciens, en rester au niveau purement axiomatique ? Nous ne le pensons pas. Pour comprendre l'origine et la portée d'une théorie en mathématiques, mais aussi pour en maîtriser l'intuition lorsqu'il convient de l'utiliser ou de la développer, il n'est pas pertinent de ne la considérer que dans sa structure purement formelle. La forme ne s'explique pas par elle-même mais par la référence (idée, image, modèle, ...) qui lui donne sens. C'est peut-être pour cette raison que bon nombre de grands mathématiciens ne se sont pas résignés facilement à identifier strictement la notion de probabilité avec ce que nous en dit l'axiomatique contemporaine basée sur la théorie des ensembles et de la mesure. Comme le souligne avec précision Jan von Plato⁹ :

"Remarkably, many of the most important contributors to probability had reservations about the formalist or set theoretic foundations of mathematics. That was the case with Borel, Weyl (...), Kolmogorov himself".

En 1959, alors que l'axiomatique de Kolmogorov est largement reconnue dans la communauté des mathématiciens, Kac déclare¹⁰ :

"How much fuss over measure theory is necessary for probability theory is a matter of taste. Personally I prefer as little fuss as possible because I firmly believe that probability is more closely related to analysis, physics and statistics than to measure theory as such".

La réaction de Kac est intéressante car elle suggère que si l'on identifie les probabilités à une partie de la théorie de la mesure ou de l'intégration¹¹, on risque vite de se couper de la source même de cette branche séculaire de la connaissance mathématique. Cette source de la théorie des probabilités se situe en fait essentiellement au niveau de la traduction formelle de problèmes (empiriques) impliquant l'idée, certes assez vague, mais combien riche, de hasard. Nous sommes donc devant un problème épistémologique. La théorie axiomatique des probabilités ne fait aucunement référence à une quelconque idée de hasard. La théorie de la mesure, pourrait-on dire, se moque du hasard ! Pourtant, il n'y aurait vraisemblablement pas eu de théorie des probabilités sans référence à cette notion vague et intuitive de phénomène survenant « au hasard ». La solution de ce problème ne peut pas se faire en renonçant à la rigueur introduite par Kolmogorov. Il est certes possible de discuter de la pertinence de certains axiomes particuliers : celui qui impose l'additivité dénombrable par exemple. Cependant, l'exigence de rigueur nous oblige à maintenir impérativement l'esprit de l'axiomatique de Kolmogorov, en se gardant de toute rigidité formelle. En effet comme le remarquais très justement Choquet¹² :

(9) J. von Plato, *Creating modern probability. Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective*, Cambridge University Press, 1994, p. 19.

(10) Cité de Doob, "The development of rigor...", *op.cit.*, p. 168.

(11) Pour les liens entre la théorie des probabilités et celle de l'intégration cf. J-P. Pier, *Histoire de l'intégration. Vingt-cinq siècles de mathématiques*, Paris, Masson, 1996.

(12) G. Choquet, « L'analyse et Bourbaki », *Enseign. Math.*, **8** (1962) 109-135 ; le passage cité se trouve pp. 125-126.

« Bourbaki s'est fait de la théorie de la mesure une conception intéressante mais exagérément rigide en termes d'espaces localement compacts et de convergence vague ; et il relègue au musée des horreurs les mesures abstraites, fermant ainsi à ses disciples les portes du calcul des probabilités, qui n'a peut-être pas encore trouvé les meilleurs outils, mais manifeste actuellement une vitalité étonnante ».

La solution de notre problème ne peut pas se faire non plus en renonçant purement et simplement à toute idée intuitive de hasard puisque, nous l'avons vu, elle constitue la source lointaine mais effective des concepts probabilistes. Cette solution ne peut être trouvée qu'en tentant de redonner une véritable place à la théorie des probabilités, en tant qu'authentique pratique scientifique, aux côtés du champ purement formel de la théorie de l'intégration ou de la mesure. Les résistances des grands théoriciens des probabilités à l'assimilation totale du calcul des probabilités à la théorie de la mesure pourraient alors être lues comme une manière d'indiquer, « en creux », le rôle incontournable d'une théorie des probabilités dont il nous faut éclaircir maintenant les caractéristiques.

3. Le statut hybride de la théorie des probabilités.

Si nous nous penchons sur l'origine de la théorie des probabilités nous voyons immédiatement que celle-ci constitue un domaine hybride, une sorte d'interface entre les mathématiques pures et des champs d'applications physiques, biologiques, économiques ou sociaux où l'on cherche à modéliser les phénomènes aléatoires.

A l'origine, le calcul des probabilités s'enracine dans des problèmes liés à l'étude des résultats des jeux de hasard (Cardan, Pascal, Fermat,...), mais rapidement ces techniques calculatoires sont exportées dans le domaine de l'étude de la démographie ou plus généralement des statistiques sociales (Leibniz, Bayes, Condorcet, Laplace, Gauss et Quételet), domaine où les variabilités individuelles excluent le recours à des lois déterministes. Cependant, et cela est remarquable, dès les débuts, le calcul des probabilités n'est pas entièrement lié à la gestion de phénomènes où règne l'indéterminisme. Par la notion de probabilité géométrique (Buffon, Bertrand,...), la théorie des probabilités se manifeste comme une méthode alternative permettant de calculer des surfaces, des volumes,...

Comme l'a très bien souligné Jan von Plato¹³, la théorie des probabilités a aussi comme origine plus récente des problèmes de stabilité d'orbites planétaires étudiés par Gylden et Poincaré à la fin du siècle dernier. Ces problèmes mènent à la considération de fractions continues et l'une des questions importantes est de savoir comment se distribuent les coefficients entiers qui apparaissent dans les développements en fractions continues de certains nombres réels. Ce problème de la caractérisation des distributions de classes de nombres va transformer le calcul des probabilités en auxiliaire important de la théorie des nombres

(13) J. von Plato, op.cit..

grâce à Borel, par exemple. Le travail de Borel sur les distributions de nombres est d'ailleurs une des origines de la théorie de l'intégration de Lebesgue (1902). La mécanique statistique de Boltzmann et l'analyse du mouvement brownien (Einstein, Fokker, Planck, Wiener,...) vont constituer de puissantes impulsions pour le développement de la théorie moderne des processus stochastiques. C'est d'ailleurs le travail de Kolmogorov (1931) concernant le mouvement brownien qui va donner naissance, influencé par la théorie de l'intégration de Lebesgue et l'étude fondamentale de Wiener sur les mesures des ensembles de trajectoires browniennes, à la célèbre axiomatique de 1933. Tout cet ensemble de travaux concernant le mouvement brownien débouche à l'heure actuelle sur la théorie de l'intégrale de chemins de Feynman et Kac, dont l'importance est centrale dans toute la théorie classique et quantique des champs. Par le travail de Kakutani (1944) on sait maintenant que l'étude de certains processus stochastiques (martingales) est une autre facette de la théorie des applications harmoniques. Autrement dit, la théorie des processus stochastiques devient ici un outil puissant pour la résolution d'équations de Laplace par exemple. On ne peut pas non plus passer sous silence l'influence de la théorie classique de la radioactivité ou de la mécanique quantique dans la stimulation des recherches en théorie des probabilités.

Ce rapide coup d'œil historique montre que la théorie des probabilités est un lieu de médiations. Elle constitue en effet un domaine théorique où se relie diverses branches des mathématiques et où se produit un va-et-vient entre des mathématiques « pures » (théorie des nombres, théorie des ensembles, théorie des équations aux dérivées partielles,...) et des descriptions de problèmes empiriques issus des sciences naturelles et humaines. Tantôt, les probabilités sont là pour modéliser l'idée de hasard, tantôt elles apparaissent comme un lieu où se transfèrent des intuitions et des méthodes propres à des domaines distincts des mathématiques.

Le rôle médiateur de la théorie des probabilités se manifeste également, de manière éclatante, dans le fait qu'elle joue un rôle crucial dans la constitution et le contrôle des liens qui unissent les théories générales de la physique (ou d'autres sciences) et les données empirico-formelles venant des dispositifs expérimentaux. Dans ce contexte, la théorie des probabilités permet, tout d'abord, la modélisation des erreurs expérimentales auxquelles l'observateur doit s'attendre ou du bruit de fond perturbant le signal intéressant. Elle permet aussi de caractériser les incertitudes liées à l'ignorance ou le niveau de risque admissible dans telle ou telle situation¹⁴. La théorie des probabilités est ici non une théorie fondamentale, mais une théorie des instruments qui connecte une théorie générale à des données obtenues expérimentalement.

Nous nous demandions, ci-dessus, quel pouvait être le statut d'une théorie des probabilités qui ne serait pas strictement restreinte à un chapitre de la théorie de la mesure. Nous entrevoyons ici un élément de réponse. Il ne s'agit, ni d'une théorie ressortissant aux mathématiques envisagées pour elles-mêmes, ni une simple théorie physique générale des phénomènes aléatoires, mais bien plutôt d'une sorte de champ théorique médiateur où les théories mathématiques sont interconnectées entre elles ou « co-adaptées » à des descriptions de phénomènes naturels ou humains. On pourrait dire que bien loin d'avoir été absorbée complètement par la théorie abstraite de la mesure, la théorie des probabilités est ce lieu bien réel où se réalisent les traductions et les adaptations mutuelles permettant

(14) Nous renvoyons ici au bel ouvrage de E. Borel, *Probabilité et certitude*, Paris, P.U.F., 1950, pp. 113-125.

à certaines données empiriques caractérisées par un comportement « aléatoire » de rejoindre un formalisme mathématique dont elles tireront leurs sens. On n'a pas assez souligné, en philosophie des sciences, l'existence de ces lieux théoriques médiateurs, dont la théorie des probabilités ne constitue au fond qu'un des exemples les plus marquants¹⁵. Nous verrons bientôt que l'oubli de ces lieux constitue une des raisons essentielles de la difficulté que l'on éprouve à comprendre l'efficacité surprenante des mathématiques dans les sciences de la nature.

4. L'efficacité des mathématiques est-elle déraisonnable ?

La recherche d'une justification de l'efficacité des mathématiques est un des problèmes les plus classiques de la philosophie. Il a été épinglé de manière particulièrement brillante par E.P. Wigner en 1960 dans un article où cette efficacité est qualifiée de « déraisonnable »¹⁶. En effet, le célèbre physicien estime que cette efficacité ne peut être qualifiée qu'en termes de « miracles » ou de « don magnifique » situés au-delà des limites de notre compréhension des phénomènes. Il nous semble que l'efficacité des mathématiques en physique est indéniable et qu'elle est susceptible de susciter l'émerveillement de toute personne qui a pratiqué un tant soit peu cette discipline. Cependant, il nous semble peu conforme à la dynamique de la raison scientifique de cacher la difficulté de ce problème de l'efficacité des mathématiques sous le voile du miracle avant d'avoir sérieusement envisagé toutes les possibilités d'explication. Or, celles-ci sont nombreuses, même si elles ne sont pas toutes également satisfaisantes. Après avoir formulé quelques remarques préliminaires, nous allons donc risquer une approche du problème qui se base sur un examen des différentes solutions apportées par l'histoire récente ou ancienne de la philosophie.

Il nous faut remarquer d'emblée que la notion d'efficacité recouvre plusieurs significations. Il peut s'agir, tout d'abord, d'une capacité de prédiction ou de rétro-diction. Une théorie mathématique est dite efficace dans un domaine des sciences si elle peut anticiper les résultats d'expérimentations ou reproduire les données obtenues précédemment. Mais, l'efficacité ne se mesure pas seulement à cette possibilité de « sauver » les phénomènes. En effet, une théorie mathématique est dite efficace également si elle permet de mettre en évidence des structures « explicatives ». La théorie de jauge qui décrit les interactions électro-faibles ne manifeste pas seulement son efficacité par le fait qu'elle reproduit les courbes expérimentales qui sont obtenues à partir des détecteurs de particules (qui mettent en évidence l'existence de bosons vectoriels intermédiaires). Elle est qualifiée d'efficace parce que son formalisme donne un schéma expliquant l'existence de cette interaction

(15) On oublie souvent les théories décrivant les dispositifs expérimentaux (détecteurs,...) qui sont, pour une grande part, souvent indépendantes des théories générales qui servent de base à la description de l'expérience. La théorie du sismographe, par exemple, est largement indépendante pour l'explication de son fonctionnement de la théorie de la tectonique des plaques,... Cette autonomie relative des théories instrumentales joue un grand rôle dans la confiance que l'on peut accorder aux tests d'une théorie générale.

(16) E.P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XIII (1960) 1-14.

électro-faible. En effet, celle-ci dérive d'un concept profond de symétrie : l'invariance sous une transformation locale de jauge. La structure de la théorie possède donc, en plus de l'efficacité strictement prédictive, une efficacité explicative. Nous retrouvons ici les remarques de René Thom qui souligne, de manière judicieuse, la nécessité de ne pas confondre les fonctions prédictives et explicatives de toute science de la nature¹⁷. L'efficacité des mathématiques peut être vue à un troisième niveau : celui de la générativité¹⁸. Une théorie mathématique est efficace si elle permet d'engendrer de nouvelles idées, de nouveaux concepts ou des solutions originales de problèmes anciens. Ces trois niveaux d'efficacité doivent être pris en considération si l'on ne veut pas mutiler la notion d'efficacité des mathématiques dans les sciences. Par exemple il est clair que la théorie des supercordes n'est pas (encore ?) prédictivement efficace, mais cela ne veut pas dire qu'elle ne possède pas d'efficacité du tout. En effet, cette théorie suggère une série d'idées sur la manière dont on doit changer notre conception des particules élémentaires pour arriver à une unification des quatre interactions fondamentales (par exemple l'abandon des entités ponctuelles). Il en va de même de la géométrie non-commutative. Le fait qu'elle fournisse, dans certains cas particuliers, une explication intrinsèque du phénomène de brisure de symétrie (nécessaire pour donner de la masse à certains messagers d'interaction), lui confère une efficacité (relative mais réelle). Toutes ces réflexions montrent que le concept d'efficacité est beaucoup plus complexe que ce que pourrait laisser croire une analyse superficielle des applications des mathématiques dans les sciences.

Il nous faut souligner aussi que l'efficacité des mathématiques semble très différente (aux trois niveaux que nous venons de décrire) lorsqu'il s'agit des sciences comme la physique, la chimie voire la biologie ou lorsqu'il s'agit de sciences humaines comme l'économie, la sociologie ou l'histoire. Il est certain qu'en biologie contemporaine, les méthodes mathématiques ont acquis une importance et une efficacité que nul ne pouvait soupçonner il y a seulement quelques dizaines d'années. Cependant, on peut se demander si l'explication des phénomènes biologiques passera un jour par une complète mathématisation de cette discipline à l'instar de ce qui se passe en physique ? De la même façon, si certaines théories mathématiques se révèlent efficaces en économie (théorie des jeux non-coopératifs, ...), il est clair que toutes les explications de phénomènes économiques ne se coulent pas nécessairement, avec le même succès, dans le moule des formalismes mathématiques¹⁹. Certaines applications artificielles de la théorie des catastrophes ou de la théorie des systèmes dynamiques chaotiques à la sociologie montrent d'ailleurs que toute mathématisation ne signifie pas nécessairement un accroissement de maîtrise des phénomènes décrits par les sciences humaines²⁰.

(17) R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, EsHel, 1991.

(18) Nous renvoyons le lecteur aux réflexions d'Alain Connes qui insiste sur cette « générativité » des formalismes mathématiques de la physique (J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à pensée*, Paris, Odile Jacob, 1989, pp. 91-92).

(19) Comme exemple on pourrait donner ici la question de la pertinence de la modélisation mathématique de la notion de liberté de l'acteur individuel. Si l'on peut donner des descriptions extrêmement simple de certains comportements globaux engendrés par une somme d'acteurs individuels agissant librement, il est clair qu'il est difficile (voire impossible) de fournir un modèle complet expliquant mathématiquement les caractéristiques de la décision libre d'un acteur isolé.

(20) Nous ne voulons pas nier ici bien entendu la fécondité de certaines analogies mathématiques (structurales par exemple) en sciences humaines. Notre critique vise plutôt l'utilisation abusive des mathématiques comme outil de prédiction et d'explication en sociologie, psychologie, ...

Historiquement, une des premières tentatives d'explication de l'efficacité des mathématiques nous est donnée par le pythagorisme qui assimile l'essence du monde au nombre. Dans cette perspective et d'un point de vue plus contemporain, on pourrait dire que l'efficacité des mathématiques est liée au fait que la structure profonde du monde est justement de nature mathématique. Dès lors, faire des mathématiques revient à emprunter le langage même du monde matériel. Cette conception est critiquable à bien des égards. Une des objections majeures à cette thèse est le constat que le monde mathématique ne correspond pas adéquatement et biunivoquement au monde physique. Comme l'a très bien montré Jean-Marc Lévy-Leblond, un même formalisme physique peut décrire un grand nombre de systèmes physiques tout à fait différents (par exemple une même équation différentielle du second ordre décrit des circuits RLC ou des systèmes mécaniques de boules reliées par des ressorts,...)²¹. De plus, les équations de la physique engendrent, en plus des solutions correspondant aux phénomènes, des solutions sans aucune signification physique directe (certaines solutions sont rejetées, par exemple, parce qu'elles violent la causalité usuelle). La correspondance entre les mathématiques et la physique n'est donc pas biunivoque et naturelle. Ceci laisse donc planer un doute sur une sorte d'isomorphisme entre le langage (mathématique) et la nature.

L'explication platonicienne de la réussite des mathématiques peut être divisée en deux thèses. La première pourrait être qualifiée de « platonisme faible » (celui qui peut être trouvé dans des dialogues tels que la *République*). Selon cette conception, les mathématiques constituent un langage intermédiaire qui permet de passer du sensible au monde des Idées qui constitue la réalité profonde des choses. Les mathématiques sont efficaces ici parce qu'elles offrent un moyen de viser les véritables structures du monde. Une autre version du platonisme (qui est plus conforme à la lecture de Platon telle qu'Aristote nous la livre), que nous pourrions appeler le « platonisme fort », identifie les mathématiques au monde des Idées lui-même. Dans une version contemporaine défendue par Albert Lautman, les théories mathématiques constituent des schémas d'incarnation des Idées²². L'unité des Idées (réalisée chez Platon par l'Idée du Bien) explique ici l'unité des mathématiques. En positif, ces deux thèses ont le mérite de souligner le fait que les constructions mathématiques ne sont pas entièrement le fruit de choix arbitraires faits par le mathématicien. Si l'on en croit l'expérience des mathématiciens, on se rend compte qu'il est légitime de parler, en partie, d'une découverte (plutôt que d'une invention) de nouveaux concepts. Certaines parties des mathématiques semblent découler, non d'une volonté arbitraire du mathématicien, mais d'une sorte de nécessité interne aux mathématiques, un peu comme si les concepts étaient déjà-là. Cependant, on ne voit pas comment cette expérience devrait être nécessairement liée à l'existence d'un monde des Idées dont le statut reste quelque peu énigmatique. Il pourrait très bien se faire que cette nécessité soit liée à la structure même de notre cerveau ou de nos schémas inférentiels et non à celle du monde des Idées. Une des grandes difficultés du platonisme consiste aussi à expliquer comment le monde des Idées entre en contact avec le monde des phénomènes. Si nous identifions ces deux mondes, nous retombons dans le pythagorisme. Si par contre nous les séparons, nous devons expliquer comment nous pouvons passer de l'un à l'autre et nous retrouvons ici toutes les difficultés liées aux dualismes philosophiques. En effet, comme Descartes ou comme Gödel, nous devons

(21) J.-M. Lévy-Leblond, « Physique et mathématiques » in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École Normale Supérieure, sous la direction de M. Loi et R. Thom), Paris, Seuil, 1982, p. 201

(22) Cf. A. Lautman, *Essais sur les notions de structure et d'existence en mathématiques I. Les schémas de structure*, Paris, Hermann, 1938.

supposer que le cerveau est une sorte d'organe de contact entre deux mondes l'un matériel et l'autre non. Le problème consiste alors, tout en restant dans le cadre d'une philosophie des sciences, à expliquer comment ce qui n'est pas matériel peut agir sur ce qui l'est. Les thèses platoniciennes montrent que la solution du problème de l'efficacité des mathématiques doit probablement passer par la considération du fait que l'origine de celles-ci ne peut être située uniquement au niveau d'une simple construction libre de l'esprit, mais dans un ensemble de sources qui s'imposent à l'entendement. Cependant ces sources ne doivent peut-être pas être placées aussi « haut » que ce que le platonisme aurait souhaité.

La conception aristotélicienne place, quant à elle, la source des mathématiques dans cette capacité que possède l'esprit humain d'extraire des formes du sensible et de les analyser sous l'angle de la quantité. Toutes les mathématiques relèvent donc d'une source empirique. L'efficacité des mathématiques a donc une explication triviale consistant à dire que nous ne faisons que nous servir en mathématiques des structures qui nous ont été livrées par le monde physique lui-même. Nous ne pouvons pas défendre entièrement une telle conception. Il est vrai qu'un grand nombre de concepts élémentaires des mathématiques nous ont été suggérés par le monde empirique. En revanche, il est évident que la grande majorité des théories mathématiques contemporaines ont été développées sans faire le moindre recours à des impulsions empiriques. Pour rendre compte de ce qui se passe effectivement dans les mathématiques contemporaines, il est important de reconnaître une certaine autonomie (relative) de la production des concepts mathématiques par rapport à tout apport directement empirique. L'aspect positif de la conception aristotélicienne réside dans le fait qu'elle souligne le fait que l'efficacité des mathématiques pourrait être due à une source liée à la description des régularités phénoménales. Cela est très important, car si nous devons admettre une certaine autonomie de l'acte créateur de nouvelles mathématiques, il ne faudrait pas sous-estimer les stimulations engendrées par les problèmes venus des sciences empiriques et qui soutiennent, de temps à autres, la progression de l'histoire des mathématiques.

Une autre explication de l'efficacité des mathématiques peut être trouvée dans la philosophie kantienne. Pour Kant les phénomènes sont constitués dans les formes a priori de la sensibilité que sont l'espace et le temps. Ceux-ci engendrent respectivement la géométrie et l'arithmétique. Tout phénomène (et pour Kant nous ne connaissons que le phénomène et non la « chose-en-soi », le noumène) présente donc une structure immédiatement homogène aux mathématiques, ce qui permet de résoudre le problème de l'efficacité qui nous occupe ici. L'apport positif de Kant réside dans le fait qu'il met en évidence le rôle constitutif du sujet mathématicien. Les mathématiques ne sont pas rapportées à un monde d'idées séparées, comme dans le platonisme, ou à des structures empiriques comme c'est le cas pour l'aristotélisme, mais bien plutôt à une activité d'un sujet. Cependant, l'explication kantienne possède certaines faiblesses. Tout d'abord les mathématiques ne sont pas vues comme une science qui invente de nouveaux concepts, leur spécificité propre consiste à « construire » les concepts dans les cadres spatiaux et temporels. Or aujourd'hui, il nous faut bien reconnaître que les mathématiques sont génératrices d'une série de concepts nouveaux dont l'origine est suggérée non pas de l'extérieur ou par l'entendement pur mais bien par les nécessités internes des formalismes eux-mêmes²³. Ensuite les formes

(23) C'est souvent en manipulant les formalismes que les mathématiciens en arrivent à suggérer de nouveaux concepts. Le concept est rarement le fruit d'une idée a priori issue d'une réflexion pure (non mathématique).

spatio-temporelles de Kant sont envisagées comme des structures rigides. Or la mathématisation des phénomènes fait souvent appel à des conceptions de l'espace et du temps qui se modifient profondément au cours de l'histoire. Il existe une véritable plasticité des cadres spatiaux et temporels utilisés dans la description des phénomènes²⁴. La perspective kantienne risque, si elle est radicalisée, de figer la dynamique qui est au cœur de la production mathématique contemporaine.

Le problème de l'efficacité des mathématiques ne peut être envisagé correctement au niveau d'une conception purement formaliste des mathématiques. En effet, suivant celle-ci, les mathématiques constituent un pur jeu formel défini à partir d'un certain nombre de symboles. Il est donc incompréhensible, à moins d'évoquer une mystérieuse harmonie préétablie, qu'un jeu arbitrairement défini puisse avoir des applications très précises dans un domaine des sciences empiriques. Tout se passerait comme si je définissais les règles d'un jeu de cartes et que les résultats des différentes parties servent à décrire subitement avec une précision extrême la charge de l'électron par exemple ! La thèse d'une harmonie préétablie, comme celle de l'existence d'un monde d'entités mathématiques séparées, relève de la science-fiction ou d'une métaphysique a priori plutôt que d'une méthodologie philosophique compatible avec les exigences de la démarche scientifique. Remarquons également que la conception purement formaliste des mathématiques est démentie par l'histoire. En effet, rarement les grands mathématiciens ont effectué des découvertes importantes en faisant simplement de la manipulation « aveugle » de symboles.

On pourrait aussi considérer, à la suite de Bohr²⁵, les mathématiques comme un « réservoir » de toutes les relations formalisées entre concepts. Les mathématiques seraient alors efficaces dans les sciences de la nature, par le simple fait qu'elles traduiraient formellement les relations entre mesures expérimentales. Cette conception est intéressante, mais elle se heurte à l'objection suivante. Pourquoi les théories inventées par les mathématiciens à une certaine époque, sont-elles souvent celles qui trouvent des applications en physique par exemple. Ou pour le dire autrement : pourquoi les mathématiques semblent-elles suivre de si près le développement de la physique. Si les mathématiques sont constituées par l'invention de relations arbitraires, la probabilité de tomber à une époque donnée sur une relation efficace serait très faible. Or c'est souvent le contraire qui se produit²⁶. Le point important de la conception de Bohr que l'on pourrait appeler : « relationnisme », est l'insistance sur le fait que les mathématiques ne donnent accès à aucun « objet » mais à des relations. Les mathématiques ne fournissent donc aucune ontologie²⁷. Le problème du relationnisme n'est donc pas situé au niveau de sa conception de la nature relationnelle

(24) Aujourd'hui, avec la géométrie non-commutative, on en arrive à concevoir des espaces qui sont très différents des espaces euclidiens ou non-euclidiens classiques (ces espaces, par exemple, peuvent très bien ne pas avoir de « points »). Le changement d'échelle des phénomènes peut induire un changement de la notion même d'espace physique.

(25) N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine* (traduit par E. Bauer et R. Omnès), Paris, Gauthier-Villars, 1972, pp. 102-103.

(26) Cette objection a été formulée de manière percutante par G. Münster dans son article : «The Role of Mathematics in Contemporary Physics» in *Philosophy, Mathematics and Modern Physics* (E. Rudolph, I.-O. Stamatescu, eds), Berlin, Springer, 1994, pp. 205-212.

(27) On sait qu'il n'existe aucune ontologie stable en mathématiques. Le statut d'objet est relatif à la théorie sur le fond duquel il prend sens. Ainsi un vecteur peut devenir tantôt un objet d'un espace vectoriel, tantôt un opérateur agissant sur des fonctions qui sont elles-mêmes des objets d'un espace fonctionnel donné. En théorie des catégories, un « objet » peut devenir une « flèche » et inversement.

des mathématiques, mais bien au niveau de l'analyse de la genèse et des caractéristiques des relations qui se sont avérées efficaces dans tels ou tels champs d'applications. Nous y reviendrons dans un instant.

Une dernière conception expliquant l'efficacité des mathématiques est le naturalisme. Il s'agit d'une position qui considère les mathématiques comme purs produits du cerveau du mathématicien susceptibles d'être analysés par la biologie ou par la psychologie cognitive. On peut distinguer deux grandes tendances : l'une associe les mathématiques à un apprentissage (aspect acquis) et l'autre les associe à des capacités innées évolutivement sélectionnées (aspect inné). Envisageons d'abord les approches du genre de celles proposées par Piaget et son école qui envisagent les mathématiques élémentaires comme fruit d'un apprentissage se réalisant lorsque l'enfant agit sur les objets usuels de son entourage²⁸. L'enfant dégage par cette action, entre autres, l'idée d'opération, puis d'opération inversible, etc. La thèse piagétienne souligne de manière judicieuse qu'il existe une source des mathématiques située dans un contact élémentaire avec le monde physique qui nous entoure. Cette thèse peut expliquer la réussite de l'application de concepts très élémentaires, mais certainement pas celle de théories évoluées.

On pourrait objecter que l'apprentissage apporte des matériaux de base pour construire les mathématiques et que les mathématiques « évoluées » sont obtenues par des abstractions successives : des « gestes sur des gestes » comme le disait Cavallès²⁹. Cependant, il semble bien que la base devant servir de point de départ à ces abstractions d'ordre de plus en plus élevées et qui serait offerte par un apprentissage élémentaire, ne soit pas suffisante pour penser la diversité et la richesse du corpus mathématique actuel.

Une objection plus forte vient des études récentes concernant le fonctionnement cérébral lié à l'activité calculatoire ou plus généralement mathématique. Stanislas Dehaene³⁰ a montré, en effet, que les opérations élémentaires de dénombrement n'étaient pas liées à un apprentissage, mais qu'elles étaient innées et qu'elles existaient probablement déjà chez certains animaux. Un certain nombre de concepts de base des mathématiques, dont celui de nombre, semblent donc être liés à des caractéristiques acquises par le cerveau au cours de l'évolution. C'est là, la deuxième forme de naturalisme dont nous parlions ci-dessus. Dehaene a montré que la capacité de dénombrement sélectionnée par l'évolution était relativement limitée. En fait, selon lui l'évolution n'a pas favorisé des capacités cérébrales donnant un accès facile aux longues suites d'inférences telles qu'on les trouve dans les théorèmes mathématiques actuels. La conception qui voudrait expliquer l'efficacité des mathématiques par leur avantage évolutif est donc non pertinente ou tout au moins restreinte à des mathématiques très élémentaires (les opérations concernant les premiers nombres naturels). Malgré les limites des deux formes de naturalisme, on peut dire que l'on possède ici une piste très importante pouvant mener à un renouveau des solutions classiques du problème de l'efficacité des mathématiques. Cette dernière pourrait de fait être liée à des capacités particulières du cerveau humain. Bien entendu, ceci supposerait

(28) J. Piaget, *La psychologie de l'intelligence*, Paris, Armand Colin, 1947 ; *L'épistémologie génétique*, Paris, P.U.F., 1972.

(29) J. Cavallès, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris, Hermann, 1981 (réédition), pp. 178-179.

(30) S. Dehaene, *La bosse des maths*, Paris, Odile Jacob, 1997.

que l'on admette que les mathématiques « ne soient plus que » des productions d'un sujet de chair et d'os et non pas les Idées d'un monde abstrait et séparé.

Dans les recherches de Dehaene, un point nous paraît crucial. Les zones cérébrales qui sont engagées dans les activités mathématiques sont précisément celles qui permettent les représentations spatiales. Le lien entre nombre et espace est d'ailleurs une des thèses centrales de Dehaene. Nous allons proposer maintenant une hypothèse qui se situe dans la ligne du naturalisme et qui lie l'efficacité des mathématiques à la réussite (relative) de la constitution du percept visuel.

Le processus de perception est basé sur une constitution d'images à partir de stimuli fournis par le monde extérieur³¹. Notre cerveau complète les données partielles qu'il reçoit par le canal de la rétine et fournit de ce fait une interprétation qui « fait voir »³². Ce processus de complétion est lié à la capacité que possède le cerveau d'établir un certain nombre de relations entre des données qui lui viennent de l'extérieur et des informations stockées en lui. Cette capacité relationnelle ne fonctionne pas arbitrairement, elle suit des critères (qui fixent le type de relations ou les éléments qui vont être mis en relations) que l'on peut cerner en étudiant les différentes illusions perceptives ou en analysant la manière dont on peut suggérer la perception de certains objets en imagerie virtuelle et dans les arts plastiques³³. Ces critères sont engendrés par le processus évolutif ou par l'apprentissage. Nous pourrions citer ici, par exemple, le « critère de proximité » qui fait que le système visuel groupe « naturellement » des points qui sont voisins les uns des autres ou encore le « critère de similitude » qui associe des formes similaires ou encore le « critère de la courbure constante » qui fait que nous prolongeons des lignes masquées par des obstacles en respectant leur rayon de courbure,... Ces critères montrent en fait que le système visuel fonctionne en établissant des relations qui sont caractérisées par des invariants spécifiques (invariants topologiques pour le critère de proximité, invariant géométrique pour le critère de similitude et pour le critère de courbure constante). Pour voir un objet ou pour en simuler la perception visuelle, il faut donc mettre en œuvre un ensemble de relations munies d'invariants spécifiques.

Remarquons aussi que la vision implique nécessairement, comme l'a bien mis en évidence la *Gestalt*, la possibilité de discriminer des objets et de les distinguer d'un « fond » sur lequel ils apparaissent. Il faut donc à l'origine une capacité de discrétisation (qui est le fondement de la notion de nombre) et la position d'une étendue (qui est le fondement de la topologie et de la géométrie). Si nous possédons une capacité de perception visuelle, nous pouvons conclure que nous possédons corrélativement des capacités mathématiques élémentaires (on devrait dire des capacités de dénombrement et de spatialisation élémentaires). De ce fait, la réussite de la perception visuelle élémentaire (le fait que je puisse « accrocher » une réalité macroscopique par le biais du système visuel) expliquerait alors simplement l'efficacité des mathématiques élémentaires.

(31) Nous renvoyons le lecteur à l'excellent livre de Ph. Meyer, *L'œil et le cerveau*, Paris, Odile Jacob, 1997.

(32) Cf. *The Perception of Visual Information* (W.R. Hende, P.N.T. Wells, eds), Berlin, Springer, 1993-1997.

(33) Cf. par exemple, Leif H. Finkel et Paul Sajda, «Constructing Visual Perception. Artificial vision systems, built from neural networks, are revealing the rules of human visual processing», *American Scientist*, **82** (1994) 224-237. Une analyse classique du processus de perception visuelle et des illusions qui lui sont associées peut être trouvée dans l'ouvrage de R.L. Gregory, *Eye and Brain. The Psychology of Seeing*, Oxford University Press, 1998 (cinquième édition).

Ceci rejoindrait les thèses originales et fondamentales de Dehaene. Mais nous pouvons pousser la réflexion un peu plus loin. En effet, une analyse précise des mathématiques contemporaines montre que celles-ci peuvent être décrites comme un vaste « réservoir » de relations entre concepts formalisés (ces relations peuvent être définies en utilisant le langage des structures de Bourbaki ou celui des catégories par exemple). Mais, en général, ce ne sont pas les relations comme telles qui intéressent les mathématiciens. Des relations arbitraires entre symboles n'apporteraient que des mathématiques le plus souvent « vides »³⁴, pour reprendre le vocable de Dieudonné. Ce qui polarise l'attention du mathématicien ce sont les relations qui sont caractérisées par une grande variété d'invariants relatifs à diverses transformations (homomorphismes, homéomorphismes, foncteurs, transformations naturelles,...). Ces invariants peuvent être des nombres, des variétés, des structures... La richesse en invariants est d'ailleurs souvent un indice de « profondeur » de la théorie.

Le couple « relations-invariants » caractérisait la perception visuelle parce que c'était lui qui permettait la mise en évidence d'éléments de réalité macroscopique. Nous avons suggéré que les mathématiques élémentaires se situaient dans le doigt de la perception visuelle. La description des mathématiques « évoluées » nous révèle en outre que l'activité du mathématicien est tout entière tendue vers la mise en évidence de relations riches en invariants spécifiques. Nous pourrions donc risquer l'idée suivant laquelle les mathématiques seraient en fait un prolongement naturel de l'activité cérébrale qui constitue les percepts visuels. Dans le cas des mathématiques élémentaires, celles-ci constituent en fait des représentations symboliques des objets directement perçus visuellement, sous la forme d'esquisses géométriques ou de caractéristiques numériques. Dans le cas des mathématiques en général, il semble bien que celles-ci soient la représentation symbolique des images mentales les plus générales au sens où les a définies Jean-Pierre Changeux³⁵. Le lien entre les mathématiques et les images mentales pourrait d'ailleurs fonctionner dans les deux sens. D'une part, les mathématiques fourniraient une représentation d'images mentales dans un domaine de symboles, c'est-à-dire une projection de ces images sur un espace symbolique mais, d'autre part, les mathématiques pourraient aussi être considérées comme une méthodologie qui, par le langage symbolique, tenterait d'appréhender, de « révéler » des images mentales très abstraites, que la pensée poursuit parfois confusément sans pouvoir en acquérir une intuition directe et claire. L'idée serait ici que la mise en évidence d'un champ de relations riche en invariants est la trace, dans la représentation symbolique, d'une image mentale complexe qui ne peut être représentée ni par une analogie visuelle, ni peut être par une idée ou un concept simple.

Si nous passons en physique maintenant, nous voyons que la structure de l'activité théorique est aussi dominée par la recherche de couple « relations-invariants ». Toute la description du monde physique se réalise par l'intermédiaire de la recherche de grandeurs qui se conservent lorsqu'on effectue certaines transformations (dans le

(34) J. Dieudonné, « Mathématiques vides et mathématiques significatives » in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École Normale Supérieure, sous la direction de M. Loi et R. Thom), Paris, Seuil, 1982, p. 37. Les mathématiques « vides » sont celles qui n'engendrent aucune idée nouvelle ou qui ne permettent pas de résoudre des problèmes importants ; autrement dit, des mathématiques qui n'accroissent pas qualitativement la connaissance.

(35) J.-P. Changeux, *L'homme neuronal*, Paris, Arthème Fayard, 1983, pp. 160-211.

cas où ces transformations sont des groupes, on parle alors de « symétries » ; dans le cas des groupes de Lie, on se souvient du théorème de Noether qui lie l'existence des symétries continues aux invariants caractéristiques : énergie, quantité de mouvement,...). Pourquoi en est-il ainsi ? La réponse est simple : la présence d'invariants associés à certaines transformations est la trace de l'existence même d'un « élément de réalité », d'une « chose » (*res*) qui possède une indépendance (relative). La covariance des lois (invariance de la forme des lois physiques) ou l'invariance de certaines grandeurs caractéristiques (qui est d'ailleurs la condition de possibilité de toute mesure³⁶) apparaissent en physique parce qu'elles traduisent justement des conditions nécessaires de la manifestation d'éléments de réalité.

Nous voyons donc que les mathématiques sont adaptées formellement à la physique, puisqu'elles sont essentiellement orientées vers la recherche de relations caractérisées (dans les cas les plus significatifs) par de riches classes d'invariants spécifiques. Nous avons justifié plus haut la réussite des mathématiques élémentaires en utilisant le fait qu'elles étaient couplées directement à la perception usuelle d'objets macroscopiques. Comment justifier maintenant l'efficacité de mathématiques plus évoluées, faisant appel à des concepts qui ne se relient plus directement à des caractéristiques d'objets perçus directement ? Nous pensons que cette justification n'est pas immédiate et naturelle. Autrement dit, il n'y a peut-être pas de justification naturelle et immédiate parce qu'il n'y a justement pas d'efficacité naturelle et immédiate dans les situations que traite la physique des particules élémentaires ou la cosmologie physique par exemple. Il y a bien une efficacité indiscutable et étonnante des mathématiques « évoluées » en physique, mais celle-ci n'est pas le fruit d'un miracle ou d'une harmonie préétablie et, de plus, elle ne se produit pas spontanément.

Lorsqu'on étudie en détail l'histoire des sciences modernes et contemporaines, on s'aperçoit vite qu'il existe un tissu très dense de relations bilatérales entre les mathématiques et la physique ou d'autres sciences naturelles et humaines. Les mathématiques possèdent des phases de développement autonomes mais celles-ci sont souvent entrecoupées de périodes d'interactions très fortes avec d'autres domaines de la connaissance qui contribuent à stimuler ou à restimuler certaines branches particulières des mathématiques. Aujourd'hui, les mathématiques permettent de décrire et de résoudre des problèmes posés par les physiciens, mais en plus, des descriptions de phénomènes empiriques peuvent servir également à donner des intuitions pour résoudre des problèmes de mathématiques pures³⁷. Il y a donc engrènement mutuel des mathématiques par les autres disciplines des sciences. Nous avons vu que les mathématiques étaient formellement adaptées au projet de la physique ou d'autres sciences, puisque celles-ci tentent de décrire des « éléments de réalité matérielle » et que les conditions nécessaires à la description de ces éléments sont exprimées par des couples « relations-invariants » qui font justement l'objet de la recherche mathématique. Au cours de son histoire, les mathématiques s'adosent à la connaissance empirique et petit-à-petit se laissent « in-former » par cette dernière. Il y a donc progressivement, au cœur des mathématiques, une sorte « d'infiltration empirique ». Autrement dit, progressivement, des structures relationnelles caractéristiques de la description formelle des phénomènes empiriques sont incluses dans le corps des

(36) G. Cohen-Tannoudji, M. Spiro, *La Matière Espace-Temps*, Paris, Fayard, 1986.

(37) Cf. M. Flato, *Le pouvoir des mathématiques*, Paris, Hachette, 1990.

connaissances mathématiques. On pourrait dire plus. En effet, cette « infiltration empirique » ne se fait pas naturellement, le mathématicien ou le physicien théoricien doit à tout moment « adapter » les mathématiques à la physique. On oublie souvent le travail de traduction, de réécriture qu'ont dû faire les scientifiques pour rendre les mathématiques efficaces³⁸. Il faut remarquer aussi que l'introduction de mathématiques évoluées en physique se fait souvent de manière progressive : les physiciens théoriciens développent les mathématiques à partir de théories qui ont déjà réussi et celles-ci les guident pour étendre pas-à-pas le formalisme. Il suffit de consulter le remarquable ouvrage de Madame Tonnelat sur les théories unitaires³⁹ pour se rendre compte des multiples essais qui ont été tentés, souvent infructueux, pour étendre le champ d'efficacité du formalisme mathématique de la relativité générale. L'efficacité n'est pas un miracle survenant d'un coup. Elle présuppose une lente démarche qui se fonde sur les formalismes ayant déjà fait leurs preuves et un processus complexe de « co-adaptation » impliquant des relations bilatérales entre les mathématiques et les sciences empiriques. Il n'y a donc pas d'explication possible de l'efficacité des mathématiques en sciences sans une perspective historique.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être résumés comme suit. (1) Les mathématiques sont constituées de domaines de relations symboliques caractérisées, si elles sont significatives, par des classes plus ou moins riches d'invariants. (2) La source des mathématiques est à chercher au niveau des objets mentaux les plus généraux (c'est ceux-là qui constituent le « monde des idées » du mathématicien platonicien). L'activité mathématique peut être alors décrite comme une constitution de représentations d'objets mentaux qui sont « visés » par le mathématicien (3) Ce processus de constitution pourrait être le prolongement de l'activité cérébrale qui, au niveau le plus élémentaire, fournit le percept visuel⁴⁰ et qui se couple progressivement à une capacité langagière symbolique. (4) L'efficacité des mathématiques élémentaires s'expliquerait par la réussite (relative) de la perception visuelle ordinaire. (5) L'efficacité des mathématiques « évoluées » s'expliquerait, en étendant la justification relative à celle des mathématiques « élémentaires ». On évoquerait pour ce faire, d'une part, le fait que celles-ci fournissent des couples « relations-invariants » nécessaires à la description formelle de tout « élément de réalité » et, d'autre part, une coadaptation historique progressive qui injecte dans les mathématiques des structures formelles caractéristiques de la description de phénomènes empiriques et qui « in-forme » les descriptions théoriques des sciences par les mathématiques existantes à une époque donnée. C'est cela qui expliquerait pourquoi les mathématiques semblent toujours suivre ou précéder d'assez près les développements des sciences empirico-formelles.

(38) Nous pensons par exemple au travail de Grossmann pour l'introduction de la géométrie différentielle en relativité générale, au travail de Cartan, Weyl, Van Der Waerden,... pour retrouver, par-delà l'équation de Dirac, la théorie des spineurs qui « dormait » dans les travaux de Cartan depuis 1913 ou encore au travail des physiciens qui ont reliés la théorie des ondelettes à celle des états cohérents et à celle de Caldéron et Sygmund,...

(39) M.-A. Tonnelat, *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

(40) Il serait intéressant de scruter de manière détaillée les incidences des lésions survenues dans les zones qui sont impliquées dans la constitution du percept visuel, sur la capacité à développer des activités mathématiques évoluées : démonstration de théorèmes, intuition abstraite,...

5. Un nouveau statut épistémologique pour la théorie des probabilités ?

Nous avons commencé notre contribution en soulignant l'aspect hybride de la théorie des probabilités et la résistance éprouvée par certains probabilistes de renom à résorber entièrement leur discipline dans la théorie abstraite de la mesure. La théorie des probabilités semble être un lieu de médiations, un champ théorique où se réalise un travail d'articulation et de coadaptation entre des théories formelles comme celle de la mesure et des descriptions de phénomènes où joue une dimension « aléatoire ». Dans un deuxième temps, notre recherche des sources de l'efficacité des mathématiques nous a fait entrevoir une situation complexe. Les mathématiques peuvent être efficaces, mais elles ne le sont qu'au prix d'un travail de traduction, d'adaptation où les concepts les plus formels sont infléchis pour rejoindre les intérêts des physiciens, des biologistes, des économistes... Ce travail d'adaptation n'est pas un travail purement abstrait, il demande une dynamique d'aller et retour des champs empiriques vers les champs plus formels. Il constitue souvent d'ailleurs une sorte de domaine boudé par les mathématiciens trop rigoureux, car lorsqu'on y entre, il faut accepter de faire usage de concepts qui ne sont peut-être pas encore bien définis (l'intégrale de chemins aujourd'hui et les « fonctions » de Dirac ou de Heaviside autrefois,...). A propos de tels domaines, on pourrait parler de « mathématiques expérimentales ». Les physiciens sont habitués à ce genre de mathématiques et leur nécessité pour le processus de coadaptation dont nous avons parlé devrait leur valoir une réelle attention de la part des historiens et philosophes des sciences.

La théorie des probabilités pourrait retrouver ici son véritable statut épistémologique. Si nous ne la regardons qu'à la lueur d'une perspective axiomatisante, il est clair qu'elle n'a pas d'existence indépendante de la théorie de la mesure. Par contre, si nous y voyons un domaine où se rencontrent différentes disciplines qui cherchent à approcher et à formuler le caractère « aléatoire » des phénomènes, alors la théorie des probabilités ne se réduit plus à la théorie de la mesure. Elle en devient plutôt la face « expérimentale », celle qui permet à la théorie de la mesure de devenir « efficace » en se reliant à la physique ou aux autres sciences. Nous rejoignons ici la conception qu'Armand Borel se fait des mathématiques. Pour lui les mathématiques ne peuvent être réduites au formalisme pur, elles se définissent plutôt par analogie avec la physique⁴¹ :

"I have often maintained, and even committed to paper on some occasions, the view that mathematics is a science, which, in analogy with physics, has an experimental and theoretical side, but operates in an intellectual world of objects, concepts and tools. Roughly speaking the experimental side is the investigation of special cases, either because they are of interest in themselves or because one hopes to get a clue to general phenomena, and the theoretical side is the search of general theorems".

Voilà nous semble-t-il le véritable lieu de la théorie des probabilités. Non pas un domaine en attente d'être éliminé par l'axiomatique, mais un lieu « expérimental ». L'expérimentation est précisément le point de rencontre entre le « réel » et la théorie. Les mathématiques

(41) A. Borel, "Responses to 'Theoretical Mathematics' ", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **30** (1994) 180.

« expérimentales » sont, de la même façon, le lieu de la rencontre entre le pur formalisme (les mathématiques « théoriques ») et les représentations théoriques issues des sciences humaines ou de la nature. La discussion sur le statut de la théorie des probabilités a le grand mérite de mettre en évidence ce caractère « expérimental » irréductible de l'activité mathématique dont certaines parties de l'œuvre de Witten⁴² en manifestent aujourd'hui l'extrême fécondité. On pourrait dire que la théorie des probabilités est la trace la plus manifeste de cette facette de l'activité mathématique. Le caractère médiateur, interfacial, de la théorie des probabilités et de la mathématique expérimentale en général constitue une des conditions nécessaires de l'efficacité des formalismes puisque c'est justement au niveau de ces théories que se réalisent les coadaptations que nous avons évoquées⁴³ et qui rendent les mathématiques homogènes à d'autres sciences. L'histoire de la théorie des probabilités apporte donc des éléments précieux à la tentative de résolution de l'énigme du problème de l'efficacité des mathématiques dans les sciences⁴⁴.

Les grands probabilistes avaient donc raison d'être dérangés par une réduction extrême de leur discipline à la théorie abstraite de la mesure. En effet, ce réductionnisme risquait tôt ou tard de couper leur discipline de sa véritable efficacité. Avec Armand Borel, ils nous invitent donc implicitement à reprendre à nouveaux frais l'épistémologie de la théorie des probabilités pour y découvrir les caractéristiques essentielles de cette « mathématique expérimentale », clef de voûte de l'étonnante capacité des mathématiques à mordre sur le réel empirique.

(42) D. Bennequin, « En marge de l'apologie de Witten », *Gazette des mathématiciens*, n° 50 (1991) 71-93.

(43) Aujourd'hui, le contact entre les théories et l'expérience se réalise souvent via des simulations qui se basent sur l'utilisation de processus stochastiques : simulations Monte-Carlo, ... Ce qui montre bien ce rôle interfacial de la théorie des probabilités.

(44) Notre approche montre que le problème de l'efficacité des mathématiques n'est pas susceptible d'une solution si l'on oublie la dimension historique des productions mathématiques et si l'on sépare radicalement l'épistémologie des mathématiques d'une théorie neurophysiologique de la cognition.

Petite Poucette. Les nouveaux défis de l'Éducation

Michel Serres

Membre de l'Académie française

Séance solennelle de l'Académie française en date du mardi 1er mars 2011

Avant d'enseigner quoi que ce soit à qui que ce soit, au moins faut-il le connaître. Qui se présente, aujourd'hui, à l'école, au collège, au lycée, à l'université ?

Ce nouvel écolier, cette jeune étudiante n'a jamais vu veau, vache, cochon ni couvée. En 1900, la majorité des humains, sur la planète, s'occupaient de labourage et de pâturage ; en 2010, la France, comme les pays analogues au nôtre, ne compte plus qu'un pour cent de paysans. Sans doute faut-il voir là une des plus immenses ruptures de l'histoire, depuis le néolithique. Jadis référée aux pratiques géorgiques, la culture change.

Celle ou celui que je vous présente ne vit plus en compagnie des vivants, n'habite plus la même Terre, n'a donc plus le même rapport au monde. Il ou elle ne voit que la nature arcadienne des vacances, du loisir ou du tourisme.

- Il habite la ville. Ses prédécesseurs immédiats, pour plus de la moitié, hantaient les champs. Mais il est devenu sensible aux questions d'environnement. Prudent, il polluera moins que nous autres, adultes inconscients et narcissiques.

Il n'a plus le même monde physique et vital, ni le même monde en nombre, la démographie ayant soudain bondi vers sept milliards d'humains.

- Son espérance de vie est, au moins, de quatre-vingts ans. Le jour de leur mariage, ses arrière-grands-parents s'étaient juré fidélité pour à peine une décennie. Qu'il et elle envisagent de vivre ensemble, vont-ils jurer de même pour soixante-cinq ans ? Leurs parents héritèrent vers la trentaine, ils attendront la vieillesse pour recevoir ce legs.

Ils n'ont plus la même vie, ne vivent plus les mêmes âges, ne connaissent plus le même mariage ni la même transmission de biens.

- Depuis soixante ans, intervalle unique dans notre histoire, il et elle n'ont jamais connu de guerre, ni bientôt leurs dirigeants ni leurs enseignants. Bénéficiant des progrès de la médecine et, en pharmacie, des antalgiques et anesthésiques, ils ont moins souffert, statistiquement parlant, que leurs prédécesseurs. Ont-ils eu faim ?

Or, religieuse ou laïque, toute morale se résumait à des exercices destinés à supporter une douleur inévitable et quotidienne : maladies, famine, cruauté du monde.

Ils n'ont plus le même corps ni la même conduite ; aucun adulte ne sut ni ne put leur inspirer une morale adaptée.

- Alors que leurs parents furent conçus à l'aveuglette, leur naissance fut programmée. Comme, pour le premier enfant, l'âge moyen de la mère a progressé de dix à quinze ans, les enseignants ne rencontrent plus des parents d'élèves de la même génération.

Ils n'ont plus les mêmes parents ; changeant de sexualité, leur génitalité se transformera.

- Alors que leurs prédécesseurs se réunirent dans des classes ou des amphis homogènes culturellement, ils étudient au sein d'un collectif où se côtoient désormais plusieurs religions, langues, provenances et mœurs. Pour eux et leurs enseignants, le multiculturalisme est de règle depuis quelques décennies. Pendant combien de temps pourront-ils encore chanter l'ignoble « sang impur » de quelque étranger ?

Ils n'ont plus le même monde mondial, ils n'ont plus le même monde humain. Autour d'eux, les filles et les fils d'immigrés, venus de pays moins riches, ont vécu des expériences vitales inverses.

Bilan temporaire. Quelle littérature, quelle histoire comprendront-ils, heureux, sans avoir vécu la rusticité, les bêtes domestiques et la moisson d'été, dix conflits, blessés, morts et affamés, cimetières, patrie, drapeau sanglant, monuments aux morts, sans avoir expérimenté dans la souffrance, l'urgence vitale d'une morale ?

I. Voilà pour le corps ; voici pour la connaissance

- Leurs ancêtres cultivés avaient, derrière eux, un horizon temporel de quelques milliers d'années, ornées par la préhistoire, les tablettes cunéiformes, la Bible juive, l'Antiquité gréco-latine. Milliardaire désormais, leur horizon temporel remonte à la barrière de Planck, passe par l'accrétion de la planète, l'évolution des espèces, une paléo-anthropologie millionnaire.

N'habitent plus le même temps, ils entrent dans une autre histoire.

- Ils sont formatés par les médias, diffusés par des adultes qui ont méticuleusement détruit leur faculté d'attention en réduisant la durée des images à sept secondes et le temps des réponses aux questions à quinze secondes, chiffres officiels ; dont le mot le plus

répété est « mort » et l'image la plus reprise celle des cadavres. Dès l'âge de douze ans, ces adultes-là les forcèrent à voir plus de vingt mille meurtres.

- Ils sont formatés par la publicité ; comment peut-on leur apprendre que le mot relais, en français s'écrit -ais, alors qu'il est affiché dans toutes les gares -ay ? Comment peut-on leur apprendre le système métrique, quand, le plus bêtement du monde, la SNCF leur fourgue des *s'miles* ?

Nous, adultes, avons doublé notre société du spectacle d'une société pédagogique dont la concurrence écrasante, vaniteusement inculte, éclipse l'école et l'université. Pour le temps d'écoute et de vision, la séduction et l'importance, les médias se sont saisis depuis longtemps de la fonction d'enseignement.

Les enseignants sont devenus les moins entendus de ces instituteurs. Critiqués, méprisés, vilipendés, puisque mal payés.

- Ils habitent donc le virtuel. Les sciences cognitives montrent que l'usage de la toile, lecture ou écriture au pouce des messages, consultation de Wikipedia ou de Facebook, n'excitent pas les mêmes neurones ni les mêmes zones corticales que l'usage du livre, de l'ardoise ou du cahier. Ils peuvent manipuler plusieurs informations à la fois. Ils ne connaissent ni n'intègrent ni ne synthétisent comme leurs ascendants.

Ils n'ont plus la même tête.

- Par téléphone cellulaire, ils accèdent à toutes personnes ; par GPS, en tous lieux ; par la toile, à tout le savoir ; ils hantent donc un espace topologique de voisinages, alors que nous habitons un espace métrique, référé par des distances.

Ils n'habitent plus le même espace.

Sans que nous nous en apercevions, un nouvel humain est né, pendant un intervalle bref, celui qui nous sépare de la Seconde Guerre mondiale.

Il ou elle n'a plus le même corps, la même espérance de vie, n'habite plus le même espace, ne communique plus de la même façon, ne perçoit plus le même monde extérieur, ne vit plus dans la même nature ; né sous péridurale et de naissance programmée, ne redoute plus la même mort, sous soins palliatifs. N'ayant plus la même tête que celle de ses parents, il ou elle *connaît autrement*.

- Il ou elle écrit autrement. Pour l'observer, avec admiration, envoyer, plus rapidement que je ne saurai jamais le faire de mes doigts gourds, envoyer, dis-je, des SMS avec les deux pouces, je les ai baptisés, avec la plus grande tendresse que puisse exprimer un grand-père, Petite Poucette et Petit Poucet. Voilà leur nom, plus joli que le vieux mot, pseudo-savant, de *dactylo*.

- Ils ne parlent plus la même langue. Depuis Richelieu, l'Académie française publie, à peu près tous les quarante ans, pour référence, le dictionnaire de la nôtre. Aux siècles

précédents, la différence entre deux publications s'établissait autour de quatre à cinq mille mots, chiffres à peu près constants ; entre la précédente et la prochaine, elle sera d'environ **trente mille**.

À ce rythme linguistique, on peut deviner que, dans peu de générations, nos successeurs pourraient se trouver aussi séparés de nous que nous le sommes de l'ancien français de Chrétien de Troyes ou de Joinville. Ce gradient donne une indication quasi photographique des changements majeurs que je décris.

Cette immense différence, qui touche toutes les langues, tient, en partie, à la **rupture entre les métiers** des années cinquante et ceux d'aujourd'hui. Petite Poucette et son frère ne s'évertueront plus aux mêmes travaux.

La langue a changé, le travail a muté.

2. L'individu

Mieux encore, les voilà devenus des individus. Inventé par saint Paul, au début de notre ère, l'individu vient de naître seulement ces jours-ci. Nous rendons-nous compte à quel point nous vivons d'appartenances, de jadis jusqu'à naguère ? Français, catholiques ou juifs, Gascons ou Picards, riches ou pauvres, femmes ou mâles... nous appartenions à des régions, des religions, des cultures, rurales ou villageoises, des groupes singuliers, des communes locales, un sexe, la patrie. Par les voyages, les images, la toile, les guerres abominables, ces collectifs ont à peu près tous explosé. Ceux qui demeurent continuent aujourd'hui, vite, d'éclater.

L'individu ne sait plus vivre en couple, il divorce ; ne sait plus se tenir en classe, il remue et bavarde ; ne prie plus en paroisse ; l'été dernier, nos footballeurs n'ont pas su faire équipe ; nos politiques savent-ils encore construire un parti ? On dit partout mortes les idéologies ; ce sont les appartenances qu'elles recrutaient qui s'évanouissent.

Cet individu nouveau-né annonce plutôt une bonne nouvelle. À balancer les inconvénients de l'égoïsme et les crimes de guerre commis par et pour la *libido* d'appartenance – des centaines de millions de morts –, j'aime d'amour ces jeunes gens.

Cela dit, reste à inventer de nouveaux liens. En témoigne le recrutement de Facebook, quasi équipotent à la population du monde.

Comme un atome sans valence, Petite Poucette est toute nue. Nous, adultes, n'avons inventé aucun lien social nouveau. L'emprise de la critique et du soupçon les déconstruit plutôt.

Rarissimes dans l'histoire, ces transformations, que j'appelle hominescentes, créent, au milieu de notre temps et de nos groupes, une crevasse si large que peu de regards l'ont mesurée à sa vraie taille.

Je la compare, je le répète, à celles qui intervinrent au néolithique, à l'aurore de la science grecque, au début de l'ère chrétienne, à la fin du Moyen Âge et à la Renaissance.

Sur la lèvre aval de cette faille, voici des jeunes gens auxquels nous prétendons dispenser de l'enseignement, au sein de cadres datant d'un âge qu'ils ne reconnaissent plus : bâtiments, cours de récréation, salles de classe, bancs, tables, amphithéâtres, campus, bibliothèques, laboratoires même, j'allais même dire savoirs... cadres datant, dis-je, d'un âge et adaptés à une ère où les hommes et le monde étaient ce qu'ils ne sont plus.

3. Trois questions, par exemple : Que transmettre ? À qui le transmettre ? Comment le transmettre ?

Que transmettre ? Le savoir !

Jadis et naguère, le savoir avait pour support le corps même du savant, de l'aède ou du griot. Une bibliothèque vivante... voilà le corps enseignant du pédagogue.

Peu à peu, le savoir s'objectiva d'abord dans des rouleaux, vélin ou parchemins, support d'écriture, puis, dès la Renaissance, dans les livres de papier, supports d'imprimerie, enfin, aujourd'hui, sur la toile, support de messages et d'information.

L'évolution historique du couple support-message est *une bonne variable de la fonction d'enseignement*. Du coup, la pédagogie changea trois fois : avec l'écriture, les Grecs inventèrent la *paideia* ; à la suite de l'imprimerie, les traités de pédagogie pullulèrent. Aujourd'hui ?

Je répète. *Que transmettre ? Le savoir ? Le voilà, partout sur la toile, disponible, objectif. Le transmettre à tous ? Désormais, tout le savoir est accessible à tous. Comment le transmettre ? Voilà, c'est fait.*

Avec l'accès aux personnes, par le téléphone cellulaire, avec l'accès en tous lieux, par le GPS, l'accès au savoir est désormais ouvert. D'une certaine manière, il est *toujours et partout déjà transmis*.

Objectif, certes, mais, de plus, distribué. Non concentré. Nous vivons dans un espace métrique, dis-je, référé à des centres, à des concentrations. Une école, une classe, un campus, un amphi, voilà des concentrations de personnes, étudiants et professeurs, de livres, en bibliothèques, très grande dit-on parfois, d'instruments dans les laboratoires... ce savoir, ces références, ces livres, ces dictionnaires... les voilà distribués partout et, en particulier, chez vous ; mieux, en tous les lieux où vous vous déplacez ; de là étant, vous pouvez toucher vos collègues, vos élèves, où qu'ils passent ; ils vous répondent aisément.

L'ancien espace des concentrations – celui-là même où je parle et où vous m'écoutez, que faisons-nous ici ? – se dilue, se répand ; nous vivons, je viens de le dire, dans un espace

de voisinages immédiats, mais, de plus, distributif. – Je pourrai vous parler de chez moi ou d'ailleurs, et vous m'entendriez ailleurs ou chez vous.

Ne dites surtout pas que l'élève manque des fonctions cognitives qui permettent d'assimiler le savoir ainsi distribué, puisque, justement, ces fonctions se transforment avec le support. Par l'écriture et l'imprimerie, la mémoire, par exemple, muta au point que Montaigne voulut une tête bien faite plutôt qu'une tête bien pleine. Cette tête a muté.

De même donc que la pédagogie fut inventée (*paideia*) par les Grecs, au moment de l'invention et de la propagation de l'écriture ; de même qu'elle se transforma quand émergea l'imprimerie, à la Renaissance ; de même, la pédagogie change totalement avec les nouvelles technologies.

Et, je le répète, elles ne sont qu'une variable quelconque parmi la dizaine ou la vingtaine que j'ai citées ou pourrais énumérer.

Ce changement si décisif de l'enseignement, – changement répercuté sur l'espace entier de la société mondiale et l'ensemble de ses institutions désuètes, changement qui ne touche pas, et de loin, l'enseignement seulement, mais sans doute le travail, la politique et l'ensemble de nos institutions – nous sentons en avoir un besoin urgent, mais nous en sommes encore loin ; probablement, parce que ceux qui traînent encore dans la transition entre les derniers états n'ont pas encore pris leur retraite, alors qu'ils diligent les réformes, selon des modèles depuis longtemps évanouis.

Enseignant pendant quarante ans sous à peu près toutes les latitudes du monde, où cette crevasse s'ouvre aussi largement que dans mon propre pays, j'ai subi, j'ai souffert ces réformes-là comme des emplâtres sur des jambes de bois, des rapetassages ; or les emplâtres endommagent le tibia comme les rapetassages déchirent encore plus le tissu qu'ils cherchent à consolider.

Oui, nous vivons un période comparable à l'aurore de la *paideia*, après que les Grecs apprirent à écrire et démontrer ; comparable à la Renaissance qui vit naître l'impression et le règne du livre apparaître ; période incomparable pourtant, puisqu'en même temps que ces techniques mutent, le corps se métamorphose, changent la naissance et la mort, la souffrance et la guérison, l'être-au-monde lui-même, les métiers, l'espace et l'habitat.

4. Envoi

Face à ces mutations, sans doute convient-il d'inventer d'inimaginables nouveautés, hors les cadres désuets qui formatent encore nos conduites et nos projets. Nos institutions luisent d'un éclat qui ressemble, aujourd'hui, à celui des constellations dont l'astrophysique nous apprend jadis qu'elles étaient mortes déjà depuis longtemps.

Pourquoi ces nouveautés ne sont-elles point advenues ? J'en accuse les philosophes, dont je suis, gens qui ont pour métier d'anticiper le savoir et les pratiques à venir, et qui

ont, comme moi, ce me semble, failli à leur tâche. Engagés dans la politique au jour le jour, ils ne virent pas venir le contemporain. Si j'avais eu, en effet, à croquer le portrait des adultes, dont je suis, il eût été moins flatteur.

Je voudrais avoir dix-huit ans, l'âge de Petite Poucette et de Petit Poucet, puisque tout est à refaire, non, puisque tout est à faire.

Je souhaite que la vie me laisse assez de temps pour y travailler encore, en compagnie de ces Petits, auxquels j'ai voué ma vie, parce que je les ai toujours respectueusement aimés.



Pour conclure

Cet ouvrage fait référence aux deux disciplines majeures de la physique moderne : la Relativité générale et la Physique quantique. Nous espérons qu'il a rempli la mission qui lui était assignée à savoir :

- faire connaître au plus haut niveau scientifique les avancées prodigieuses qui ont été réalisées depuis plus d'un siècle de recherches dans ces deux disciplines, depuis les travaux fondateurs d'Albert Einstein et de ses contemporains ; donner un aperçu sur des questions qui restent encore ouvertes malgré les succès immenses de celles-ci, des expériences et des observations astrophysiques en cours ; enfin avancer des éléments de prospective imaginable ;
- faire connaître par là-même les équipes françaises qui occupent des positions éminentes dans la science internationale ;
- permettre dans le même temps à un lecteur non spécialiste, mais averti, une lecture relativement aisée et du meilleur niveau dans un domaine pluridisciplinaire d'une grande complexité ;
- notre espoir est aussi d'intéresser au plus haut point les jeunes aux questions scientifiques.

Le comité de lecture de l'AEIS sur la proposition de l'un de ses membres (Gilles Cohen-Tannoudji) a décidé de donner *in fine* la parole à Michel Serres, membre de l'Académie française, qui devait participer au débat sur l'hypothèse d'une nouvelle révolution scientifique, mais en a malheureusement été empêché. Le chapitre 18 est consacré à son célèbre discours *Petite Poucette*, prononcé en séance solennelle de l'Académie française le 1^{er} mars 2011, dans lequel il évoque la mutation du numérique qu'il compare à l'invention de l'écriture et à celle de l'imprimerie

Pour terminer rappelons qu'en 2016 a eu lieu une autre commémoration pour célébrer les 50 ans de l'attribution du Nobel à Alfred Kastler. Par la même occasion, mettons en exergue quelques réflexions de prospective – peut-être moins connues de ce grand savant et grand pédagogue – extraites de son livre *Cette étrange matière* qu'il publia en 1976.

Dans cet ouvrage Alfred Kastler ne se borne pas à livrer l'histoire des bouleversements conceptuels qui ont – en plus de cent ans – conduit la physique sur de nouveaux chemins selon son expression. Dans la dernière partie de son ouvrage, il livre des réflexions que ses connaissances lui inspirent : « La physique contemporaine me paraît confrontée à un autre problème critique, celui de la matière vivante. Il me semble que la physique pourrait jouer un rôle capital dans le développement futur de la biologie, si la recherche confirmait une idée qui se profile aujourd'hui, selon laquelle il pourrait exister un rapport entre la *cohérence* en physique et l'*ordre* biologique, caractérisés l'un et l'autre par une *néguentropie* remarquable ».

Victor Mastrangelo
Président de l'AEIS

APPENDICES

Appendices

Présentation

On trouvera dans ces appendices trois contributions présentant chacune une voie possible pour une synthèse entre mécanique quantique et relativité générale ainsi qu'une contribution proposant une explication de la photosynthèse par des mécanismes quantiques.

Alexandre et Michel Gondran montrent dans l'appendice 1 **Comment comprendre la mesure du spin et l'expérience EPR-B ? Une interprétation causale** que, contrairement à ce qui est habituellement dit, il est possible de séparer l'inséparable, c'est-à-dire de remplacer le spineur singulet de l'expérience EPR-B dans l'espace de configuration par deux spineurs d'une particule unique dans l'espace physique. Ils en déduisent une nouvelle interprétation causale réaliste et déterministe de l'expérience EPR-B d'intrication à distance par les spins, corrigeant les défauts de l'interprétation de de Broglie-Bohm précédente. Ils en concluent que la propriété de non-localité des particules EPR-B par les spins n'est pas en contradiction avec la relativité restreinte qui ne concerne que des concepts autres que le spin et qu'une synthèse réaliste et déterministe de la mécanique quantique et de la relativité générale s'avère possible dans ce cadre.

Claude Daviau, Jacques Bertrand et Dominique Girardot proposent dans l'appendice 2 **L'onde spinorielle comme champ unitaire** de rapprocher l'électromagnétisme, les interactions faibles, les interactions fortes et la relativité générale en réécrivant l'onde de spin $\frac{1}{2}$ (rendant compte de tous les fermions élémentaires de première génération, à la

base du modèle standard de la physique quantique), de manière aussi proche que possible de la relativité générale.

Claude Elbaz montre dans l'appendice 3 **Le programme d'Einstein : une contribution** comment l'approche unitaire d'Einstein de « rejeter le concept de matière et construire une physique basée uniquement sur le champ », permet de compléter la mécanique quantique en décrivant la matière comme une petite région d'amplitude localement plus importante (un « champ à bosse » selon Louis de Broglie), et d'en déduire les principes de conservation de l'énergie-impulsion, et variationnel de moindre action, les interactions électromagnétique et gravitationnelle, et l'invariant adiabatique, formellement identique à la constante de Planck.

Dans l'appendice 4 **The Quantum Design of Photosynthesis**, Rienk Van Grondelle, Elisabet Romero et Vladimir Novoderezhkin attribuent le rendement extraordinaire (près de 100 %) de la photosynthèse bactérienne à un guidage de photons. Ce processus serait typiquement quantique en sondant plusieurs voies en même temps pour sélectionner la plus efficace. Son élucidation, outre l'intérêt scientifique, pourrait ouvrir la voie à des techniques révolutionnaires pour l'exploitation de l'énergie solaire.

Le comité de lecture¹ de l'AEIS

(1) Michel Gondran

1

Comment comprendre la mesure du spin et l'expérience EPR-B ? Une interprétation causale

Michel Gondran ¹

Alexandre Gondran ²

(1) Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, Paris, France

(2) École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France

Résumé

Le spin est un degré de liberté interne à toute particule qui n'a pas d'équivalent en mécanique classique. Pour comprendre sa réalité, nous revenons, dans cet article, sur l'expérience de Stern et Gerlach qui a mis en évidence en 1922 l'existence du spin $1/2$ de l'électron. Cette expérience est l'archétype de la mesure en mécanique quantique. Elle synthétise le problème dit *de la mesure* (chat de Schrödinger). La résolution spatiale et temporelle de l'équation de Pauli est nécessaire pour saisir les nombreuses subtilités de cette expérience. Notamment cela contraint à considérer l'extension spatiale de la fonction d'onde. On montre que la théorie de de Broglie-Bohm (dBB) qui définit une réalité sous-jacente à la mécanique quantique habituelle en ajoutant au formalisme des *variables cachées* (positions des particules) donne une explication causale et réaliste de cette expérience. La version de David Bohm de l'expérience d'Einstein-Podolsky-Rosen (EPR-B) qui met en évidence la non-localité sur une paire de particules intriquées par leur spin utilise des appareils de type Stern-Gerlach. On montre que la théorie de dBB explique également cette expérience. De plus, la nouvelle interprétation causale que nous proposons corrige les défauts de l'interprétation bohémienne précédente et permet de décomposer la fonction d'onde des deux particules intriquées par deux fonctions d'ondes de particule unique.

Abstract

How can we understand the spin measure and the EPR-B experience? A causal interpretation

Spin is an internal degree of freedom of any particle with no equivalent in classical mechanics. To understand its reality, in this paper, we go back to the Stein-Gerlach experiment which in 1922 revealed the 1/2 spin of the electron. This experiment is the archetype of measurement in quantum mechanics. It summarizes the so called problem of measurement (Schroedinger's cat). The spatial and temporal solution of Pauli's equation is necessary in order to understand the numerous subtleties of this experiment. Especially, it obliges to consider the spatial extension of the wave function. We show that the De Broglie-Bohm theory (dBB), which defines a reality underlying the usual quantum mechanics by adding hidden variables (particles positions), gives a causal and realistic explanation of this experiment. The David Bohm version of the Einstein-Podolsky-Rosen (EPR-B) experiment which highlights the non locality of a pair particles entangled by their spin uses Stein-Gerlach types of machines. We show that the dBB theory also explains this experiment. Moreover, our proposed new causal interpretation corrects the defects of the former Bohm interpretation. It allows to decompose the wave function of the two entangled particles in two unique particle wave functions.

1. Expérience de Stern et Gerlach

En étudiant en 1921 et 1922 un jet d'atomes d'argent traversant l'entrefer d'un aimant où règne un champ magnétique fortement inhomogène, Otto Stern et Walther Gerlach [10] mettent en évidence un résultat expérimental qui contredit la prévision théorique classique de l'époque : le faisceau, au lieu de s'élargir, se sépare en deux taches distinctes d'intensité identique. Nous supposons comme schématisé par la figure 1 que le champ magnétique \mathbf{B} est dirigé selon l'axe Oz et que le faisceau atomique arrive perpendiculairement à cet axe (selon Oy). La déviation est due au moment magnétique induit par le moment cinétique interne (*spin*) de l'électron le moins lié de l'atome d'argent.

2. Résolution par l'équation de Pauli

2.1 Source ponctuelle ou extension spatiale : spineur

L'état d'une particule de spin 1/2 est décrit par une fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$, appelée spineur de Pauli, qui admet deux composantes complexes $\Psi^+(\mathbf{x}, t)$ et $\Psi^-(\mathbf{x}, t)$. Au moment d'entrer dans le champ magnétique ($t = 0$), on peut associer à chaque atome d'argent un spineur correspondant à un état pur, comme dans de nombreux livres de cours de mécanique quantique [9, 5, 16, 2] :

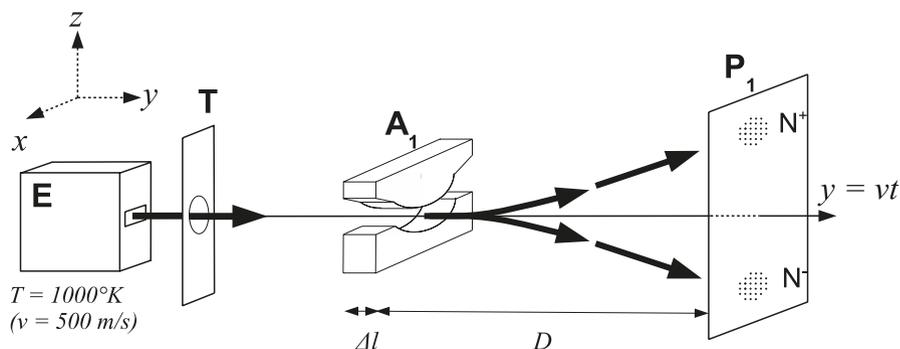


Figure 1. Schéma de l'expérience de Stern et Gerlach : un jet d'atomes d'argent, issu de la source (enceinte **E** chauffée, trou colimateur **T**) traverse un champ magnétique inhomogène (aimant **A₁**) puis se sépare en deux faisceaux distincts donnant sur la plaque **P₁** deux taches distinctes d'intensité identique N^+ et N^- .

$$\Psi_0 = \Psi(t = 0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i \frac{\varphi_0}{2}} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i \frac{\varphi_0}{2}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où θ_0 et φ_0 sont les angles polaires caractérisant l'état pur (cf. figure 2). Les angles θ_0 et φ_0 sont évidemment inconnus et chaque atome du faisceau a des angles (θ_0, φ_0) différents ; on sait seulement que $\theta_0 \in [0 ; \pi]$ et $\varphi_0 \in [0 ; 2\pi[$. Le faisceau traversant le champ magnétique est un mélange statistique d'états purs, c'est à dire un mélange aléatoire d'atomes dans des états purs différents.

Pour faire un calcul analytique et complet de l'expérience et démontrer la contextualité de la mesure du spin, on verra plus loin qu'il est absolument nécessaire de représenter une particule individuelle avec spin par une fonction d'onde (spineur) avec une extension spatiale comme la suivante :

$$\Psi_0(x, z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2+z^2}{4\sigma_0^2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i \frac{\varphi_0}{2}} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i \frac{\varphi_0}{2}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

En effet le faisceau d'atomes d'argent n'est pas ponctuel et il faut considérer les variables d'espace x (seul les variables de spin sont prises en compte dans (1)) ; on considère dans la formule (2) un faisceau gaussien suivant les axes Oz et Ox d'écart type $\sigma_0 = 10^{-4}$ m. L'axe Oy est l'axe de propagation des atomes ; il est traité classiquement sachant que la vitesse des atomes dans cette direction est environ de $v_y = 500$ m/s, ce qui correspond à une température du four **E** de 1000K.

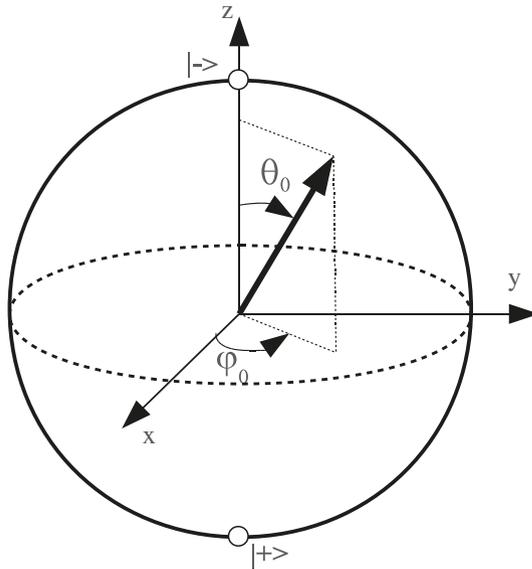


Figure 2. Orientation du spin d'un état pur. θ_0 et φ_0 sont les angles polaires caractérisant le spineur. Ils correspondent aux angles de la sphère de Bloch.

Pour étudier l'évolution de la fonction d'onde pendant les mesures, nous n'utiliserons pas les postulats de la mécanique quantique liés à la mesure qui ne concernent que le résultat final, mais nous résoudrons l'équation de Schrödinger dépendante du temps ; l'équation de Schrödinger qui tient compte du spin 1/2 est appelée l'équation de Pauli.

2.2 Équation de Pauli

L'évolution non relativiste du spineur $\Psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \Psi^+(\mathbf{x}, t) \\ \Psi^-(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$ est donné par l'équation de Pauli. Pour une particule neutre (l'atome d'argent) et de spin 1/2 l'équation de Pauli est :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu_B \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma} \right) \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

où $m = 1.8 \times 10^{-25}$ kg est la masse de l'atome d'argent, \mathbf{B} est le champ magnétique, $\mu_B = e\hbar/2m_e$ est le magnéton de Bohr et $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ correspondent aux trois matrices de Pauli.

Sans l'extension spatiale initiale, la résolution spatiale de l'équation de Pauli est impossible et nous perdons la possibilité de tenir compte de l'évolution du spin durant le processus de mesure [17, 4, 7, 3]. En effet, l'évolution différente des deux composantes du spineur joue un rôle clé dans la compréhension du processus de mesure.

2.3 Solution sans l'équation de Pauli et avec les postulats de la mesure

Il est très facile d'inférer le résultat de la mesure sans avoir recours à l'équation de Pauli en utilisant les postulats de la mesure. On réécrit le spineur initial sans extension spatiale $\Psi_0^{(1)}$ de l'équation (1) sous la forme :

$$\Psi_0 = \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\varphi_0}{2}} |+\rangle + \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} |-\rangle, \quad (4)$$

où $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de l'opérateur σ_z . D'après les postulats de la mesure, $|\cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\varphi_0}{2}}|^2 = \cos^2 \frac{\theta_0}{2}$ est la probabilité de mesurer le spin $+\hbar/2$ (valeur propre de l'opérateur de projection $S_z = \hbar/2 \sigma_z$) et $\sin^2 \theta_0/2$ celle de mesurer le spin $-\hbar/2$. Le θ_0 étant inconnu au sortir de la source et sachant que chaque atome a un θ_0 différent compris entre 0 et π , la probabilité de mesurer le spin $+1/2$, ne connaissant pas le spineur initial de l'atome incident, est égale à : $\int_0^\pi \cos^2 \frac{\theta_0}{2} d\theta_0 = 0.5$. Celle de mesurer le spin $-1/2$ est égale à : $\int_0^\pi \sin^2 \frac{\theta_0}{2} d\theta_0 = 0.5$. On retrouve donc les deux taches distinctes d'intensité identique N^+ et N^- . On comprend aisément l'intérêt pratique des postulats de la mesure : ils permettent de retrouver simplement et rapidement les résultats expérimentaux ; cependant ils ne permettent pas une compréhension précise du phénomène de mesure.

3. Théorie de de Broglie-Bohm

Dans la théorie de de Broglie-Bohm, la fonction d'onde ne représente *pas complètement* l'état d'une particule quantique et il est nécessaire d'ajouter à sa description la position de la particule $X(t)$. L'évolution du spineur est toujours donné par l'équation de Pauli (3) et l'évolution de sa position est donnée par la formule de [4, 17] :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\hbar}{2m\rho} \text{Im}(\Psi^\dagger \nabla \Psi)|_{\mathbf{x}=X(t)} \quad (5)$$

où $\Psi^\dagger = (\Psi^{*+}, \Psi^{-*})$ et $\rho = \Psi^\dagger \Psi$. L'atome est à la fois une onde et un corpuscule. Onde et corpuscule coexistent, la première guidant le second par l'équation (5), d'où le nom d'onde pilote donné par de Broglie en 1927.

Bohm et al. [4] définissent également un champ de vecteurs de spin comme :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2\rho} \Psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma} \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2} (\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta). \quad (6)$$

(1) Le raisonnement est similaire que l'on considère ou pas l'extension spatiale. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle elle n'est souvent pas considérée.

Le vecteur de spin d'une particule individuelle est évaluée le long de sa trajectoire comme étant : $s = s(X(t), t)$.

3.1 État pur

On résout l'équation de Pauli pour un atome unique correspondant à un état pur avec (θ_0, ϕ_0) . Dans l'espace libre, au sortir du champ, au temps $t + \Delta t$ ($t \geq 0$ et $\Delta t = \Delta l/v_y$ étant la durée de traversée du champ), on obtient [11] :

$$\Psi(x, z, t + \Delta t) \simeq (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} e^{-\frac{(z-z_\Delta-ut)^2}{2\sigma_z^2}} e^{i\frac{mu_z+h\varphi_+}{\hbar}} \\ i \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-\frac{(z+z_\Delta+ut)^2}{2\sigma_z^2}} e^{i\frac{-mu_z+h\varphi_-}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

où

$$z_\Delta = \frac{\mu_B B'_0 (\Delta t)^2}{2m} = 10^{-5} m, \quad u = \frac{\mu_B B'_0 (\Delta t)}{m} = 1 m/s, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B'_0 x \\ 0 \\ B_0 - B'_0 z \end{pmatrix}, \quad (8)$$

et où φ^- et φ^+ sont des constantes. La figure 3 représente $\rho(z, t) = \int \Psi^\dagger(x, z, t) \Psi(x, z, t) dx$, la densité de probabilité de présence de l'atome d'argent pour les valeurs $\theta_0 = \pi/3$ et $\phi_0 = 0$. L'axe Oy , de propagation du jet, est en abscisse ($y = v_y t$) et l'axe Oz en ordonnée (la variable x n'est pas représentée car l'onde reste gaussienne selon cet axe). L'aimant A_1 est représenté sur la figure par les deux rectangles blancs, il est long de $\Delta l = 1$ cm et il y a $D = 20$ cm de parcours libre avant que l'atome soit mesurée sur l'écran de détection P_1 . Les données numériques proviennent du livre de Cohen-Tannoudji et al. [5]. Pour le champ électromagnétique \mathbf{B} , on a : $B_0 = 5$ Tesla, $B'_0 = |\frac{\partial B}{\partial z}| = -|\frac{\partial B}{\partial x}| = 10^3$ Tesla/m. La théorie de dBB complète la mécanique quantique habituelle car comme on le voit sur la figure 3b, elle montre comment la position *initiale* de la particule explique de façon causale la position *finale* habituellement justifié par la réduction du paquet d'onde (figure 3a). Dans ce cadre, il n'y a plus de problème de mesure car la continuité de la mécanique quantique vers la mécanique classique se fait de façon naturelle (pas de création de notion de position).

La figure 4 représente la densité $\rho(z, t)$ pour l'état pur $\theta_0 = \pi/2$ ainsi que six trajectoires d'atomes dont la position initiale a été tiré au hasard.

L'équation de Pauli ne prévoit que la probabilité ρ du lieu de l'impact de l'atome. Sa position effective dans l'interprétation de Copenhague est sans explication : c'est un aléa fondamental d'un type nouveau par rapport à la mécanique classique. Albert Einstein critiqua cette vision des choses par sa célèbre formule : « Dieu ne joue pas aux dés ». D'après lui, les prédictions aléatoires de la mécanique quantique ne provenaient pas d'un aléa « vrai » ou fondamental de la physique, mais d'une incomplétude du modèle : il devait exister un modèle sous-jacent qui explique ces aléas. La théorie de dBB définit justement un modèle sous-jacent possible à la mécanique quantique en ajoutant la notion de

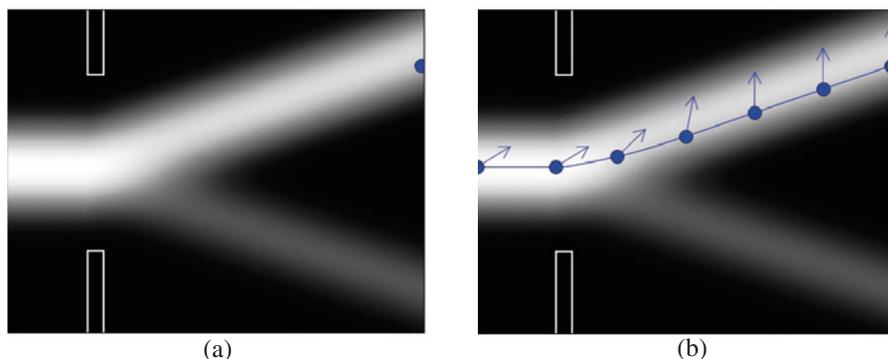


Figure 3. Les figures montrent l'évolution temporelle de la densité de probabilité de présence $\rho = \Psi^* \Psi$ d'un atome d'argent dans un état pur $\theta_0 = \pi/3$ au cours de la traversée du champ magnétique (rectangles blancs). (a) Mécanique quantique orthodoxe : équation de Pauli + réduction du paquet d'onde (position finale). La notion de trajectoire n'existe pas ; seule la position au moment de la mesure est définie à l'aide du postulat de réduction du paquet d'onde (point bleu). L'atome est soit une onde soit une particule (au moment de l'impact). (b) Théorie de dBB (mécanique quantique complétée) : équation de Pauli + position initiale. Les flèches indiquent l'orientation θ du vecteur spin s (initialement $\theta_0 = \pi/3$). La position de la particule existe avant la mesure ; la particule suit alors une trajectoire déterministe et l'impact sur l'écran ne fait que révéler sa position. L'atome est à la fois une onde et une particule.

position des particules. L'atome est décrit à la fois par la fonction d'onde et par la position de son centre de gravité. Il n'y a pas d'aléa fondamental, c'est la position initiale de l'atome (au sortir de la source) qui détermine son impact sur l'écran et, dans ce cas, « Dieu ne joue pas aux dés ». Cependant, du fait que la position initiale de l'atome n'est connue que statistiquement, la position finale ne peut, elle aussi, être connue en pratique que statistiquement. Les probabilités quantiques correspondent à notre ignorance précise du système.

Expérimentalement, on ne mesure pas directement le spin d'un atome mais la position (\bar{x}, \bar{z}) de l'impact de l'atome sur P_1 . Si $\bar{z} \in N^+$, le terme ψ^- de (7) est numériquement égal à zéro et le spineur Ψ est proportionnel à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'un des vecteurs propres de σ_z . Si $\bar{z} \in N^-$, le terme ψ^+ de (7) est numériquement égal à zéro et le spineur Ψ est proportionnelle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'autre vecteur propre de σ_z . Par conséquent, la mesure du spin correspond à une valeur propre de l'opérateur de spin $S_z = \hbar/2 \sigma_z$. C'est une démonstration du postulat de quantification par la théorie de dBB.

L'équation (7) donne les probabilités $\cos^2 \theta_0/2$ (resp. $\sin^2 \theta_0/2$) de mesurer la particule dans l'état de spin $+\hbar/2$ (resp. $-\hbar/2$). C'est une démonstration du postulat de la décomposition spatiale par la théorie de dBB. La valeur « mesurée » n'est pas une valeur préexistante. Elle est contextuelle et conforme au théorème de Kochen et Specker [13].

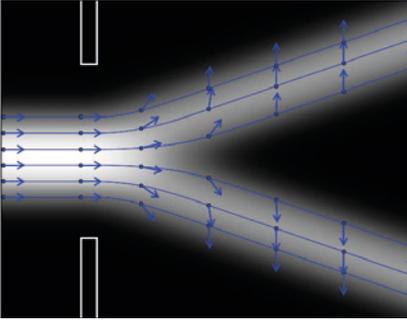


Figure 4. Six trajectoires d'atomes d'argent issues d'un même état pur $\theta_0 = \pi/2$. Les flèches indiquent l'évolution du θ , initialement tous les $\theta = \pi/2$.

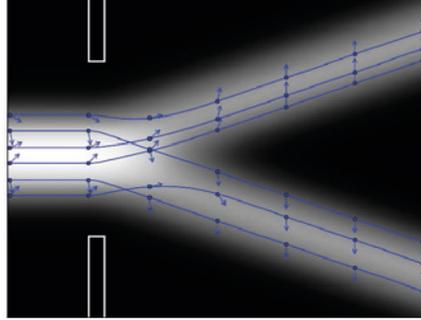


Figure 5. Six trajectoires d'atomes d'argent issues d'un mélange statistique d'états purs. Les flèches initiales indiquent le θ_0 de l'état pur de chaque particule.

3.2 Mélange statistique d'états purs

Puisque le faisceau d'atomes d'argent est un mélange d'états purs, la densité atomique $\rho(z, t + \Delta t)$ est déterminée en intégrant $\rho(x, z, t + \Delta t)$ sur x et sur (θ_0, φ_0) soit :

$$\rho(z, t + \Delta t) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(z-z_{\Delta}-ut)^2}{2\sigma_0^2}} + e^{-\frac{(z+z_{\Delta}+ut)^2}{2\sigma_0^2}} \right). \quad (9)$$

La figure 5 représente ce $\rho(z, t)$ ainsi que six trajectoires d'atomes dont la position initiale et l'orientation du spineur initial θ_0 a été tiré au hasard. On notera la différence avec les résultats de la figure 4 pour l'état pur $\theta_0 = \pi/2$ qui donne cependant statistiquement les mêmes résultats.

4. Expérience d'Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm

La figure 6 présente la version de David Bohm de l'expérience Einstein-Podolsky-Rosen (EPR-B). Une source S crée en O une paire d'atomes (d'argent) identiques A et B, intriqués par leur spin avec des spins opposés. Les atomes A et B se séparent suivant l'axe Oy dans des directions opposées (A avec la vitesse v_y et B avec la vitesse $-v_y$), et rencontrent deux appareils identiques de type Stern-Gerlach E_A et E_B .

L'aimant E_A « mesure » (ou plutôt redresse) le spin de A dans la direction Oz et l'aimant E_B « mesure » (ou redresse) le spin de B dans la direction Oz' , direction obtenue après une rotation d'un angle δ autour de l'axe Oy . Les deux « mesures » peuvent être simultanées ou effectuées l'une après l'autre, comme on va le considérer dans cet article. Cela n'a pas

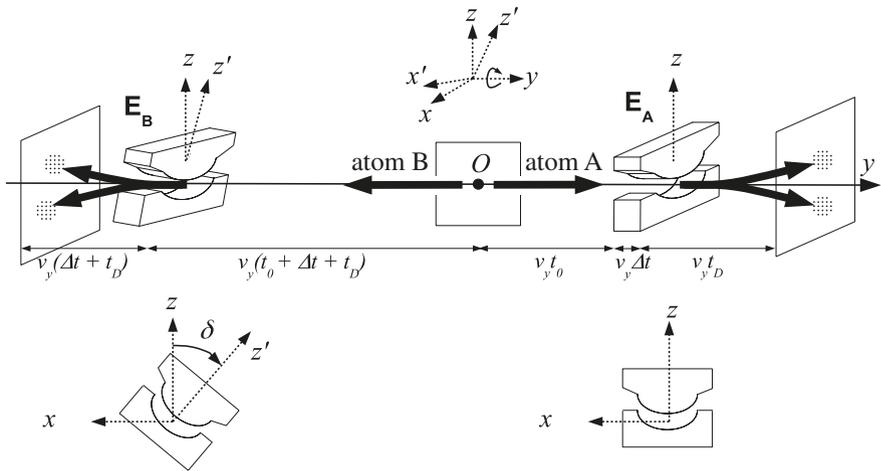


Figure 6. Schéma de l'expérience de EPR-B : une paire d'atome d'argent intriquée par leur spin traverse chacun à leur tour des aimants orientés dans des directions décalées de δ .

d'importance théorique mais les deux appareils de mesure doivent être espacés d'une distance suffisamment grande pour qu'il n'y est pas de communications infra-lumineuses possibles entre les deux mesures. La corrélation de deux mesures de spin de A et B viole les inégalités de Bell et démontre l'existence d'une influence non locale, c'est-à-dire supra-lumineuse entre les deux spins des atomes d'argent.

4.1 État singulet : spineur initial

Dans la plupart des papiers concernant l'expérience EPR-B, la fonction d'onde initiale du système quantique composé des deux particules intriquées est le spineur singlet :

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle) \quad (10)$$

où $|\pm A\rangle$ (resp. $|\pm B\rangle$) sont les vecteurs propres de l'opérateur de spin S_{zA} (resp. S_{zB}) dans la direction Oz relatif à la particule A : $S_{zA}|\pm A\rangle = \pm(\hbar/2)|\pm A\rangle$ (resp. B : $S_{zB}|\pm B\rangle = \pm(\hbar/2)|\pm B\rangle$). En réalité, la fonction d'onde singulet initiale, comme pour le cas précédent, a une extension spatiale :

$$\Psi_0(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(\mathbf{r}_A)f(\mathbf{r}_B)(|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle) \quad (11)$$

où $\mathbf{r} = (x, z)$ et $f(\mathbf{r}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2+z^2}{4\sigma_0^2}}$.

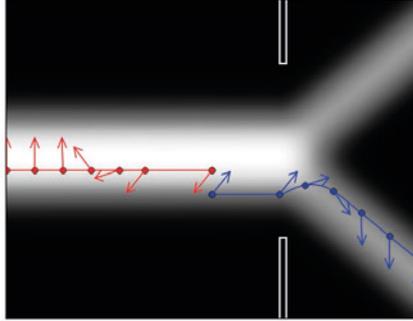


Figure 7. Première mesure : « mesure » du spin de A. Au centre les deux atomes intriqués A (bleu) et B (rouge) sont créés avec des spins opposés. La particule A part à droite et traverse l'aimant \mathbf{E}_A , elle se comporte de la même façon que si elle n'était pas intriquée. La particule B part à gauche et ne traverse rien mais son spin se redresse pour être toujours en opposition avec celui de A.

Il est possible de retrouver cette fonction singulet (11) à partir du principe de Pauli. Pour cela, nous supposons qu'à l'instant de la création des deux particules intriquées A et B, chacune des particules a une fonction d'onde initiale $\Psi_0^A(\mathbf{r}_A, \theta_0^A, \varphi_0^A)$ et $\Psi_0^B(\mathbf{r}_B, \theta_0^B, \varphi_0^B)$ similaire à (2) mais avec des spins opposés : $\theta_0^B = \pi - \theta_0^A$, $\varphi_0^B = \varphi_0^A - \pi$. Si alors on applique le principe de Pauli qui stipule que la fonction d'onde d'un objet à deux corps doit être antisymétrique ; il faut écrire :

$$\begin{aligned} & \Psi_0(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A, \mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) \\ &= \Psi_A^0(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A) \Psi_B^0(\mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) - \Psi_A^0(\mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) \Psi_B^0(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A) \\ &= -e^{i\varphi_A} f(\mathbf{r}_A) f(\mathbf{r}_B) (|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle) \end{aligned} \quad (12)$$

qui est l'état singulet avec extension spatiale (11) à un facteur près (voir [12] pour plus de détail). De nouveau cette extension spatiale est essentielle pour résoudre correctement l'équation de Pauli en espace. De plus, dans la théorie de dBB, l'extension spatiale est nécessaire pour tenir compte de la position de l'atome dans sa fonction d'onde.

4.2 Résultats

Sur la figure 7, on observe une paire d'atomes intriqués lors de la première « mesure » par un appareil de Stern-Gerlach. On montre mathématiquement [12] que la première particule « mesurée », la particule A, se comporte dans le premier appareil de Stern-Gerlach de la même façon que si elle n'était pas intriquée. Durant la « mesure » de A, la densité de la particule B évolue aussi comme si elle était non intriquée [12]. Ces deux propriétés pourront être testées expérimentalement dès que l'expérience EPR-B avec des atomes sera réalisable. La particule B part vers la gauche et, durant la « mesure » de A, son spin se redresse pour être toujours en opposition avec celui de la particule A [12]. Lorsque la particule B

entre dans le second aimant E_B l'orientation de son spin θ par rapport à Oz sera soit 0 soit π ; c'est-à-dire orienté selon l'axe Oz' du champ de E_B , soit de δ soit de $\pi - \delta$. L'orientation de B est de δ si le spin de A a été « mesuré » down et elle est de $\pi - \delta$ si le spin de A a été « mesuré » up. La seconde mesure est une « mesure » de type Stern-Gerlach comme au début de l'article avec des orientations particulières. On retrouve alors parfaitement les résultats de la mécanique quantique et la violation des inégalités de Bell.

5. Conclusion

Nous avons montré que la théorie de dBB, qui utilise uniquement la résolution de l'équation de Pauli, donne les mêmes résultats statistiques que la mécanique quantique habituelle pour les expériences de Stern-Gerlach et EPR-B. Elle propose une claire interprétation de la mesure du spin en démontrant les postulats de la mesure et le postulat de réduction du paquet d'onde.

L'expérience de Stern et Gerlach n'est pas la mesure de la projection du spin selon l'axe Oz , mais le redressement de l'orientation du spin soit dans la direction du gradient du champ magnétique, soit dans la direction opposée. Le résultat dépend de la position de la particule dans la fonction d'onde. C'est une explication simple de la non contextualité de la mesure du spin le long de différents axes. La durée de la mesure est le temps nécessaire à la particule pour redresser son spin dans la direction finale. La valeur « mesurée » (le spin) n'est pas une valeur préexistante comme la masse et la charge de la particule mais une valeur contextuelle conforme au théorème de Kochen et Specker.

La particule quantique possède une position locale comme une particule classique, mais possède également un comportement non-local du à la fonction d'onde.

La réalité de la non-localité, c'est-à-dire l'existence d'une action à distance supraluminaire, a été validée par les expériences d'Alain Aspect [1] et de ses successeurs Nicolas Gisin [18] et Anton Zeilinger [14]. Cette action est en contradiction avec l'interprétation d'Einstein (de 1905) de la relativité restreinte. Faut-il abandonner cette interprétation au profit de celle de Lorentz-Poincaré comme le suggère Karl Popper dans sa préface [15] ?

« L'expérience d'Aspect serait la première expérience cruciale visant à trancher entre les interprétations lorentzienne et einsteinienne des transformations de Lorentz »

La théorie de dBB permet de considérer la mécanique quantique comme déterministe et ainsi permet de lever la première difficulté pour rendre compatible mécanique quantique et relativité générale. Réhabiliter l'existence d'un référentiel privilégié, comme celui de Lorentz-Poincaré et comme l'éther d'Einstein [8] de 1920, est peut-être le chemin pour réconcilier ces deux théories.

Le réel nous serait alors doublement voilé. Voilé en mécanique quantique, comme le pensait Bernard d'Espagnat [6] car la fonction d'onde est une variable cachée non locale, mais voilé aussi en relativité car le temps et l'espace que nous mesurons ne seraient qu'un temps et un espace apparents, l'espace vrai et le temps vrai du référentiel et du temps privilégiés nous étant encore inconnus.

Références

- [1] Aspect, Alain, Grangier, Philippe, et Roger, Gérard. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: a new violation of Bell's inequalities. *Physical review letters*, 1982, vol. **49**, n°2, p. 91.
- [2] Bellac, M. L. *Quantum physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Bohm, D. et Hiley, B. *The Undivided Universe*. Routledge, 1993.
- [4] Bohm, David, Schiller, Ralph, et Tiomno, Jayme. A causal interpretation of the Pauli equation (A). *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 1955, vol. **1**, n°1, p. 48.
- [5] Cohen-Tannoudji, Claude, Diu, Bernard et Laloë, Frank. *Quantum mechanics*. Wiley, 1977.
- [6] D'Espagnat, Bernard. *Veiled Reality: An analysis of present-day quantum mechanical concepts*. Westview Press, 2003.
- [7] Dewdney, C., Holland, P.R. et Kyprianidis, A. A causal account of non-local Einstein-Podolsky-Rosen spin correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1987, vol. **20**, n°14, p. 4717. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/14/016>
- [8] Einstein, Albert. *Ether and the Theory of relativity*, 1920.
- [9] Feynman, Richard P., Leighton, Robert B. et Sands, Matthew. *The Feynman lectures on Physics*, volume II. Addison-Wesley, Reading, MA, 1964.
- [10] Gerlach, Walther et Stern, Otto. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, 1922, vol. **9**, n°1, p. 349.
- [11] Gondran, Michel et Gondran, Alexandre. A complete analysis of the Stern-Gerlach experiment using Pauli spinors. 2005. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0511276>.
- [12] Gondran, Michel et Gondran, Alexandre. Replacing the singlet spinor of the EPR-B experiment in the configuration space with two single-particle spinors in physical space. *Foundations of Physics*, 2016, vol. **46**, n°9, p. 1109.
- [13] Kochen, Simon et Specker, Ernst P. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1967, vol. **17**, n°1, p. 59.

- [14] Jian-Wei, Pan, Bouwmeester, Dik, Daniell, Matthew, Weinfurter, Harald et Zeilinger, Anton. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. *Nature*, 2000, vol. **403**, n°6769, p. 515.
- [15] Popper, Karl R. *Quantum theory and the schism in Physics: From the postscript to the logic of scientific discovery*. Edited by William Warren Bartley, III. London, 1982.
- [16] Sakurai, Jun John et Napolitano, Jim. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, 2011.
- [17] Takabayasi, Takehiko. On the Hydrodynamical Representation of non-relativistic spinor equation. *Progress of Theoretical Physics*, 1954, vol. **12**, n°6, p. 810.
- [18] Tittel, Wolfgang, Brendel, Jürgen, Zbinden, Hugo et Gisin, Nicolas. Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Physical Review Letters*, 1998, vol. **81**, n°17, p. 3563. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9806043>

2

Une onde de Dirac augmentée visant l'unification des interactions

Claude Daviau¹

Jacques Bertrand¹

Dominique Girardot²

¹ Fondation Louis de Broglie, France

² Ecole polytechnique, France

Résumé

Nous étudions une onde étendant l'onde quantique de l'électron (spineur de Dirac), dont les composantes représentent toutes les particules élémentaires, électron, neutrino, quarks avec 3 couleurs, et leurs antiparticules, pour la première génération, en interaction. L'équation d'onde est une extension de l'équation de Dirac de l'électron, avec un terme de masse. Elle est invariante relativiste sous un groupe élargi, et est invariante sous le groupe de jauge du modèle standard (exactement). Cette équation rend compte d'une bonne partie du modèle standard tout en ayant moins de paramètres libres. Nous réduisons aussi le fossé conceptuel entre théorie quantique des champs et relativité générale.

Abstract

An increased Dirac's wave aimed at unified interactions.

We study a wave spreading the quantic wave of the electron (Dirac spinor), which components represent all elementary particles, electron, neutrino, quarks with 3 colors, and their antiparticles, interacting for the first generation. The wave equation is an extension of the electron Dirac equation with a mass term. It is relativistic invariant under a widened group and invariant under the gauge model of the standard model (exactly). This equation reports a large part of the standard model by using less free parameters. We also reduce the conceptual gap between quantum fields theory and general relativity.

I. Introduction

La physique quantique a su rendre compte de tous les phénomènes électromagnétiques avec une excellente précision. Les interactions faibles, découvertes avec la radioactivité β , ont été rassemblées avec l'électromagnétisme dans le cadre d'un groupe de jauge non commutatif. Ces interactions faibles « violent la parité » d'espace, c'est-à-dire distinguent les ondes droites et les ondes gauches. Les interactions fortes reliant les quarks à l'intérieur des protons et neutrons des noyaux sont également interprétées à l'aide d'un groupe de jauge, symétrie dite de « couleur » [1]. Ces trois grands domaines de la physique, électromagnétisme, interactions faibles, interactions fortes, sont donc décrites à l'aide de modèles similaires. À côté de cela la Relativité Générale (RG), qui rend compte de la gravitation avec une précision tout aussi extraordinaire [2], utilise un cadre mathématique très différent : la physique quantique utilise des espaces vectoriels complexes alors que la RG se sert d'une variété à 4 dimensions réelles. La linéarité est essentielle en physique quantique, alors que la RG est totalement non linéaire.

Notre but est de rapprocher les quatre domaines en réécrivant l'onde de spin $\frac{1}{2}$ rendant compte de tous les fermions élémentaires de première génération, à la base du modèle standard de la physique quantique (MS), de manière aussi proche que possible de la RG.

2. Concepts

2.1 L'algèbre de Clifford de l'espace

La physique quantique, tout comme la physique de la gravitation, font partie maintenant de la physique des champs, avec des ondes. Qui dit ondes dit fonctions sinus et cosinus, et ces fonctions se calculent plus simplement avec la fonction exponentielle, que

l'on retrouve aussi comme outil essentiel dans les équations différentielles et dans les groupes de Lie. Pour l'exponentielle il faut savoir calculer des sommes et des produits pour avoir des puissances, donc il faut deux opérations, une addition et une multiplication. Les algèbres de Clifford [13] fournissent en fait les ingrédients justes nécessaires. L'algèbre de Clifford de l'espace physique, nommée Cl_3 , est simplement le cadre qui permet de calculer l'exponentielle d'un nombre, d'un vecteur et des autres objets composant l'algèbre. Les règles générales de calcul sont les mêmes que pour le calcul matriciel. Le produit de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} vérifie $\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + i\vec{u} \times \vec{v}$ où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire et $\vec{u} \times \vec{v}$ le produit vectoriel. $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ étant une base orthonormée de l'espace on a $\sigma_1\sigma_2\sigma_3=i$ lorsque la base est de sens direct et $\sigma_1\sigma_2\sigma_3=-i$ sinon. Et $i^2=-1$. On obtient la représentation matricielle usuelle de l'algèbre en prenant pour les σ_j les matrices de Pauli.

2.2 L'onde spinorielle

L'onde de spin $1/2$, pour tous les fermions élémentaires du MS (de première génération), est une fonction $\Psi=\Psi(x, t)$ à valeur dans l'algèbre de Clifford $Cl_{1,5}$ qui s'écrit :

$$\Psi = \begin{pmatrix} l & r \\ g & b \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} e & n \\ \hat{n} & \hat{e} \end{pmatrix}; e = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}; \hat{e} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix}; n = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_2^* \\ 0 & \xi_1^* \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$c = \begin{pmatrix} d_c & u_c \\ \hat{u}_c & \hat{d}_c \end{pmatrix}, c = r, g, b; d_c = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2dc}^* \\ 0 & \eta_{1dc}^* \end{pmatrix}; u_c = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2uc}^* \\ 0 & \eta_{1uc}^* \end{pmatrix}.$$

Elle comprend, par ses composantes, un électron et son neutrino, un proton ou un neutron avec ses trois quarks de couleur différente, un atome d'hydrogène et même un atome de deutérium. L'onde spinorielle contient aussi l'onde des antiparticules : la relation entre l'onde de l'électron e et l'onde du positron \bar{e} est dans le modèle standard $e = -\bar{e}\sigma_1$. Depuis 1928 l'invariance relativiste de l'onde spinorielle se présente de manière fort différente de la covariance des lois physiques de la RG : pour tout élément $M \in Cl_3^*$ (ensemble des éléments inversibles de Cl_3) la transformation $D : x \mapsto x'$ telle que

$$x' = MxM^\dagger; e' = Me; n' = Mn; d'_c = Md_c; u'_c = Mu_c; \det(M) = re^{i\theta} = M\bar{M}; \bar{M} = \hat{M}^\dagger, \quad (2)$$

est une « dilatation » composée d'une transformation de Lorentz $L : x \mapsto x_1$ conservant l'orientation du temps et de l'espace par une homothétie $h : x_1 \mapsto x' = rx_1$ de rapport positif r . La transformation $f : M \mapsto D$ est un homomorphisme du groupe Cl_3^* qui est de dimension 8 dans le groupe D des dilatations, qui est seulement de dimension 7. Une dimension est perdue, celle justement de $i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ qui définit l'orientation de l'espace. La physique quantique utilise seulement le sous-groupe $SL(2, \mathbb{C})$ des M de déterminant 1, ce qui réduit le groupe $U(1)$ des $e^{i\theta}$ à ± 1 , parce qu'elle ne s'intéresse qu'aux transformations de Lorentz. Elle utilise en plus ici une chose qui n'est pas courante du point de vue mathématique, la relation réciproque d'une application non injective, ce qui s'appelle « représentation à deux valeurs ». Les deux valeurs sont ce qui reste du groupe chirale quand on l'écrase avec le postulat $\det(M)=1$. [3]

3. Equation d'onde

La forme invariante de l'équation d'onde unifiée que nous proposons s'écrit :

$$0 = \tilde{\Psi}(\underline{D}\Psi)L_{012} + m\rho\tilde{\Psi}\chi; \quad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{b} & \tilde{r} \\ \tilde{g} & \tilde{l} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

\underline{D} est la dérivée covariante [4]. Les termes ρ et χ en facteur de la masse sont ceux de [12], le tilde désigne le retourné. On a besoin de trois algèbres de Clifford : d'espace Cl_3 , d'espace-temps $Cl_{1,3}$ et de l'espace-temps élargi $Cl_{1,5}$. Elles utilisent les spineurs gauches et droits de Weyl et la représentation matricielle :

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \sigma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ \gamma_0 = \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, j=1,2,3; \quad N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{pmatrix}; \\ L_\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \mu=0,1,2,3; \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4)$$

avec

$$\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu; \quad \partial = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \hat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\partial} = L^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

4. Invariance relativiste

Dès l'équation d'onde de Pauli pour l'électron à spin, puis l'équation de Dirac, on a utilisé la transformation (2) mais dans des cas très particuliers : pour l'équation de Pauli on se restreint à des M appartenant à $SU(2)$ et alors la transformation D est une rotation.

Pour l'équation de Dirac on se restreint à $\det(M)=1$ ce qui donne pour D une transformation de Lorentz conservant l'orientation du temps et de l'espace (les autres transformations de Lorentz étaient ajoutées ensuite par des symétries dites P et T). La physique quantique relativiste pose donc

$$\Psi'(x') = \underline{N}\Psi(x); \quad \nabla = \bar{M}\nabla'\hat{M}; \quad \partial = \bar{N}\partial'N; \quad \underline{\partial} = \bar{N}\partial'N; \quad (6)$$

qui permet d'obtenir pour tout M :

$$\tilde{\Psi}(D\Psi)L_{012} = \tilde{\Psi}'(D'\Psi')L_{012}; \quad m\rho = m'r\rho = m'\rho'; \quad \tilde{\Psi}\chi = \tilde{\Psi}'\chi'. \quad (7)$$

Or la condition $\det(M)=1$ n'a pas de justification géométrique, en dehors du fait qu'elle donne une partie du groupe de Lorentz, et elle n'est pas utilisée dans les relations (2) ou (6), qui fonctionnent de manière générale, sans elle. Elle est par contre utilisée dans (7) pour assurer la conservation de la masse propre. Nous avons donc adopté un point de vue général qui supprime la condition sur le déterminant et qui considère donc l'invariance relativiste comme un cas particulier d'une invariance plus contraignante sous le groupe Cl_3^* . Cette invariance plus large nous a permis de comprendre plusieurs aspects de la physique quantique qui n'avaient pas obtenu d'explication satisfaisante auparavant.

Mais il y a un prix à payer car la masse propre $m_0=m\hbar/c$ et ρ seuls ne sont plus invariants sous le groupe plus large, le produit $m\rho$ est le seul invariant. Nous avons expliqué en [4][5] comment cette variance de m et cette invariance du seul produit $m\rho$ est liée à l'existence de la constante de Planck. L'écriture de l'équation d'onde sous la forme invariante (3) permet aussi de voir que la densité lagrangienne dont découle l'équation d'onde est très exactement la partie réelle de l'équation d'onde elle-même [6][7] : ceci justifie l'existence d'un principe lagrangien en physique.

5. Invariance de jauge

La dérivée covariante fonctionne exactement comme la dérivation covariante du modèle standard. Elle vérifie :

$$D\Psi = \partial\Psi + \frac{g_1}{2} B B_0(\Psi) + \frac{g_2}{2} \sum_{j=1}^3 W^j P_j(\Psi) + \frac{g_3}{2} \sum_{k=1}^8 G^k \mathbf{i}\Gamma_k(\Psi) \quad (8)$$

L'opérateur P_0 engendre le groupe chiral $U(1)$. Ce groupe traite différemment ondes droites et ondes gauches et différencie leptons et quarks. Les trois $P_j, j=1, 2, 3$, ne changent que les ondes gauches et agissent de la même manière sur leptons et quarks. Les $\mathbf{i}\Gamma_k$ pour $k=1, \dots, 8$ engendrent le groupe de la chromodynamique. Ils n'agissent pas sur la partie leptonique de l'onde, donc les leptons sont insensibles aux interactions fortes, ils ne voient que la partie $U(1) \times SU(2)$ du groupe de jauge complet $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

6. Nos résultats

L'analyse de cette nouvelle onde et équation d'onde associée nous a permis d'obtenir les résultats nouveaux suivants (donnés ici sans justification, voir les références) :

- La densité lagrangienne est exactement la partie réelle de l'équation d'onde. C'est la raison de l'existence en physique d'un principe extrémal [4]-[6] et du traitement séparé des trois générations (les parties réelles se calculant différemment).
- L'invariance de forme sous CI_3^* et l'invariance de jauge sous le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, sont des symétries exactes [4].
- Pour l'atome d'hydrogène des solutions chirales existent avec les mêmes propriétés que pour l'équation de Dirac [8].
- La partie leptonique peut être adaptée pour rendre compte du monopôle magnétique leptonique de G. Lochak ([11] et [4] chapitre 8). Ce monopôle magnétique est donc capable d'interactions faibles.
- L'équation du second ordre de l'électron implique un angle de Weinberg-Salam de 30° . Le boson de la jauge électrique (photon) est donc exactement la somme du boson chiral $3/4g_1\bar{B}$ et du boson faible $1/4g_2W^3$ [9].
- Les charges des quarks ont bien les valeurs $2/3|e|$ pour le quark u et $-1/3|e|$ pour le quark d (même chose pour les deux autres générations) [12].
- Les vecteurs d'espace-temps qui constituent les 12 bosons de jauge ont des composantes d'espace-temps qui font partie des densités tensorielles généralisant celles de l'onde de Dirac. L'additivité des potentiels, nécessaire pour obtenir les lois du mouvement des charges électriques, est équivalente au principe de Pauli [12]. Cette additivité s'applique aussi au courant de probabilité et donc aussi à la densité d'énergie de l'onde spinorielle.
- Nous ne supprimons pas la masse propre pour rendre compte des interactions faibles : nous n'avons pas besoin de brisure spontanée de la symétrie de jauge, qui est exacte. La masse restant présente dans l'équation d'onde, on peut y étudier la gravitation.

7. Inertie et gravité

L'équation d'onde fermionique utilise des coordonnées qui sont celles d'un référentiel inertiel. La transformation géométrique D , qui utilise un élément M fixe, indépendant de x , fait passer d'un référentiel inertiel à un autre. Si on relâche cette contrainte, il apparaît dans l'équation d'onde des potentiels d'inertie liés à la connexion. Ces potentiels d'inertie rendent compte de l'accélération centrifuge ou de l'accélération d'entraînement. Dans le cas d'une onde stationnaire, la densité de probabilité provient du principe d'équivalence : égalité entre l'intégrale à tout l'espace de la densité d'énergie de l'onde et l'énergie gravitationnelle $E=hc$. La normalisation de l'onde en résulte.

Pour l'onde stationnaire le vecteur d'impulsion-énergie a une seule composante non nulle qui est l'énergie au repos. L'énergie-masse gravitationnelle fait partie d'un vecteur impulsion-énergie et c'est la densité spatiale de ces vecteurs qui constitue le tenseur symétrique d'impulsion-énergie de la RG ([4] chapitre 9), qui devrait pouvoir s'identifier au tenseur de courbure d'Einstein, faisant de l'équation d'Einstein avec second membre une identité ou une définition.

Remerciements

Merci à l'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences pour son invitation au colloque et aux éditeurs de ce livre.

Références

- [1] Scheck, F. *Electroweak and strong interactions*. Springer, 1996.
- [2] Wiltshire, D., Visser, M et Scott, S. *The Kerr spacetime: Rotating black holes in general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] Naïmark M.A. *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, Paris, 1962.
- [4] Daviau, C. et Bertrand, J. *The Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra*. World Scientific Publishing, Singapore, 2016.
- [5] Daviau, C. et Bertrand, J. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron - neutrino. *Journal of Modern Physics*, 2014, vol. **5**, n°11, p. 1001. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.511102>
- [6] Daviau, C. et Bertrand, J. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *Journal of Modern Physics*, 2014, vol. **5**, p. 2149. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518210>
- [7] Daviau, C. et Bertrand, J. Geometry of the standard model of quantum physics. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2015, vol. **3**, n°1, p. 46. <https://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.31007>
- [8] Daviau, C. et Bertrand, J. Left Chiral Solutions for the Hydrogen Atom of the Wave Equation for Electron+Neutrino. *Journal of Modern Physics*, 2015, vol. **6**, n°11, p. 2149. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.611166>
- [9] Daviau, C. et Bertrand, J. Electro-Weak Gauge, Weinberg-Salam Angle. *Journal of Modern Physics*, 2015, vol. **6**, n°14, p. 2080. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614215>

[10] Daviau, C. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 2015, vol. **40**, n°1, p. 113.

[11] Lochak, G. Wave equation for a magnetic monopole. *International journal of theoretical Physics*, 1985, vol. **24**, n°10, p.1019.

[12] Daviau, C. et Bertrand, J. Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 2015, vol. **40**, n°1, p. 181.

[13] Casanova, G. *L'algèbre vectorielle*, Que sais-je, PUF, 1976.

3

Le programme d'Einstein : une contribution

Claude Elbaz

Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences (AEIS), Paris, France

Résumé

Le programme d'Einstein, basé sur un champ scalaire ε de célérité c , vitesse de la lumière, forme un système cohérent et homogène pour la description relativiste et quantique de l'univers. Les propriétés cinématiques et dynamiques des champs stationnaires $\varepsilon(x,t) = u(x)\psi(t)$, sont formellement identiques à celles de la matière. Le domaine classique correspond à l'approximation de l'optique géométrique pour des fréquences très grandes. La fonction d'amplitude $u(x)$ du genre espace se réduit alors à une distribution $\delta(x)$, et décrit une particule ponctuelle. Le domaine quantique correspond à l'optique ondulatoire. Les variations de fréquence conduisent aux relations de Fourier, comme limites, et à un invariant adiabatique formellement identique à la constante de Planck, ainsi qu'à l'interaction électromagnétique, et aux lois de moindre action, et de conservation de l'énergie-impulsion. La variation locale de la vitesse de propagation du champ $\delta C(x,t)$ induit des interactions formellement identiques à la gravitation.

Abstract

The Einstein's program: a contribution

The Einstein's program, based upon a scalar field ε , propagating at speed of light c , forms a consistent and homogeneous system, to describe relativistic and quantum properties of universe. Kinematical and dynamical properties of standing fields $\varepsilon(x,t)=u(x)\psi(t)$, are formally identical with mechanical properties of matter. The classical domain corresponds to geometrical optics approximation with very high frequencies. The space-like amplitude function $u(x)$ reduces then to the Dirac's distribution $\delta(x)$ for a point-like particle. The quantum domain corresponds to wave optics. The frequency variations lead to Fourier relations as limits, to dynamical properties with energy-momentum conservation law and to least action law, to interactions formally identical with electromagnetism, and to adiabatic invariant formally identical with Planck's constant. Local variations of the field velocity $\delta C(x,t)$ yield interactions formally identical with gravitation.

I. La méthode

Dans ses démarches scientifiques, et dans ses découvertes, Einstein avait attribué la priorité aux idées, et aux représentations mentales. Il basait ses raisonnements sur :

- des **expériences de pensée**, dont certaines sont célèbres, comme celles lors de ses nombreuses controverses avec Bohr, ou celle liée au paradoxe EPR, pour démontrer la non-séparabilité des particules quantiques, et réfuter l'interprétation probabiliste ;
- des **phénomènes physiques**, à la base de ses théories, comme par exemple :
 - ▶ pour la relativité restreinte, le rôle symétrique des interactions électromagnétiques, selon qu'un aimant ou un conducteur est en mouvement ;
 - ▶ pour la relativité générale, l'annulation de la force de gravité à l'intérieur d'un ascenseur en chute libre.

« La plupart des idées fondamentales de la science sont essentiellement simples et peuvent en général être exprimées dans le langage que tout le monde comprend. Mais pour suivre ces idées de près, il faut être en possession d'une technique très raffinée d'investigation. Les mathématiques comme instrument de raisonnement sont nécessaires si nous voulons tirer des conclusions qui peuvent être comparées avec l'expérience.

Aussi longtemps que nous nous occupons seulement d'idées physiques fondamentales, nous pouvons nous passer du langage mathématique... Les idées doivent plus tard revêtir la forme mathématique d'une théorie quantitative, pour rendre possible la comparaison avec l'expérience... La simplicité mathématique de l'ouvrage de De Broglie, est vraiment admirable. Au moment où son ouvrage parut, la technique mathématique d'autres théories physiques était comparativement très subtile et compliquée. La mathématique traitant le problème des ondes de matière est extrêmement simple et élémentaire, mais les idées fondamentales sont profondes et d'une immense portée... »

2. Le programme d'Einstein

Presque simultanément la même année, et par deux fois au moins, Einstein avait publié des contributions majeures en mécanique classique relativiste et en mécanique quantique. En 1905, c'étaient d'une part, la relativité restreinte, et d'autre part, l'introduction de la particule de lumière, qualifiée ensuite de photon, et qui lui valut le prix Nobel en 1921. En 1916, c'étaient, d'une part la relativité générale, et d'autre part, l'émission stimulée de lumière, qui a servi de base pour la conception des lasers. On peut donc penser que dans son raisonnement, la physique classique, déterministe, et la physique quantique, statistique ou probabiliste, avaient un fondement commun. Cela expliquerait qu'il se soit rapidement consacré à la recherche d'une théorie unitaire.

Elle devait se situer dans le prolongement de ses découvertes, à la jonction des propriétés de la masse et de l'énergie, de la matière et de la lumière, de la particule et du champ.

« Nous avons deux réalités : la matière et le champ. Il est hors de doute que nous ne pouvons pas à présent concevoir que toute la physique puisse être bâtie sur le concept de matière, comme le croyaient les physiciens du début du 19ème siècle... Ne pourrions-nous rejeter le concept de matière et construire une physique basée uniquement sur le champ?... Nous pourrions regarder la matière comme des régions dans l'espace où le champ est extrêmement intense. Il n'y aurait pas de place, pour notre nouvelle physique, tout à la fois pour le champ et pour la matière, le champ étant la seule réalité... Ce qui me paraît certain, c'est que dans une théorie cohérente, ne doit apparaître, à côté du concept de champ, le concept de particule. La théorie toute entière doit être basée uniquement sur des équations aux dérivées partielles et leurs solutions sans singularité... »

Actuellement, pour le modèle standard, l'univers physique est constitué de particules, à la fois pour la matière et pour ses interactions. Pour le programme d'Einstein, c'est le

champ continu, se propageant à la vitesse de la lumière, qui doit servir de base générale, pour la matière et pour les interactions. La matière n'en constitue qu'une petite région d'amplitude localement plus importante (un « champ à bosse » selon Louis de Broglie).

Après la disparition d'Einstein en 1955, les nouvelles connaissances expérimentales et théoriques ont confirmé et validé son programme, des points de vue :

- **expérimental** : depuis 1960, l'Organisation Internationale de Métrologie Légale a remplacé les étalons matériels d'espace et de temps, en usage depuis deux siècles, par des radiations du champ électromagnétique. Elle a admis la vitesse de la lumière comme une constante fondamentale « pure », avec une valeur numérique rigoureusement fixée ;

- **théorique** : les théories quantiques relativistes admettent que l'ensemble de la matière, sur terre, et dans l'univers, est composée généralement d'atomes, dont la masse principale, celle du noyau, est formée de protons et de neutrons, chacun avec une masse d'environ 940 Gev. Or, ils sont constitués de 3 quarks, particules matérielles dont la somme des masses est de 12 Gev, soit 1 % du total. Les 99 % sont dus à l'énergie des gluons, c'est-à-dire à des particules d'interaction qui se propagent à la vitesse de la lumière, et décrites par un champ relativiste de vitesse c . Ainsi, un proton n'est pas un grain de matière rigide, mais une *région dans l'espace où le champ de vitesse c est extrêmement intense*, et en oscillation ;

- **technologique** : de manière générale, les nouvelles technologies évoluent dans le sens du programme d'Einstein, quand elles substituent progressivement, et presque systématiquement, des dispositifs électroniques, basés sur le champ électromagnétique, aux différents moyens mécaniques, à base matérielle. Il est significatif que le terme *dématérialisation* désigne le remplacement de supports de documents, comme le papier, par des enregistrements informatiques.

3. Compléter la mécanique quantique

Malgré les indéniables succès théoriques et expérimentaux de la théorie quantique, et qu'il reconnaissait, Einstein était toujours resté insatisfait, car il l'estimait incomplète.

« Le caractère statistique de la présente théorie devrait être une conséquence nécessaire de la description incomplète des systèmes en mécanique quantique, ... Par dessus tout, cependant, le lecteur devrait être convaincu que je reconnais entièrement les très importants progrès que la théorie quantique statistique a apporté à la physique... Les relations qui y sont contenues sont, à l'intérieur des limites naturelles fixées par les relations d'indétermination complètes. Les relations formelles qui sont fournies par cette théorie – son entier formalisme mathématique – devra

probablement être maintenu sous la forme d'inférences logiques, dans toute future théorie utile. »

En mécanique quantique, l'équation fondamentale de Schrödinger, non relativiste, est en effet incomplète : l'énergie propre d'une particule individuelle, $E_0 = m_0c^2$, y est éludée ou cachée. Elle reste constante, et indépendante du mouvement et des interactions. Seules les énergies cinétique et potentielle, hétérogènes et extérieures à la masse, interviennent.

Quand on en tient compte dans l'énergie totale, $E = mc^2 = m_0c^2 + E_c$, des propriétés physiques complémentaires apparaissent, comme le spin, avec l'équation de Dirac, ou la création-annihilation et la seconde quantification avec la théorie quantique des champs, conduisant au modèle standard. Les particules fondamentales massives y sont ponctuelles, avec par conséquent une densité d'énergie propre infinie. Elles sont décrites par des fonctions de champs ψ , du genre temps.

On peut montrer [1-8] que le programme d'Einstein permet de les compléter par des fonctions d'amplitude u , du genre espace, et dont dérivent formellement :

- la distribution de Dirac dans l'approximation ponctuelle,
- le principe de conservation de l'énergie-impulsion,
- le principe variationnel de moindre action,
- l'interaction électromagnétique,
- l'invariant adiabatique, formellement identique à la constante de Planck,
- l'interaction gravitationnelle.

4. Contribution au programme

Conformément au programme d'Einstein, il est possible de « construire une physique basée uniquement sur le champ », et dont découlent les propriétés de la matière. Dans ce but, l'équation de d'Alembert sert de conjecture pour décrire la structure d'un champ scalaire ε , se propageant à la vitesse de la lumière.

4.1 Cinématique des champs stationnaires

On montre alors [1-8] que les champs stationnaires, de fréquence constante, ont des propriétés cinématiques formellement identiques à celles de la matière isolée en mécanique relativiste, et que la transformation de Lorentz, est spécifique des champs stationnaires du champ, par comparaison avec les champs progressifs.

La superposition d'ondes avancées et retardées, de même fréquence ω_0 , forme une onde stationnaire, $\varepsilon = u(x_0)\Psi(t_0)$. Les variables de temps et d'espace séparées, montrent qu'elle oscille sur place, définissant un repère au repos. Si les fréquences composantes ω_1 et ω_2 sont différentes, l'onde stationnaire est formée dans un repère en mouvement de vitesse $v = \beta c = (\omega_1 - \omega_2)/(\omega_1 + \omega_2)c$. Par identification, on obtient directement la transformation de Lorentz. Le formalisme de Minkowski exprime l'invariance cinématique des propriétés des champs stationnaires au repos, au prix de l'occultation des propriétés physiques sous-jacentes, comme la spécificité des champs stationnaires vis-à-vis des champs progressifs, ou la définition du coefficient β comme une différence relative, donc inférieure à l'unité.

La fonction d'amplitude $u(x_0)$ vérifie l'équation de Helmholtz, du genre espace, $\Delta u(x_0) + k_0^2 u(x_0) = 0$. Dans l'approximation de l'optique géométrique, où les longueurs d'ondes infiniment petites sont occultées, et où seuls les effets moyens se manifestent, la fonction d'amplitude se réduit à une distribution $\delta u(x_0)$. Sa position x_0 définie où l'amplitude est maximum et vérifie $\nabla_0 u(x_0) = 0$.

4.2 Dynamique des champs presque stationnaires

Comme les solutions de l'équation de d'Alembert ne peuvent pas s'étendre physiquement à l'infini, elle doit être complétée par des conditions aux limites, homogènes au champ. Elles sont assurées par des paquets d'ondes, qui définissent les conditions de Fourier.

Quand la variation de fréquence est très petite $\Delta\omega = 2\beta\omega \rightarrow 0$, elle peut être considérée comme une perturbation $\beta\omega = \delta\omega$. Un paquet d'ondes peut alors être assimilé à une onde presque monochromatique, de fréquence $\Omega(x,t)$, très légèrement variable autour d'une valeur constante ω . Cette variation adiabatique conduit à des ondes presque stationnaires, dont les propriétés dynamiques sont formellement identiques à celles de la matière en interaction. On en déduit :

- les lois de conservation de l'énergie-impulsion, pour la matière et pour les interactions,
- les variations adiabatiques de leur densité d'énergie respectives, $u^2 = I\omega$ et $\delta U^2(x,t) = I\delta\Omega(x,t)$, correspondant formellement à leur quantification,
- le principe variationnel de moindre action et les lagrangiens,
- l'interaction électromagnétique, liée aux variations locales de fréquences $\delta\Omega(x,t)$,
- l'interaction gravitationnelle, liée aux variations locales de la célérité du champ $\delta C(x,t)$.

4.3 Dualité onde-particule

L'existence de deux fréquences, l'une principale ω , constante et élevée, et l'autre de modulation ou de perturbation $\delta\Omega(x,t)$, variant localement et beaucoup plus petite, aussi bien pour les ondes presque stationnaires que pour les ondes progressives presque monochromatiques, entraîne que les champs ε peuvent vérifier simultanément, l'approximation de l'optique géométrique pour ω , et ondulatoire pour $\delta\Omega(x,t)$.

Par transposition formelle, la matière et les interactions peuvent présenter un comportement expérimental dual : en se déplaçant sous la forme de particules le long de trajectoires, avec une densité d'énergie principale $u^2 = I\omega$, et en étant en relation avec les limites expérimentales, sous la forme d'ondes, avec une densité d'énergie de perturbation $\delta U^2(x,t) = I\delta\Omega(x,t)$.

Références

Elbaz, Claude. Gravitational and electromagnetic properties of almost standing fields. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2012, vol. **17**, n° 3, p. 835. <https://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2012.17.835>

Elbaz, Claude. Sur les programmes d'Albert Einstein et de Louis de Broglie. Une contribution. *Annales Fondation Louis de Broglie*. 2013, vol. **38**, p. 195. <http://aflb.ensmp.fr/AFLB-38/aflb38Im758.htm>

Elbaz, Claude. Wave-particle duality in Einstein-de Broglie programs. *Journal of Modern Physics*, 2014, vol. **5**, n° 18, p. 2192. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518213>

Elbaz, Claude. Gravitation and Electromagnetism Conciliated Following Einstein's Program. *Journal of Modern Physics*, 2015, vol. **6**, n° 05, p. 660. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.65072>

Elbaz, Claude. On Einstein's Program and Quantum Mechanics. *Applied Physics Research*, 2015, vol. **7**, n° 6, p. 126. <https://dx.doi.org/10.5539/apr.v7n6p126>

Elbaz, Claude. On Einstein's Program and Quantum Theory. *Fundamental Journal of Modern Physics*, 2015, vol. **8**, n° 2, p. 125. Publié en ligne : <http://www.frdint.com/>

Elbaz, Claude. On Einstein's Program and Maxwell's Equations. *Journal of Applied and Advanced Physics*, 2015, vol. **1**, n° 1. <http://crescopublications.org/pdf/jaap/JAAP-1-001>

Elbaz, Claude. On Einstein's Program and Quantum Double Slit Experiment. *Studies in Engineering and Technology*, 2016, vol. **3**, n° 1, p. 91. <https://dx.doi.org/10.11114/set.v3i1.1730>

4

The Quantum Design of Photosynthesis

Rienk van Grondelle¹

Elisabet Romero¹

Vladimir Novoderezhkin²

(1) Department of Biophysics, Faculty of Sciences, VU University Amsterdam,
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam, The Netherlands.

(2) A. N. Belozersky Institute of Physico-Chemical Biology, Moscow State University,
Leninskie Gory, 119992, Moscow, Russia.

Photosynthesis has found an ultrafast and highly efficient way of converting the energy of the sun into electrochemical energy. The solar energy is collected by Light-Harvesting complexes (LHC) and then transferred to the Reaction Center (RC) where the excitation energy is converted into a charge separated state with almost 100% efficiency. That separation of charges creates an electrochemical gradient across the photosynthetic membrane which ultimately powers the photosynthetic organism. The understanding of the molecular mechanisms of light harvesting and charge separation will provide a template for the design of efficient artificial solar energy conversion systems.

We discovered that upon excitation of the Photosystem II RC (PSII RC) the energy is delocalized over several cofactors creating collective excited states (excitons) that provide efficient and ultrafast paths energy transfer using the principles of quantum mechanics [1,3,5]. In the reaction center the excitons become mixed with charge transfer (CT) character (exciton-CT states), which provide ultrafast channels for charge transfer [6,7,8]. Slow protein motions (static disorder) produce slightly different conformations which, in turn, modulate the energy of the exciton-CT states. In this scenario, in some of the LHC/RC complexes within the sample ensemble the energy could be trapped in some unproductive states leading to unacceptable energy losses.

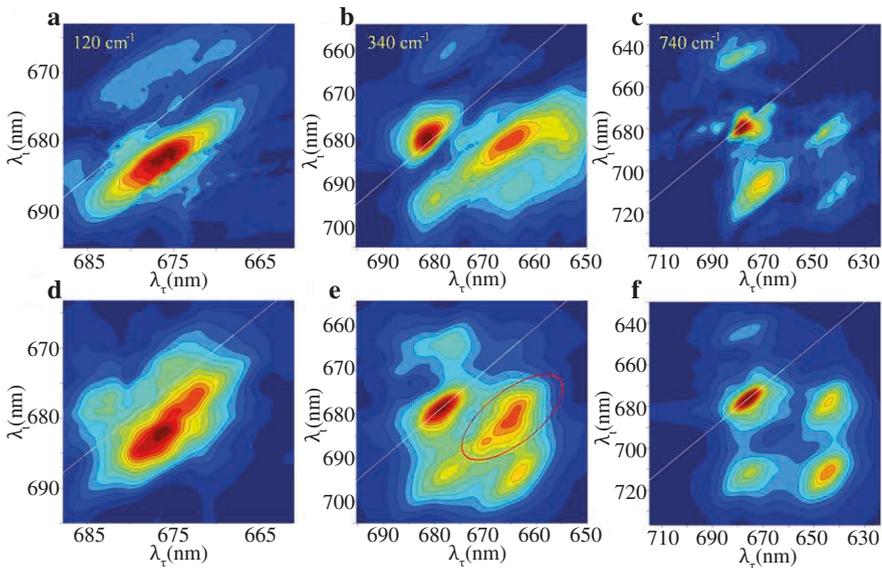


Figure 1. Measured (top) and calculated (bottom) 2DFT maps at 120, 340, and 740 cm^{-1} . The experimental maps correspond to the real rephasing 2D kinetics measured for isolated PSII-RC at 77K (data taken from Romero et al., 2014). The calculated maps are obtained from the disorder-averaged and orientation-averaged 2D responses corresponding to the coherent dynamics within the active branch of the PSII-RC (containing P_{D1} , P_{D2} , Chl_{D1} , and Phe_{D1}). In the 340 cm^{-1} map the peak corresponding to exciton-vibrational coherence with a significant degree of exciton mixing has been encircled.

We have applied 2D-Electronic Spectroscopy (2D-ES) and shown that PSII RCs have found a unique solution for overcoming this barrier: they use the principles of quantum mechanics to probe many possible pathways at the same time and to select the most efficient one that fits their realization of the disorder. We have developed new methods of analyzing such 2D-ES spectra by producing so-called 2D-frequency maps (see figure 1) [1,3,5].

We have developed a physical model that includes strongly coupled vibrations into the systems Hamiltonian. An example of such a fit is shown in the figure above [1,3,4].

The conclusion is that selected vibrations in the 30-500 cm^{-1} frequency range are used by the PSII RC to sustain electronic coherence for ultrafast energy and electron transfer [1,3,5]. In this way photosynthetic energy transfer and charge separation have achieved their amazing efficiency. At the same time these same interactions are used to photoprotect the system against unwanted byproducts of light harvesting and charge separation at high light intensities.

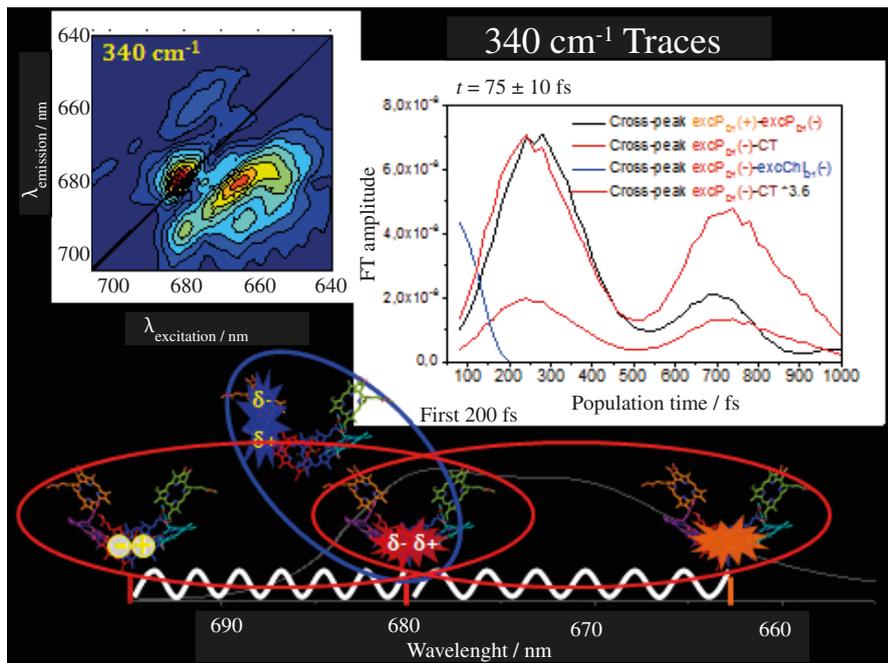


Figure 2. Time evolution of the 340cm^{-1} traces show that the initial coherence between the two exciton-charge transfer states disappears with a typical time constant of 75 fs, while coherence between the special pair exciton states and the charge transfer states appears with the same time constant.

We have applied an innovative analysis tool for 2DES experimental data: Wavelet analysis [2]. In our previous work [5], 2DES and Fourier Transform analysis allowed to visualize the coherences in a static picture: the 2D frequency maps. Now, we can show for the very first time the time evolution of coherence by applying Wavelet analysis. This analysis provides time-resolved 2D frequency maps which allow to visualize the transfer of coherence during the process of charge separation in the PSII RC. Our results unravel that, on excitation, a coherent superposition between two excitons is established for the first few hundreds of femtoseconds. Next, primary charge separation occurs: the exciton-exciton coherence decays into the coherence between exciton and CT state in about 200 fs, which then relaxes into a fully charge separated state. Certainly, this new insights represent an unprecedented dynamic view of coherent charge-separation events in photosynthesis.

Based on all these results we have developed a scheme that shows how vibronic coherences drive ultrafast charge separation along two pathways in the Photosystem II reaction center. In photosynthesis absorbed sunlight produces collective excitations (excitons) that form a coherent superposition of electronic and vibrational states of the

individual pigments. Two-dimensional (2D) electronic spectroscopy allows a visualization of how these coherences are involved in the primary processes of energy and charge transfer. Based on quantitative modeling we identify the exciton-vibrational coherences observed in 2D photon echo of the photosystem II reaction center (PSII-RC). We find that the vibrations resonant with the exciton splittings can modify the delocalization of the exciton states and produce additional states, thus promoting directed energy transfer and allowing a switch between the two charge separation pathways. We conclude that the coincidence of the frequencies of the most intense vibrations with the splittings within the manifold of exciton and charge-transfer states in the PSII-RC is not occurring by chance, but reflects a fundamental principle of how energy conversion in photosynthesis was optimized [1,3,4].

In conclusion we propose four essential quantum design principles that optimize the efficient harvesting of solar light by photosynthesis:

Design principles

The combination of the knowledge obtained by spectroscopic experiments and (modified) Redfield theory on the PSII RC has changed the way we understand light-driven photosynthetic CS: the PSII RC has found several complementary and interrelated solutions to ensure almost 100% CS efficiency and therefore to avoid energy losses, the expected consequence of its intrinsically disordered energy landscape. The disorder problem is most likely identical for any sustainable and affordable energy conversion system based on abundant materials. Here we summarize the current knowledge in four design principles with the aim of providing a guide for the design and construction of robust and efficient human-made energy conversion systems [1].

1. Mixing of exciton with CT States.
2. Resonant vibrations.
3. Multiple CS pathways controlled by the smart protein matrix.
4. Control of vibronic coherence by the smart protein matrix.

Therefore, we propose that these four design principles can be applied to develop new solar-energy technologies.

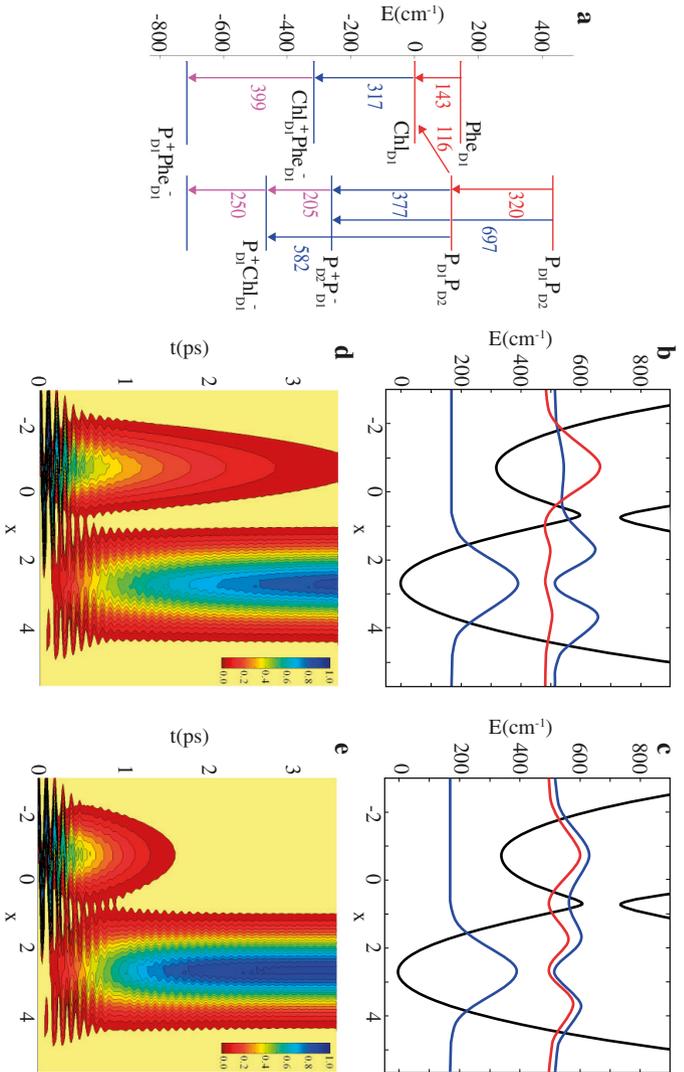


Figure 3. Energy level scheme and the role of resonant vibrations. **(a)** Energy level scheme for the excited states and radical pairs of the PSII-RC. Positions of the ZPLs of the four excitation states of our 4-state model (red) are shown together with the ZPLs of radical pairs (blue). We show the unperturbed values of the ZPLs (that is without taking into account the disorder and phonons), counting from the ZPL of the lowest excitation state localized at Chl_{D1} . The ZPL positions of the radical pairs are taken from our previous models. Arrows show the channels of energy transfers (red), electron transfers from primary donors to primary CT states (blue), and transfers between CTs (magenta). The numbers indicate the energy gaps corresponding to these transfers (in order to compare them with the vibrational frequencies). **(b)** The shape of the three lowest vibronic wavefunctions (red and blue lines) in the case of a 340 cm^{-1} mode coupled to the excitation and CT states separated by a gap of 320 cm^{-1} . Displacement Δ is -0.7 and 2.7 for the excitation and CT states, respectively. Coupling between the diabatic electronic states is $M=70 \text{ cm}^{-1}$. Potential surfaces for the two mixed states are shown by black lines. **(c)** The same as in **b**, but in the case of resonance, that is for the energy gap of 340 cm^{-1} . **(d)** Dynamics of the vibrational wavepacket after impulsive excitation of the excitation state coupled to the CT state (parameters are the same as in frame **b**). Initial excited-state wavepacket corresponds to transitions from the ground state potential (with the displacement of -2.4 (not shown) induced by absorption of a delta-pulse. Dynamics is calculated using the Redfield theory in the exciton-vibrational basis at 77K , as described in the text. **(e)** The same as in **d**, but for resonant configuration shown in frame **c**.

References

- [1] Elisabet Romero, Vladimir I. Novoderezhkin, and Rienk van Grondelle. Quantum Design of Photosynthesis for Bio-inspired Solar-Energy Conversion. *Nature*, 2017, **543**, 355-365.
- [2] Elisabet Romero, Javier Prior, Alex W. Chin, Sarah E. Morgan, Vladimir I. Novoderezhkin, Martin B. Plenio, and Rienk van Grondelle. Quantum-Coherent Dynamics in Photosynthetic Charge Separation Revealed by Wavelet Analysis. *Scientific Reports*, 2017, Accepted for publication.
- [3] Vladimir I. Novoderezhkin, Elisabet Romero, Javier Prior, and Rienk van Grondelle. Exciton-Vibrational Resonance and Dynamics of Charge Separation in the Photosystem II Reaction Center. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2017, **19**, 5195-5208.
- [4] Vladimir I. Novoderezhkin, Elisabet Romero, and Rienk van Grondelle. How Exciton-Vibrational Coherences Control Charge Separation in the Photosystem II Reaction Center. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2015, **17**, 30828-30841.
- [5] Elisabet Romero, Ramunas Augulis, Vladimir I. Novoderezhkin, Marco Ferretti, Jos Thieme, Donatas Zigmantas, and Rienk van Grondelle. Quantum Coherence in Photosynthesis for Efficient Solar-Energy Conversion. *Nature Physics*, 2014, **10**, 676-682.
- [6] Elisabet Romero, Bruce A. Diner, Peter J. Nixon, William J. Coleman, Jan P. Dekker, and Rienk van Grondelle. Mixed Exciton-Charge-Transfer States in Photosystem II: Stark Spectroscopy on Site-Directed Mutants. *Biophysical Journal*, 2012, **103**, 185-194.
- [7] Vladimir I. Novoderezhkin, Elisabet Romero, Jan P. Dekker, and Rienk van Grondelle. Multiple Charge-Separation Pathways in Photosystem II: Modeling of Transient Absorption Kinetics. *ChemPhysChem*, 2011, **12**, 681-688.
- [8] Elisabet Romero, Ivo H.M. van Stokkum, Vladimir I. Novoderezhkin, Jan P. Dekker, and Rienk van Grondelle. *Two Different Charge Separation Pathways in Photosystem II Biochemistry* (Accelerated Publications), 2010, **49**, 4300-4307.



Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier les auteurs des divers chapitres, transcriptions et appendices de cet ouvrage : Mesdames et Messieurs Françoise Balibar, Patrice Hello, François Bouchet, Franck Laloë, Alain Aspect, Jean Bricmont, Jean Dalibard, Serge Haroche, Jean-Michel Raimond, Jean Zinn-Justin, Gabriele Veneziano, Simone Speziale, Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Christophe Salomon, Dominique Lambert, Michel Serres, Jean-Pierre Treuil, Alexandre Gondran, Michel Gondran, Claude Daviau, Jacques Bertrand, Dominique Girardot, Claude Elbaz, Rienk Van Grondelle, Elisabet Romero et Vladimir Novoderezhkin.

Nous devons souligner que pour cet ouvrage, ont été mis à contributions six éminents chercheurs du laboratoire Kastler-Brossel de l'École Normale Supérieure dont deux prix Nobel : le premier attribué en 1997 à Claude Cohen-Tannoudji et le second en 2010 à Serge Haroche.

Tous les participants nous ont fourni des articles de haut niveau scientifique, et ont collaboré à la mise au point rigoureuse des iconographies et des normes de mise en page de notre Éditeur EDP Sciences. Certaines de ces personnalités ont été sollicitées par le comité de lecture de l'AEIS pour la relecture de leurs textes : Présentation générale, Présentations des quatre parties de l'ouvrage. Citons Alain Aspect, Luc Blanchet, Patrick Hello, François Bouchet, Franck Laloë, Jean-Michel Raimond, Jean Zinn-Justin, Christophe Salomon, Simone Speziale, Gabriele Veneziano, qu'ils soient tous remerciés ; une mention particulière doit-être faite pour Alain Aspect qui a relu avec attention la plupart des textes déjà mentionnés mais aussi pour sa participation très active à notre colloque de février 2016 au cours duquel il a fait des interventions remarquées, y compris lors de la table ronde. Nous remercions aussi notre collègue Pierre Nabet, Président de la section de Nancy de l'AEIS, d'avoir bien voulu faire une première relecture de ces textes.

Pour la mise au point technique de l'ouvrage, nous avons à nouveau bénéficié de la précieuse coopération du Service Édition Numérique et Numérisation de l'Inist-CNRS de Vandœuvre-lès-Nancy. Elle a été réalisée avec compétence et rigueur par Mesdames Sylvie Steffann, Sylvie Lacour, Emmanuelle Rocklin, Messieurs François Debeaupuis, Michel Schlotter, Jean-François Nominé et leurs collègues. Nous bénéficions aussi des compétences de France Citrini, Responsable Livres chez notre éditeur EDP Sciences.

Nos remerciements vont aussi aux organismes et aux personnalités qui, en amont de notre projet, ont permis les contacts, les conférences préalables, l'organisation d'un colloque international et enfin la structuration de cet ouvrage. L'École polytechnique et l'AX (Association des Anciens élèves) nous accueillent au 5, rue Descartes à Paris pour les séances mensuelles de l'AEIS. Nous remercions le Président de l'AX, Bruno Angles, son Délégué général Jean-Baptiste Voisin et Madame Sylvie Clairefond.

À chacune de ces séances, nous recevons les intervenants pressentis pour un colloque sur le thème de notre projet bisannuel. Les séminaires mensuels correspondants sont annoncés sur le serveur CORDIS-Wire de la Commission européenne par l'intermédiaire de notre collègue Jean Schmets et notre secrétaire générale Irène Herpe-Litwin a rédigé les comptes-rendus des nombreuses réunions du comité de lecture de l'AEIS, institué pour la réalisation de cet ouvrage, qu'ils soient tous les deux remerciés. Nos remerciements sont aussi adressés à Jean-Félix Durastanti, en charge du Mécénat, pour son dynamisme

Le colloque lui-même se tient à l'Institut Henri Poincaré de Paris, haut lieu de la science mathématique et physique française, dont nous tenons à remercier la Directrice Sylvie Benzoni, le Directeur-adjoint, Rémi Monasson et Florence Lajoinie, responsable de l'organisation technique de l'amphithéâtre Hermite.

Nos remerciements vont aussi aux collègues de l'AEIS : Alain Cordier, Claude Elbaz, Michel Gondran, Jean Schmets et Jean-Pierre Treuil qui ont contribué au bon déroulement du colloque de 2016 en présidant les sessions et à Gilles Cohen-Tannoudji d'avoir animé la table ronde. Pour terminer, nos remerciements à notre collègue Gilbert Belaubre qui réalise, entre autres, le fascicule des résumés destiné à tous les participants de nos colloques.

Victor Mastrangelo
Président de l'AEIS



Présentation de L'ACADÉMIE EUROPÉENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

L'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, AEIS, société savante (loi 1901), a pour but la recherche, la diffusion et la formation dans tous les domaines de la science. L'AEIS est répertoriée parmi les autres institutions de la capitale sur le site <http://www.paris.fr>

L'Académie se propose :

- ▶ de rassembler et de faire étudier les différentes recherches et pensées scientifiques dans un cadre interdisciplinaire ;
- ▶ d'établir entre les scientifiques un langage commun nécessaire pour une mutuelle compréhension ;
- ▶ de faire connaître les plus récentes découvertes, inventions ou réalisations des domaines de la connaissance ;
- ▶ de participer à l'élargissement de la pensée, en particulier sur des sujets frontières des différentes disciplines, pour atténuer la rigueur des délimitations, souvent artificielles.

Ses membres sont issus du monde académique et industriel, les grandes disciplines scientifiques sont représentées : Physique, Mathématiques, Biologie, Philosophie des Sciences, Informatique, Sciences de la Terre, Théorie des systèmes complexes, Chimie, Biophysique, Biochimie, Médecine, Sciences cognitives...

L'Académie :

- ▶ tient des séances régulières à Paris, Nancy et Nice ;
- ▶ édite un bulletin mensuel ;
- ▶ possède des ramifications à Bruxelles, Genève et Rome ;
- ▶ organise des colloques interdisciplinaires sur des thèmes scientifiques et de société.

Principaux thèmes des colloques internationaux :

- ▶ **2002, « Biologie et conscience », avec le Prix Nobel Gerald M. Edelman, CNAM-Paris ;**
- ▶ **2004, « Fractales en progrès », pour les 80 ans de Benoît Mandelbrot, prix Nobel, Paris ;**
- ▶ **2005, « Physique et conscience », clôturant l'Année Mondiale de la Physique en France avec le prix Nobel Gilles de Gennes, Paris, Ministère de la Recherche ;**
- ▶ **2008, « Émergence, de la fascination à la compréhension », Université Paris Diderot ;**
- ▶ **2009, « Perspectives des approches expérimentales et théoriques de l'évolution », à l'occasion de l'année Darwin, Président du colloque Prof. Denis Noble membre de la « Royal Society », Université Paris Diderot ;**
- ▶ **2011, « Théories et modèles en sciences sociales », Président du colloque Prof. Raymond Boudon, membre de l'Institut, Université Paris Diderot ;**
- ▶ **2014, « Formation des systèmes stellaires et planétaires – Conditions d'apparition de la vie », Institut Henri Poincaré, Paris.**
- ▶ **2016, « Ondes, matière et Univers/Relativité générale, physique quantique et applications », Présidente du colloque Prof. Françoise Balibar Université Paris Diderot**
- ▶ **2018, « Les signatures de la conscience/ Histoire naturelle, Phénomènes de conscience, Neurobiologie fonctionnelle, Automates intelligents, Éthique »**

Recrutement de Membres

L'ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES (AEIS) reçoit les candidatures de personnes ayant une forte culture scientifique. Cette culture peut être très générale ou fortement spécialisée, mais tous ses membres doivent être aptes à aborder des sujets interdisciplinaires qui sont au principe de ses projets. Les candidats doivent donc présenter un curriculum vitae qui expose leur niveau scientifique et leurs activités. Les productions intellectuelles, articles, ouvrages et brevets sont les témoignages les plus pertinents des capacités des candidats. Les éléments du CV sont détaillés sur l'entrée « candidatures » du site de l'AEIS désigné ci-dessous. Le CV doit être accompagné d'une lettre de motivation par laquelle le candidat exprime ce qu'il peut attendre de l'AEIS et ce qu'il pense pouvoir lui apporter en termes de compétence, de participation aux programmes de travail, et de gestion propre de l'Académie. Les dossiers sont adressés au Secrétaire Général de l'AEIS. Ils sont présentés à l'ensemble des membres qui formulent leurs avis, et la décision est prise par le Bureau selon les modalités prévues par le Règlement intérieur. Pour accéder aux modalités de candidature, aller sur le site :

<http://www.science-inter.com> ou écrire à Irene.herpe@science-inter.com qui transmettra le dossier de candidature.



ONDES MATIÈRE ET UNIVERS

RELATIVITÉ GÉNÉRALE, PHYSIQUE QUANTIQUE ET APPLICATIONS

Alain ASPECT (Institut d'Optique Graduate School, Université Paris-Saclay, École Polytechnique), **Françoise BALIBAR** (Université Paris-Diderot), **François BOUCHET** (Institut d'Astrophysique de Paris, CNRS & Sorbonne Université-UPMC), **Jean BRICMONT** (Université catholique de Louvain), **Claude COHEN-TANNOUJDI** (Prix Nobel de Physique 1997, Laboratoire Kastler Brossel, CNRS, ENS-PSL Research University, Collège de France), **Jean DALIBARD** (Collège de France et Laboratoire Kastler Brossel, CNRS, ENS-PSL Research University, UPMC-Sorbonne Universités), **Bernard DIU** (Université Paris Diderot), **Serge HAROCHE** (Prix Nobel de Physique 2012, Laboratoire Kastler Brossel, CNRS, ENS-PSL Research University, Collège de France), **Patrice HELLO** (Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay, CNRS, IN2P3 et Université de Paris Sud), **Franck LALOË** (Laboratoire Kastler Brossel, ENS-UMPC), **Dominique LAMBERT** (Facultés Universitaires N-D. de la Paix, Namur), **Jean-Michel RAIMOND** (Laboratoire Kastler Brossel, CNRS, ENS-PSL Research University, UPMC-Sorbonne Université), **Christophe SALOMON** (Laboratoire Kastler Brossel ENS-PSL Research University ; CNRS, UPMC-Sorbonne Université, Collège de France), **Michel SERRES** (Membre de l'Académie française), **Simone SPEZIALE** (Centre de Physique Théorique, CNRS, Université d'Aix Marseille & Université de Toulon), **Gabriele VENEZIANO** (Theory Division, CERN, Collège de France), **Jean ZINN-JUSTIN** (IRFU/CEA Centre de Paris-Saclay). **Jean-Pierre TREUIL** (A.E.I.S.).

Jacques BERTRAND (Fondation Louis de Broglie), **Claude DAVIAU** (Fondation Louis de Broglie), **Claude ELBAZ** (A.E.I.S.), **Dominique GIRARDOT** (École polytechnique), **Alexandre GONDRAN** (École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse), **Michel GONDRAN** (A.E.I.S.), **Vladimir NOVODEREZHKIN** (Institute of Physico-Chemical Biology, Moscow State University), **Rienk VAN GRONDELLE** (Department of Biophysics, Faculty of Sciences, VU University Amsterdam), **Elisabet ROMERO** (Department of Biophysics, Faculty of Sciences, VU University Amsterdam).

Cet ouvrage, dans la vision pluridisciplinaire de l'Académie, montre les progrès scientifiques réalisés depuis les premiers travaux d'Albert Einstein et de ses contemporains du début du XX^e siècle sur les deux grands piliers de la Physique moderne que sont la Relativité générale et la Mécanique quantique. Il a la prétention de rassembler les résultats et les observations scientifiques les plus significatifs de la fin du XX^e siècle et de ce début de troisième millénaire. Malgré les difficultés actuelles des tentatives de leur conciliation en vue de bâtir une théorie unifiée, ces deux théories montrent leur grande pertinence dans leurs domaines respectifs de validité. Elles nous offrent une vision du monde et de l'Univers d'une richesse insoupçonnée.

Ce livre comporte quatre parties.

- 1) Relativité, ondes de l'univers.
- 2) Dualité ondes/corpuscules de la physique quantique.
- 3) Ondes, matière et quantification.
- 4) Une nouvelle révolution scientifique à l'horizon ?

La même exigence traverse en filigrane tous les travaux ou réflexions présentés : l'exigence d'accroître et d'affiner constamment les techniques d'observations et d'expérimentations, et de construire parallèlement les outils mathématiques nécessaires à l'analyse de leurs résultats ; l'exigence de tester les implications des théories jusqu'aux dernières limites permises par ces possibilités observationnelles et expérimentales ; pour résumer l'exigence de mettre sans cesse à l'épreuve les théories dans leur conformité aux observations et expériences, et, à travers leur interprétation, dans le rapport que nous leur attribuons à la « réalité » de notre Univers.

ISBN: 978-2-7598-2264-5