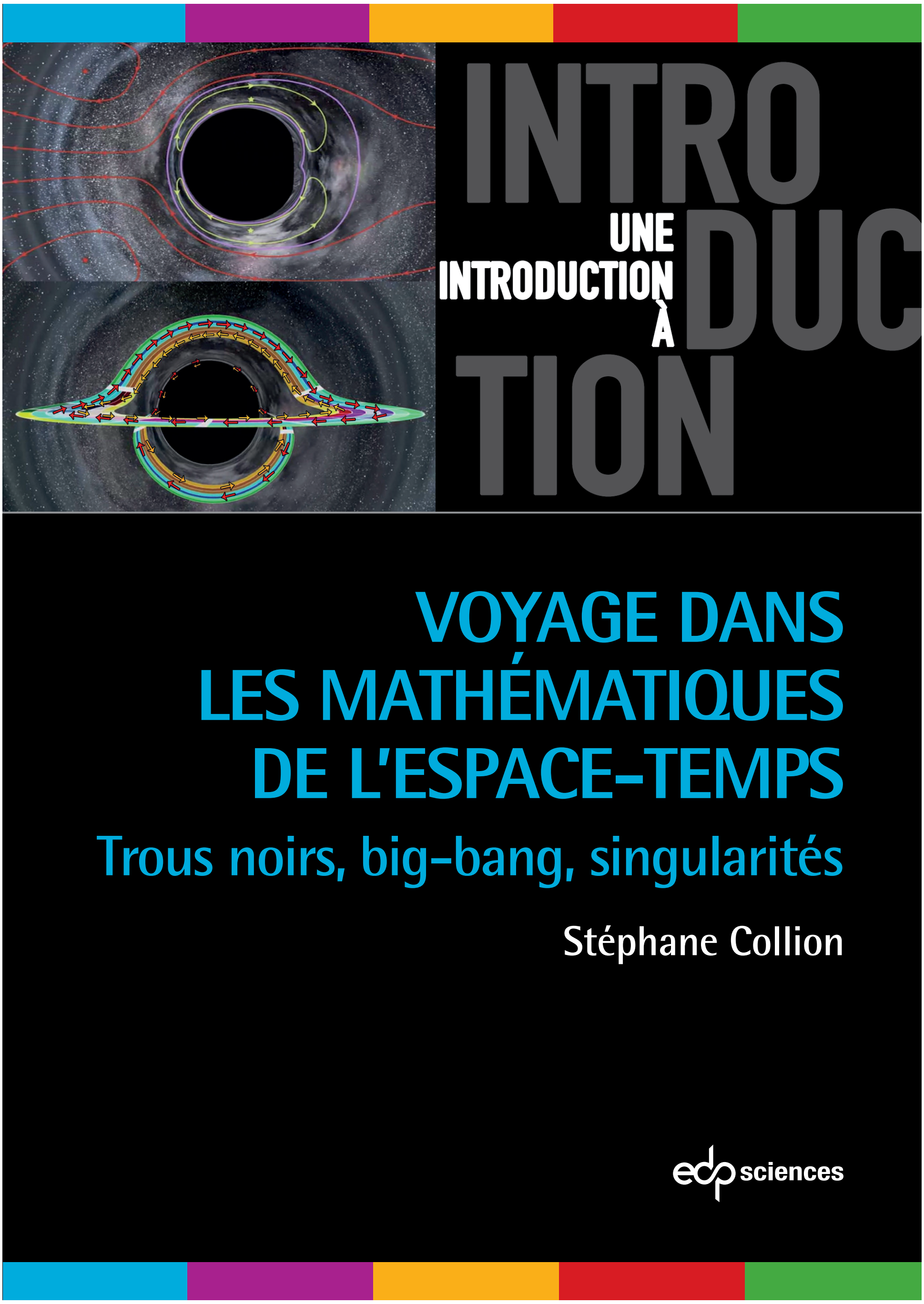
Errata et compléments



ISBN (papier) : 978-2-7598-2279-9 – **ISBN (ebook)** : 978-2-7598-2278-2

Table des matières

Chapitre 2 : Relativité restreinte

Page 52 (légende de la figure 2.29)

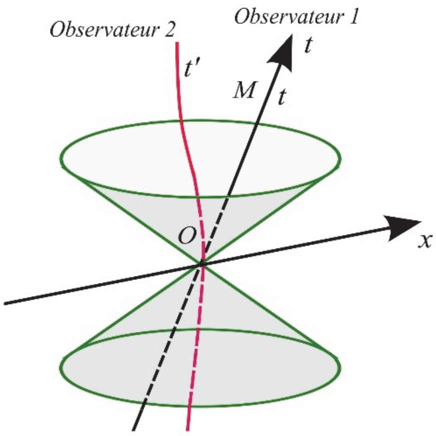


Figure 2.29. Le temps propre de l'Observateur 1 est la pseudo-distance qu'il mesure le long de sa ligne d'univers : Si M est de coordonnées $(0, 0, 0, t)$ dans le repère dont l'axe « temporel » (des « t ») est la ligne d'univers de l'Observateur 1, alors t est le ***temps propre*** écoulé *pour cet observateur* entre O et M. De manière imagée : « Un observateur immobile dans l'espace, avance quand même dans le temps… ». (Un seul axe « spatial », x, a été représenté pour l'Observateur 1. Il est orthogonal à la ligne d'univers de cet observateur pour le produit scalaire lorentzien !) Pour le calculer quand la ligne d'univers n'est pas une droite (Observateur 2, ligne rouge ci-dessus), on utilise une méthode mathématique un peu plus sophistiquée : une intégrale. Nous y reviendrons dans le cadre de la relativité générale.

Chapitre 3 : Variétés différentielles

Page 75 (légende de la figure 3.4)

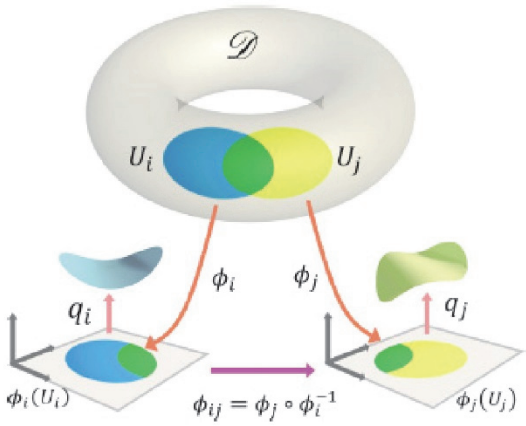


Figure 3.4. *Schéma utilisé dans la définition mathématique d'une variété différentielle.* Une variété est essentiellement définie par un espace géométrique sur lequel on postule l'existence de cartes, ce qui est assez simple. Une variété devient différentielle, ou lisse, quand on peut y définir des vecteurs tangents en chaque point, ce que nous verrons au chapitre suivant. C'est avec les vecteurs tangents qu'on transpose sur une variété le calcul différentiel classique de l'espace euclidien, ce qui nécessite un axiome technique supplémentaire, *la différentiabilité des applications de changements de carte.* Voir l'annexe pour plus de détails.

Chapitre 4 : Relativité générale

Pour aider le lecteur, la partie sur les géodésiques a été découpée en plusieurs sous-parties pour rendre l'enchaînement des idées plus clair ; à cela se rajoutent une légère réécriture des premiers paragraphes, l'ajout d'une remarque et une légère modification de la figure 4.12 (« axes » espace-temps ajoutés).

4.3 Les géodésiques de l'espace-temps

De la géométrie d'Euclide à la géométrie courbe

Nous ne pouvons pas faire un exposé aussi complet des mathématiques nécessaires à la relativité générale que nous l'avons fait pour la relativité restreinte, mais nous allons donner une idée de la façon dont on transpose les notions de courbes de genre temps ou lumière d'un espace affine à une variété.

La première idée naturelle est d'utiliser les *cartes*. Souvenez-vous du chapitre 3. Une variété est un espace géométrique sur lequel on peut définir une carte au voisinage de chaque point, c'est-à-dire une correspondance (bijective, ou bi-univoque) avec un morceau de l'espace affine, plat, usuel.

Avec ces cartes on peut tenter de ramener sur la variété les calculs que l'on peut faire sur l'espace affine, comme les dérivées, les intégrales, et, en particulier pour la relativité, les mesures d'angles et de distances. Ainsi, si l'on a deux courbes qui se croisent sur la variété en un point, on peut les regarder dans une carte autour du point d'intersection, et mesurer par exemple l'angle qu'elles font, comme on sait le faire dans un espace affine (l'angle de leurs tangentes). Puis on peut être tenté de remonter ce calcul sur la variété, toujours avec la carte. Mais la difficulté est que la carte peut déformer fortement l'image de la variété : pensez aux cartes de la Terre que vous trouvez dans un atlas : si ces cartes vous montrent l'équateur comme une droite horizontale au milieu de la page, les images du Groenland et de l'Antarctique vont être fortement déformées, les surfaces seront disproportionnées. Il faut alors utiliser *une autre* carte, adaptée, centrée sur l'Arctique par exemple. Au passage, notons que le problème de la représentation de la Terre à l'aide de cartes est un problème qui occupe les mathématiciens depuis des siècles. Voir figure 4.1.

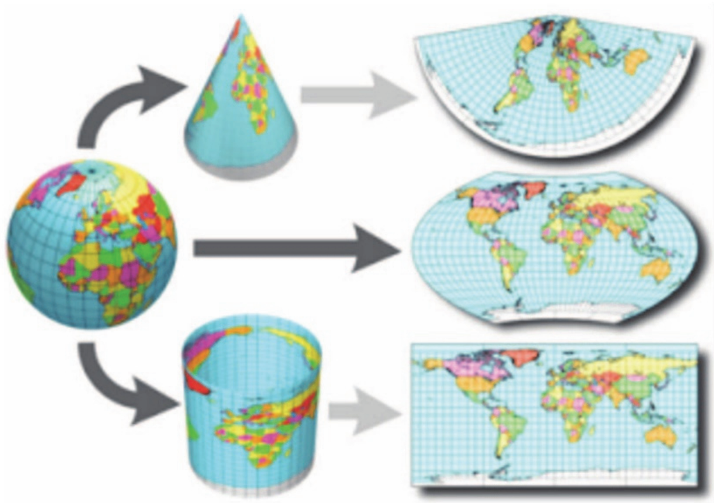


Figure 4.1. Différents choix de cartes donneront une apparence complètement différente des continents. Certaines cartes, les cartes conformes, peuvent transposer la valeur des angles de la Terre vers la carte. En revanche, aucune carte ne peut respecter les rapports de distances mesurés à la surface de la Terre sur l'ensemble de son domaine. Cela est dû à la courbure de la Terre, par opposition à la platitude de la carte.

C’est en effet là qu’intervient une notion fondamentale pour la géométrie riemannienne, ***la courbure***. On le sent effectivement, la sphère est courbée, la carte est plate. Et c’est là la difficulté majeure de la transposition aux variétés des outils développés sur les espaces affines. Si l’outil de base du calcul différentiel, la dérivée des fonctions, se transporte très facilement sur une variété à l’aide de la notion de carte, et permet de faire déjà énormément de choses, la notion de mesure d’angle et de distance, elle, passe très mal, et cela est lié à cette notion de courbure. C’est pour résoudre ces difficultés qu’on développe la géométrie riemannienne.

Les notions de courbure et de géodésiques sont les notions centrales de la géométrie riemannienne, et donc de la relativité générale. Il nous faut donc les approfondir. Heureusement, pour les surfaces (de dimension 2), la notion intuitive de courbure, par opposition à la platitude d’un plan, correspond assez bien à la notion mathématique. Malheureusement, à partir de la dimension 3, le concept de courbure devient très compliqué à définir. Le plus simple est de le présenter à travers son effet sur les géodésiques, c’est d’ailleurs la description qui est la plus utile pour la relativité générale.

Les concepts et objets mathématiques à introduire pour définir correctement les géodésiques sont un peu sophistiqués, mais assez visuels. Nous voulons donc en faire sentir l’essence au lecteur, et montrer que les géodésiques sont des objets plus subtils que ce que l’on présente dans les articles de vulgarisation. Comme pour la relativité restreinte, nous présenterons un résumé « par l’image » de ce qu’il faut retenir dans un encadré accompagné d’une figure, page 94. Disons tout de suite que l’idée essentielle est la suivante : *La relativité générale modélise l’espace-temps par un espace géométrique de dimension 4, de forme quelconque : une variété. En chaque point, on y trace un* cône de lumière*. Les lignes d’univers des objets physiques doivent passer en chaque point à l’intérieur de ces cônes de lumière. La lumière suivra les bords de ces cônes. Les géodésiques sont des courbes inertielles, sans accélération, que suivent les objets libres et la lumière.*

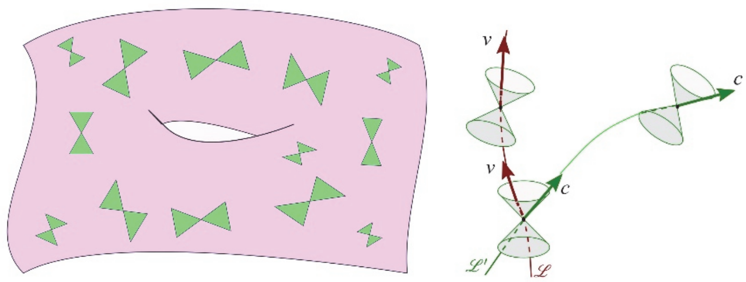


Figure 4.2. À gauche : L’espace-temps est une variété de dimension 4 sur laquelle on trace en chaque point un cône de lumière. (Ici encore, deux dimensions spatiales étant supprimées, les cônes sont « plats ».) À droite : une courbe de genre temps (en rouge) reste toujours à l’intérieur de ses cônes de lumière. Une courbe de genre lumière (en vert) est, intuitivement, sur les bords de ses cônes. Les géodésiques sont des courbes spéciales, inertielles, c’est-à-dire sans accélération, que suivent les objets libres et la lumière.

Les vecteurs vitesse d’une courbe

Si on modélise l’espace-temps par une variété, il faut donc y étudier les lignes d’univers. Les lignes d’univers, ce sont des courbes tracées sur la variété. Il se trouve que mathématiquement, les courbes sont d’excellents outils d’exploration de la géométrie d’une variété, et donc de l’espace-temps. Intuitivement, sur une variété ou dans l’espace euclidien, une courbe représente un point mobile dont on repère les positions successives à l’aide d’un paramètre, comme le temps. Physiquement, une courbe représente donc la trajectoire, ou la ligne d’univers dans l’espace-temps, d’un objet ponctuel. Mathématiquement, une courbe est une fonction (continue) qui associe à tout paramètre réel t d’un intervalle, un point de la variété. Voir Figure 4.3.

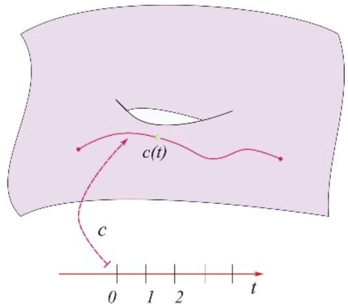


Figure 4.3. Une courbe repère les positions successives d'un point à l'aide d'un paramètre.

Ensuite, une courbe représentant donc un point mobile, s'inspirant toujours de la physique, on s'intéresse à la ***vitesse*** de ce point mobile. On définit alors (mathématiquement) les ***vecteurs tangents*** comme étant les ***vecteurs vitesse*** des courbes tracées sur la variété. Si une courbe passe par un point P, le vecteur vitesse de cette courbe en P est un vecteur intuitivement attaché en P. Cela correspond parfaitement à l'image intuitive que vous pouvez vous faire du vecteur vitesse en un point d'une courbe, lorsque cette courbe représente le déplacement d'un objet sur la variété : par exemple, la vitesse d'une voiture sur une route à la surface de la terre. ***L'espace tangent*** en p, c'est l'ensemble des vecteurs tangents en p. C'est un espace vectoriel, un espace de vecteurs comme nous l'avons défini en relativité restreinte. Il est alors de même dimension que la variété.

Pour les lecteurs exigeants : c'est fondamentalement la définition mathématique des vecteurs tangents qui transpose aux variétés la notion classique de dérivée d'une fonction. C'est en effet grâce aux vecteurs tangents qu'on calcule la dérivée première (c'est-à-dire le taux de variation) des fonctions définies sur une variété. C'est donc essentiellement avec cette notion qu'on retrouve les outils du calcul différentiel classique. Notez qu'on ne peut calculer avec les vecteurs tangents que la dérivée première d'une fonction, mais pas les dérivées secondes qui elles nécessitent une métrique*, que nous allons définir plus loin (voir aussi l'annexe.)*

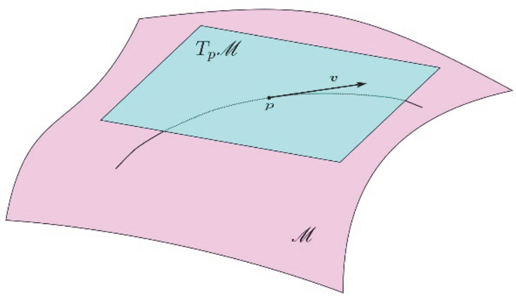


Figure 4.4. Un vecteur tangent au point p doit être vu comme le vecteur vitesse d'une courbe passant par p, ce vecteur donnant la direction et « l'intensité » de la vitesse. ***L'espace tangent*** en p, c'est l'ensemble des vecteurs tangents en p. Pour « calculer » le vecteur vitesse, on peut utiliser une carte : si une courbe est une fonction qui marque les *positions* successives d'un point mobile au cours du temps, sa dérivée est sa *vitesse*. En effet, la ***dérivée*** d'une fonction, c'est son taux de variation ; or le taux de variation de la position, c'est la vitesse. On calcule cette dérivée à l'aide des coordonnées fournies par la carte.

Les vecteurs tangents et l'espace tangent sont techniquement définis à l'aide des cartes. Ici, le concept correspond parfaitement à l'image intuitive de vecteurs tangents et de plan tangent à une surface. On peut aussi dire que le plan tangent est la version infinitésimale d'une carte : imaginez que vous regardiez la terre sur laquelle vous vivez, une sphère, avec un microscope dont vous augmentez le grossissement. Appelons P la position du microscope. Au début, la surface autour de P apparaît légèrement courbée dans votre microscope, puis, au fur et à mesure que vous augmentez le grossissement, ce que vous voyez autour de P a l'air de plus en plus plat. Quand le grossissement devient infini, vous voyez l'espace tangent en P !

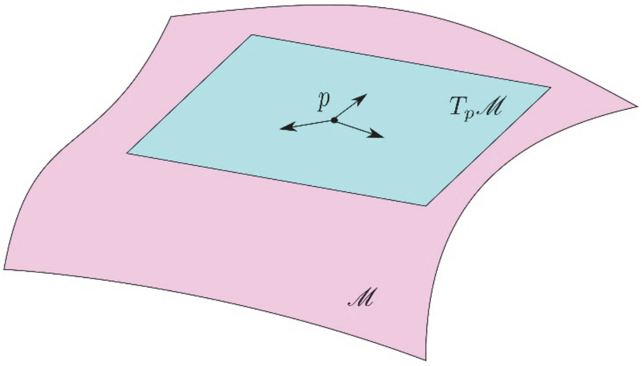


Figure 4.5. Bien que la définition mathématique du plan tangent à une variété soit un peu délicate (voir l'annexe), l'idée correspond parfaitement à l'image intuitive du plan tangent à une surface. Sur une variété $\mathcal{M}$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$ au point p est un espace de vecteurs, de même dimension que la variété.

La métrique et la longueur des courbes

Maintenant, l'espace tangent étant un espace vectoriel, comme l'espace des déplacements d'un espace affine, on peut donc y faire tout ce qu'on savait faire dans ce cas. En particulier, on peut y mettre *un produit scalaire*, euclidien ou lorentzien. Donc, une fois choisi un tel produit scalaire, on peut mesurer la (pseudo-)longueur d'un vecteur tangent, et définir l'orthogonalité entre deux vecteurs tangents au même point. On peut faire cela sur tous les espaces tangents. Quand on a défini un produit scalaire sur chaque espace tangent d'une variété, on dit qu'on a muni cette variété d'une ***métrique***. (Notons que le produit scalaire doit « varier continûment d'un espace tangent à l'autre », ce qui a un sens mathématique précis, sur lequel nous passerons. Une métrique peut être construite sur une variété en donnant une « formule » dans chaque carte d'un atlas de la variété, ces formules devant être compatibles entre elles ; voir la dernière partie de l'annexe).

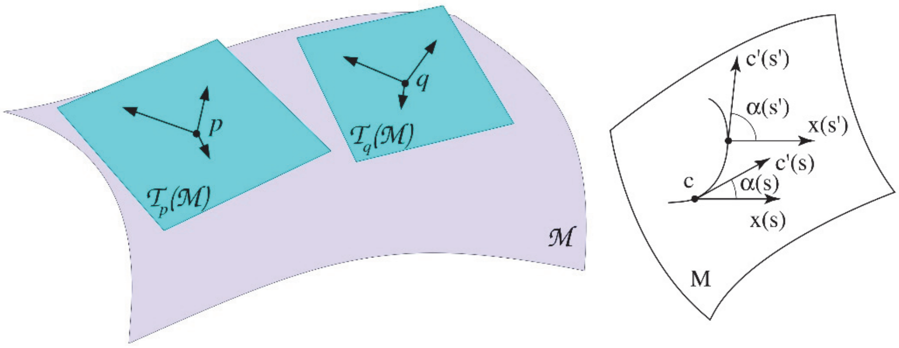


Figure 4.6. *La métrique d'une variété*. À gauche : chaque espace tangent est un espace vectoriel sur lequel on met un produit scalaire. On peut donc mesurer la (pseudo-)longueur des vecteurs en chaque point, ainsi que les angles qu'ils font entre eux. On peut alors calculer la (pseudo-)longueur d'une courbe sur la variété. À droite : la métrique permettra aussi d'évaluer comment évoluent la longueur et l'orientation du vecteur vitesse d'une courbe d'un point à un autre, et donc d'en calculer *l'accélération*.

Ensuite, si on sait mesurer le vecteur vitesse d'une courbe en chacun de ses points, c'est une procédure mathématique classique que d'obtenir la longueur de cette courbe entre deux de ses points : *on intègre la longueur des vecteurs vitesse entre ces deux points*. Vous savez le faire : si vous roulez pendant trois heures à une vitesse moyenne de 130 km/h, vous aurez parcouru 390 km ! Vous avez « intégré » la vitesse sur une durée de 3 heures ! ***L'intégrale*** d'une fonction, c'est en effet simplement la valeur moyenne de cette fonction, multipliée par la longueur de l'intervalle d'intégration (pour les lecteurs curieux, voir l'annexe).

La longueur d'une courbe sur une variété, c'est l'intégrale de la longueur de ses vecteurs vitesse entre ses extrémités.

Nous considérons désormais une variété munie d'une métrique. La variété est une ***variété riemannienne*** si le produit scalaire sur chaque espace tangent est euclidien. C'est une ***variété lorentzienne*** si le produit scalaire sur chaque espace tangent est lorentzien. Sur une variété munie d'une métrique, on va donc pouvoir calculer la longueur (ou la pseudo-longueur) des courbes qui y sont tracées. Mais, avec un produit scalaire lorentzien, l'interprétation est un peu subtile, nous allons le voir.

*Du jargon mathématique : les adjectifs riemannienne et lorentzienne désignent donc deux choix possibles de produits scalaires sur les espaces tangents. Historiquement, la **géométrie riemannienne** est la branche des mathématiques qui étudie les variétés riemanniennes. Mais on utilise évidemment les mêmes concepts et les mêmes outils pour étudier les variétés lorentziennes. On appelle donc **géométrie pseudo-riemannienne** l'étude des variétés munies d'une métrique, quelle qu'elle soit. Dans ce livre, l'expression **variété pseudo-riemannienne** désignera donc une variété munie d'une métrique, qu'elle soit riemannienne ou lorentzienne. L'inventivité et les subtilités du langage des mathématiques font partie de leur charme…*

Géodésiques riemanniennes

Sur une variété *riemannienne*, avec un produit scalaire *euclidien* sur chaque espace tangent, on obtient une mesure naturelle, classique, des vecteurs vitesse et des angles que ceux-ci font entre eux ; on obtient donc une notion naturelle de longueur des courbes qui y sont tracées. On peut alors se demander s'il existe un plus court chemin entre deux points donnés d'une variété. Il est facile de constater qu'il n'en existe pas toujours ! En effet, si vous considérez par exemple le plan avec sa distance euclidienne classique, et que vous y faites un « trou », en retirant simplement un point, alors, il n'existe pas de plus court chemin entre deux points symétriques par rapport à ce trou, mais seulement des chemins de *plus en plus courts* entre ces points.

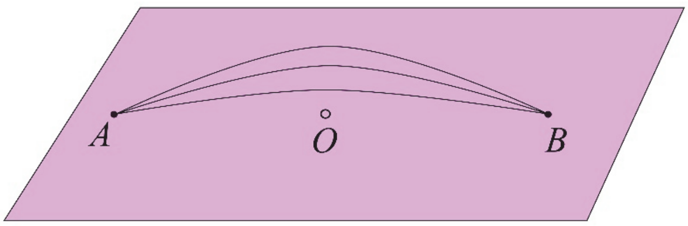


Figure 4.7. *Un trou empêche l'existence d'un plus court chemin.* Si on enlève un point dans le plan, ici le point O, il n'existe pas de plus court chemin entre A et B. En effet, on ne peut plus passer par O, et on peut seulement trouver des chemins de plus en plus courts.

Si on exclut ces cas « pathologiques », autrement dit s'il n'y a pas de « trou » dans la variété, (ce qui se définit facilement mathématiquement), alors il y a un plus court chemin, et ce chemin est une ***géodésique***.

Sur la sphère par exemple, les géodésiques sont les *grands cercles*, ceux dont le centre est confondu avec le centre de la sphère. Ce sont ces cercles que suivent les avions à la surface de la terre. Attention : sur une variété, il peut y avoir plusieurs géodésiques, voire une infinité, entre deux points ; le plus court chemin entre deux points n'est pas forcément unique ! Sur la terre par exemple, tous les méridiens allant du pôle Nord au pôle Sud sont des géodésiques.

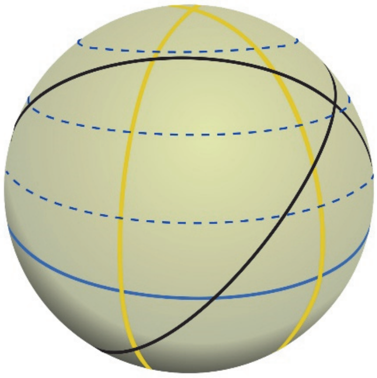


Figure 4.8. *Géodésiques de la sphère*. Les géodésiques de la sphère sont en traits pleins, ce sont des grands cercles. Les courbes pointillées, des parallèles autres que l'équateur, ne sont pas des géodésiques. Évidemment, lorsque l'on considère deux points sur la sphère, il faut prendre le plus petit des deux arcs de grand cercle qui passe par ces points pour obtenir le plus court chemin ; il faut prendre celui qui fait moins d'un demi-tour ! C'est pourquoi une géodésique ne réalise le plus court chemin entre deux de ses points que lorsqu'on la considère sur des régions assez petites. *Voici un exemple important de formule de géométrie différentielle, l'équation des géodésiques dans une carte :* $\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0.$

Mathématiquement, une *géodésique* sur une variété *riemannienne* est une courbe qui réalise « localement » le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. « Localement » signifie que, pour certaines variétés, c'est chaque tronçon « assez petit » de la géodésique qui réalise le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. L'exemple de la sphère montre pourquoi : un grand cercle est une géodésique, mais entre deux points, il faut prendre l'arc qui fait moins d'un demi-tour pour avoir le plus court chemin ! On peut avoir des situations analogues sur des variétés plus compliquées (voir les images du tore, un peu plus loin). La notion de plus court chemin est beaucoup plus subtile sur une variété que dans l'espace euclidien.

Sur une variété *riemannienne* « sans trou », on retrouve néanmoins une notion de distance très intuitive : la *distance* entre deux points de la variété, c'est la longueur de la plus petite courbe qui les joint, et cette courbe de longueur minimale est une ***géodésique***.

(Pour les lecteurs exigeants : les énoncés précis caractérisant les géodésiques comme courbes de longueurs minimales sont assez techniques. Il faut dire : autour de chaque point *p*, il existe une région (qui peut être toute la variété) où tout point peut-être relié à *p* par une courbe de longueur minimale, qui est alors une géodésique. Pour les points au-delà de cette région, l'existence d'une géodésique minimale n'est pas garantie. S'il y a « des trous », la distance entre deux points d'une variété riemannienne, c'est la *borne inférieure* des longueurs des courbes qui les joignent, même quand il n'y a pas de géodésique joignant ces deux points).

L'accélération d'une courbe

Sur une variété munie d'une métrique, il semble donc naturel de vouloir définir les géodésiques comme des courbes de longueur minimale. Mais on voit déjà dans le cas d'une métrique classique, riemannienne, que ce n'est pas simple : il faut qu'il n'y ait pas de trous, et que les points à relier ne soient pas trop éloignés.

Si l'on considère maintenant une métrique *lorentzienne*, la définition des géodésiques comme courbe de longueur minimale n'est pas possible. En effet, de même que sur un espace affine un produit scalaire lorentzien donnait une géométrie très différente d'un produit scalaire euclidien, une métrique *lorentzienne* va donner une géométrie très différente d'une métrique riemannienne. En particulier, comme en relativité restreinte, nous allons voir que la notion de distance devient ambiguë sur une variété lorentzienne : songez au paradoxe des jumeaux, ou à l'inégalité triangulaire inversée, qui montrent que dans certains cas, la ligne droite est le *plus long* chemin entre deux points. Si l'on veut caractériser des courbes de longueurs *extrémales* (maximales ou minimales), il va donc falloir définir les géodésiques d'une autre manière. C'est encore la métrique qui va permettre une meilleure approche.

En effet, l'un des énormes intérêts d'une métrique sur une variété, c'est que cela permet également de définir ***l'accélération*** d'une courbe, allant donc au-delà de la seule définition de sa vitesse.

L'accélération d'une courbe, c'est le taux de variation de son vecteur vitesse d'un point à un autre. Une métrique est nécessaire pour évaluer la variation d'angle ou de longueur des vecteurs vitesse. Cette notion correspond à l'idée intuitive : une courbe qui tourne ou qui change de vitesse a une accélération non nulle. ***On définit alors une géodésique comme une courbe d'accélération nulle.***

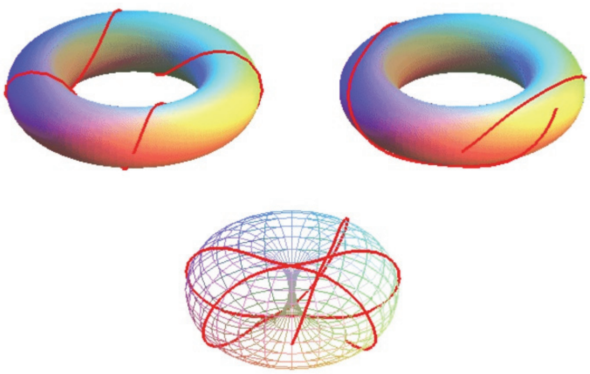


Figure 4.9. *Géodésiques du tore.* Le lecteur peut feuilleter l'annexe pour voir quelques détails supplémentaires sur les mathématiques des géodésiques.

Définir une géodésique comme une courbe d'accélération nulle, bien que moins intuitif que comme une courbe de longueur minimale, a une très belle interprétation physique. Une géodésique est une courbe « naturelle » sur une variété munie d'une métrique : elle se contente de suivre les creux et les bosses de la variété. En effet, *l'accélération doit se mesurer au sein de la variété où la courbe vit, sans faire référence à un quelconque espace extérieur englobant la variété*. C'est donc le chemin que suivrait une bille lancée sur cette variété et qui roulerait sans frottement et sans glissement. C'est la meilleure façon de définir les géodésiques, car la définition a alors un sens aussi bien sur une variété riemannienne que lorentzienne, sur laquelle la notion de longueur devient compliquée. Sur une variété avec une métrique *riemannienne*, les géodésiques, définies comme courbes d'accélération nulle, sont bien les courbes qui réalisent les plus courts chemins lorsqu'ils existent, comme nous les avions initialement présentées ; les deux points de vue sont donc équivalents dans ce cas.

Géodésiques lorentziennes, géodésiques de l'espace-temps

Pour voir à quoi ressemblent les géodésiques d'une variété *lorentzienne*, examinons maintenant les différents types de courbes que l'on peut y définir. Dans la géométrie de la relativité restreinte, le produit scalaire permettait de définir trois familles de vecteurs, les vecteurs de genre temps, lumière et espace. Or, avec une métrique, on a fait de chaque espace tangent, un modèle réduit de l'espace de la relativité restreinte. C'est bien le but d'ailleurs : sur chaque carte assez petite, la variété doit être « presque » l'espace de la relativité restreinte, et c'est *globalement* que la gravitation déforme la variété. L'espace tangent, c'est une carte « infinitésimale ». Grâce au produit scalaire sur chaque espace tangent, on peut donc dessiner un cône de lumière au point de contact avec la variété, et ainsi définir des vecteurs de genre temps, lumière et espace.

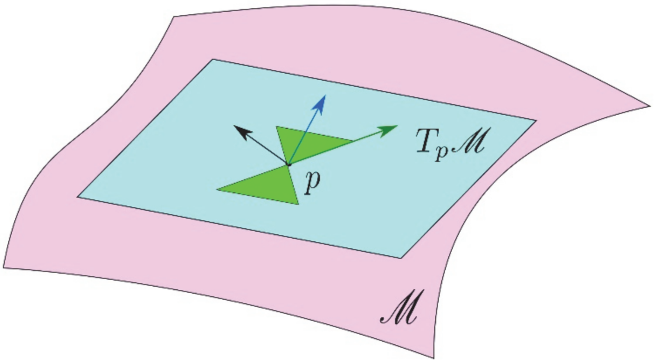


Figure 4.10. Au point de contact avec la variété, grâce à la métrique, on trace un cône de lumière sur le plan tangent (ici en vert). On définit alors, pour ce point, les vecteurs tangents de genre temps, espace et lumière, selon qu'ils sont à l'intérieur, à l'extérieur, ou sur ce cône. En bleu, un vecteur de genre temps. En vert, un vecteur de genre lumière. En noir, un vecteur de genre espace. (Deux dimensions spatiales ayant été supprimées sur ce dessin, le cône est « plat ».)

En considérant le cône de lumière tracé au point de contact de chaque espace tangent, on obtient un cône de lumière attaché à chaque point de la variété. *L'ensemble de ces cônes de lumière est, comme en relativité restreinte, une structure fondamentale de la variété espace-temps. Une courbe tracée sur la variété sera alors dite de genre temps si tous ses vecteurs vitesse sont de genre temps, elle sera dite de genre lumière si tous ses vecteurs vitesse sont de genre lumière, et enfin de genre espace si tous ses vecteurs vitesse sont de genre espace.*

Remarque : une courbe quelconque peut changer de genre d'un point à un autre, mais elle présente alors peu d'intérêt, tant sur le plan mathématique que physique.

Ce qu'il faut retenir à ce stade *:* De manière intuitive, on peut se contenter de retenir que la relativité générale modélise l'espace-temps par un espace géométrique de dimension 4 et de forme quelconque, une variété, sur laquelle on trace, en chaque point, un cône de lumière. Les courbes de genre temps sont les courbes qui passent en chaque point à l'intérieur des cônes de lumière ; on postule que ce sont les lignes d'univers des objets physiques. Il faut admettre aussi qu'on se donne un moyen, (appelé métrique), de mesurer les (pseudo-)longueurs des courbes, ainsi que leur accélération. On définit alors les géodésiques comme les courbes d'accélération nulle, qui suivent naturellement les creux et les bosses de la variété espace-temps. La lumière suit des géodésiques qui sont en chaque point sur le bord des cônes de lumière.

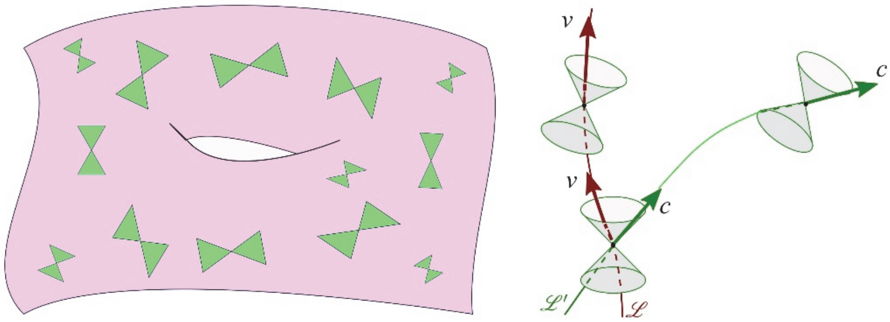


Figure 4.11. À gauche : Le produit scalaire mis sur chaque espace tangent permet de tracer un cône de lumière (tangent) en chaque point de la variété. Les espaces tangents sont indépendants les uns des autres, et la variété étant courbe, les cônes ne sont plus tous « alignés ». (Ici encore, deux dimensions spatiales étant supprimées, les cônes sont « plats ».) À droite : une courbe de genre temps (en rouge) reste toujours à l'intérieur de ses cônes de lumière (précisément, ses vecteurs vitesse sont tous de genre temps). Une courbe de genre lumière (en vert) est, intuitivement, sur les bords de ses cônes.

Remarque : Le vecteur vitesse d'une ligne d'univers dans l'espace-temps n'est pas la vitesse *dans l'espace* de l'objet qu'elle représente (il faudrait d'ailleurs dire par rapport à quel observateur) : ce vecteur est la vitesse de l'objet dans l'espace-temps, on parle de ***quadri-vitesse***. Ainsi, intuitivement, on peut dire qu'un objet « immobile » dans l'espace avance dans le temps.

Nous avons vu deux approches possibles des géodésiques : courbes de longueur minimale sur une variété munie d'une métrique riemannienne, courbe d'accélération nulle sur une variété avec une métrique quelconque. Mais, si sur une variété *lorentzienne* on sait définir la pseudo-longueur des vecteurs vitesse d'une courbe, on peut aussi en intégrer la valeur entre deux de ses points, comme pour avoir sa longueur.

La pseudo-longueur d'une courbe sur une variété lorentzienne, c'est l'intégrale de la pseudo-longueur de ses vecteurs vitesse entre ses extrémités.

La pseudo-longueur d'une courbe est donc la valeur moyenne des pseudo-longueurs des vecteurs vitesse de cette courbe, multipliée par la longueur de l'intervalle des paramètres utilisés pour en repérer les points. Qu'obtient-on alors dans le cas lorentzien ? Souvenez-vous de la relativité restreinte : pour une courbe de genre temps, la pseudo-longueur entre deux de ses points était le temps propre mesuré par un observateur dont cette courbe représente la ligne d'univers. La relativité générale devant généraliser cela (!), on garde l'interprétation ci-dessous.

L'espace-temps de la relativité générale est modélisé par une variété lorentzienne. Une courbe de genre temps représente la ligne d'univers d'un objet physique. Sa pseudo-longueur entre deux de ses points représente ***le temps propre***, mesuré par une horloge attachée à cet objet, écoulé entre ces deux points-événements.

Une géodésique de genre temps est alors aussi une courbe qui rend ***maximale*** *la pseudo-distance entre deux points, ou, physiquement, qui rend maximal le temps propre écoulé entre les deux événements correspondant à ces points.*

Sur une variété lorentzienne, on a donc encore un lien entre l'accélération nulle d'une géodésique et ses propriétés vis-à-vis de la pseudo-longueur. Mais une géodésique n'est plus le plus court chemin d'un point à un autre. C'est ainsi qu'on transpose le « paradoxe » des jumeaux à l'espace-temps courbe, car un individu qui « se laisse tomber » le long d'une géodésique entre deux événements vieillira plus qu'un voyageur empruntant un autre chemin spatio-temporel, sur lequel il y aura une accélération, entre ces mêmes événements.

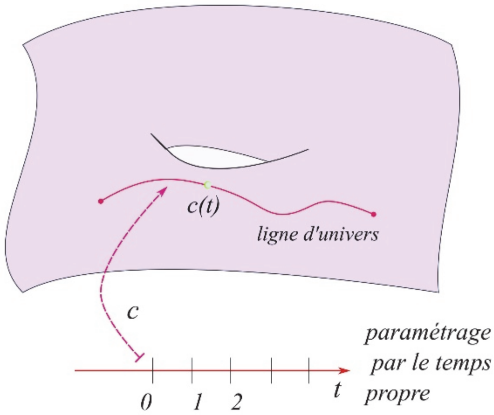


Figure 4.12. *Pseudo-longueur d'une ligne d'univers de genre temps.* La pseudo-longueur d'une ligne d'univers de genre temps entre deux points donne le temps propre écoulé entre les deux événements correspondants. On peut ainsi repérer chaque point d'une telle courbe par le temps propre écoulé depuis une origine choisie. *Les mathématiciens l'écrivent* $L(c) = \int_0^b |\dot{c}(t)|\, dt$*…*

(Pour les lecteurs exigeants : en toute rigueur, comme dans le cas riemannien, l'énoncé mathématique précis est un peu plus sophistiqué. Il faut dire : il existe autour de chaque point p une région (qui peut être toute la variété) où tout point qui peut être relié à p par une courbe de genre temps, peut aussi y être relié par une courbe de pseudo-longueur maximale, qui est alors une géodésique de genre temps. Pour des points au-delà de cette région, l'existence de cette géodésique maximale n'est pas garantie. Ainsi, une géodésique de genre temps est une courbe qui réalise *localement* le *maximum* de la pseudo-distance entre deux de ses points. Nous ne mentionnerons plus ces subtilités, importantes mais un peu techniques, car l'idée exposée ci-dessus est essentiellement ce qu'il faut retenir !).

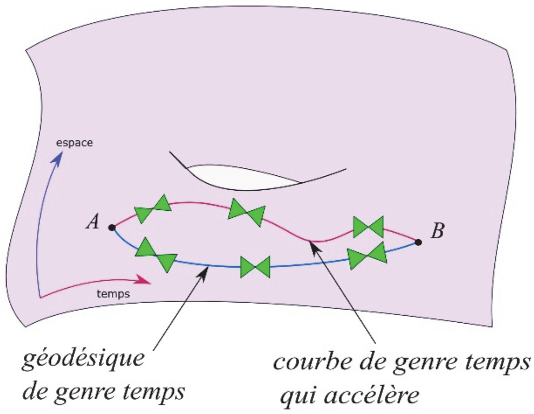


Figure 4.13. *Paradoxe des jumeaux dans l'espace-temps courbe.* Une métrique lorentzienne sur une variété va donner une géométrie contre-intuitive : la géodésique (bleue) de A à B est plus « longue » que la courbe qui accélère (rouge) joignant ces mêmes points. Pour prouver qu'une géodésique de genre temps est la plus longue des courbes de genre temps entre deux points donnés, on utilise l'inégalité triangulaire inversée de la relativité restreinte sur chaque espace tangent. On a représenté en vert des cônes de lumière : les vecteurs vitesse des courbes de genre temps sont, à chaque point, à l'intérieur du cône de lumière.

Attention : les dessins de variétés dans ce chapitre, présentées comme des surfaces (de dimension 2), représentent l'espace-temps *de dimension 4 ! Donc, sur ces dessins, 2 dimensions spatiales ont été supprimées ! Les courbes tracées sont des lignes d'univers dans un diagramme d'espace-temps dont une dimension est le temps. Il faut donc prendre ces figures avec un peu de recul, et d'abstraction, même si elles sont suggestives…*

Pour bien comprendre cette remarque, il est utile de reconsidérer les diagrammes d'espace-temps que nous avons vus en relativité restreinte dans le cadre des variétés courbes. En effet, l'espace-temps de la relativité restreinte est un cas particulier où, en l'absence de gravitation, la variété espace-temps est *plate* (c'est le terme mathématique !). Un espace affine est un cas particulier de variété, et on peut utiliser des représentations analogues à ce que nous avons fait pour les variétés courbes.

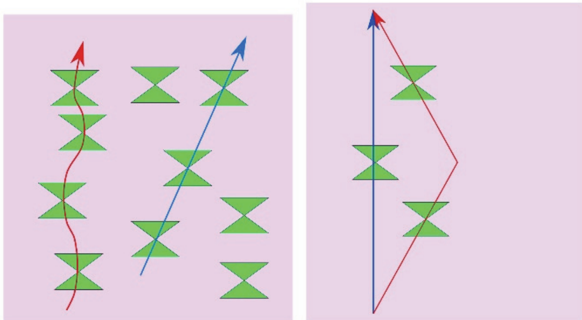


Figure 4.14. L'espace-temps plat de la relativité restreinte, où il n'y a pas de gravitation. On l'appelle l'espace-temps de Minkowski. Tous les cônes sont parallèles. En rouge, toujours à l'intérieur de ses cônes de lumière, une courbe de genre temps. En bleu, une *géodésique* de genre temps : dans l'espace-temps plat, une géodésique est une ligne droite. Mais attention : dans l'espace-temps de Minkowski, avec une métrique lorentzienne, une droite-géodésique de genre temps est le *plus long* chemin d'un événement à un autre ! C'est le paradoxe des jumeaux, représenté, comme sur une variété, sur la figure de droite.

Revenons aux pseudo-longueurs des courbes sur une variété lorentzienne. Les courbes de genre lumière ont des vecteurs vitesse de pseudo-longueur toujours nulle par définition ; *la pseudo-longueur d'une courbe de genre lumière ne peut être que nulle*. On peut définir la pseudo-longueur d'une courbe de genre espace, mais attention, cela ne correspond pas à une notion physique. C'est une des grandes subtilités de la relativité générale : il est très délicat de définir une distance correspondant à la notion intuitive, usuelle, de distance « spatiale » entre deux événements de l'espace-temps. En fait cette notion usuelle n'a plus vraiment de sens en relativité générale. *Seul* ***le temps propre****, pseudo-longueur d'une courbe de genre temps, garde une signification physique ; c'est la notion fondamentale.*

Ayant donc défini les géodésiques comme des courbes d'accélération nulle, on a alors, dans une variété lorentzienne, trois familles de géodésiques : les géodésiques de genre temps, qui *maximisent* la pseudo-longueur (c'est-à-dire le temps propre) entre deux points parmi les courbes de genre temps qui les joignent ; les géodésiques de genre lumière, courbes d'accélération nulle entre deux quelconques de leurs points, et qui sont de longueur nulle ; et les géodésiques de genre espace, d'accélération nulle aussi, mais qui n'ont plus de propriétés particulières vis-à-vis de la distance. Il n'est donc plus possible, et c'est un point important, de définir naturellement une distance sur une variété lorentzienne.

En résumé : *L'espace-temps est une variété de dimension 4, sur laquelle on définit une métrique lorentzienne. Chaque espace tangent de la variété, ou chaque mini-carte, est alors un modèle réduit de la relativité restreinte. On a des courbes de genre temps, lumière ou espace, et des géodésiques de genre temps, lumière ou espace, qui sont les courbes d'accélération nulle. Les géodésiques de genre temps* maximisent *la pseudo-distance (le temps propre donc) entre deux points ; ces géodésiques représentent les objets en « chute libre », c'est-à-dire soumis uniquement à la gravitation. Les géodésiques lumières représentent les photons, la lumière. Les géodésiques sont les courbes naturelles d'une variété lorentzienne.*

4.4 La courbure de l'espace-temps

Page 100 (légende de la figure 4.16)

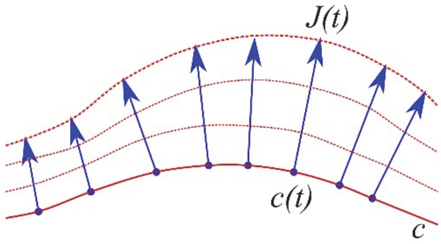


Figure 4.16. *L'évolution du vecteur séparation $\boldsymbol{J}(t)$ représente le mouvement relatif de deux particules*. On repère les géodésiques dans le voisinage d'une géodésique donnée $c(t)$ par un champ de vecteurs de Jacobi $\boldsymbol{J}(t)$ le long de c. L'évolution de $\boldsymbol{J}(t)$ au fil de la courbe $c(t)$ est mesurée par la courbure. **Le mouvement relatif des particules est donc dicté par la courbure**. Dans un livre de maths, ça ressemble à : si $\boldsymbol{J}$ est un champ de Jacobi le long de la géodésique γ, alors $\boldsymbol{J}$ vérifie l'équation de déviation géodésique : $\boldsymbol{\nabla}^2_{\partial t}\boldsymbol{J}(t) - \boldsymbol{R}\big(\dot{\gamma}(t), \boldsymbol{J}(t)\big)\dot{\gamma}(t) = 0$, où $\boldsymbol{R}$ est la courbure… Là aussi, cette formule est à apprécier comme un tableau. L'influence de la courbure sur les géodésiques voisines permet de définir les **forces de marée**, c'est-à-dire les effets de la variation de la gravitation d'un point à un autre de l'espace-temps.

Page 102, dernier paragraphe

La façon la plus profonde de définir la courbure, et qui est celle traditionnellement utilisée dans les ouvrages de mathématiques, consiste à regarder comment évolue un vecteur tangent à la variété que l'on déplace parallèlement à lui-même le long d'une petite courbe fermée. Définir ce que signifie parallèlement à lui-même nécessite l'utilisation de la métrique, pour exprimer que le vecteur ne tourne pas au sein de la variété, même si la variété est tordue. Si la variété est courbée, le vecteur ne terminera pas sa boucle dans la même position qu'au départ. Bien que moins parlante physiquement, cette approche mène à une définition de la courbure plus efficace dans de nombreux problèmes mathématiques. Voir la figure 4.17.

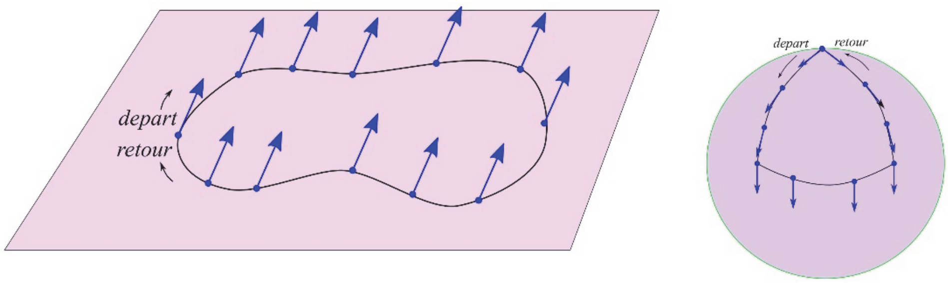


Figure 4.17. *Courbure et promenade d'un vecteur tangent*. Si on translate un vecteur parallèlement à lui-même le long d'une boucle sur une surface plate, on revient sur le même vecteur. En revanche, sur une surface courbée, on revient sur un vecteur différent. C'est une autre façon de définir la courbure d'une variété. Voire l'annexe.

4.6 Visualiser l'espace-temps courbe

L'illustration classique… et ses limites

L'illustration classique de la relativité générale, que l'on trouve dans tous les livres de vulgarisation sur le sujet, est l'image d'un drap sur lequel est posée une boule de bowling. Le drap représente l'espace-temps, et la boule de bowling une planète ou une étoile. La boule, par sa masse, déforme le tissu, lui donnant donc une géométrie différente de l'aspect plat, affine, qu'il aurait s'il était vide. Les corps libres qui passent à proximité de la boule étoile suivent alors les géodésiques du tissu, qui ne sont plus les lignes droites d'un tissu plat. Remarquons tout de suite que, puisqu'on considère le poids de la boule, on explique ainsi la gravitation par la gravitation ! Explorons quand même cette image de la théorie d'Einstein puisqu'elle est assez parlante, avant d'en expliquer les lacunes.

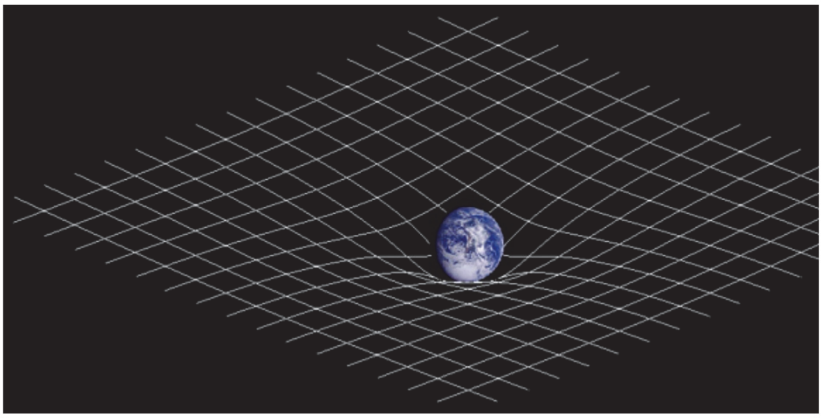


Figure 4.18. Illustration « classique » de la relativité générale, qui explique la gravitation par… la gravitation !

Signalons que les corps libres eux-mêmes déforment le tissu espace-temps par leur masse. Mais on suit une procédure absolument classique en physique : les calculs de la courbure et des géodésiques de l'espace-temps dues à la seule boule-étoile sont déjà tellement difficiles, qu'on considère que les déformations dues aux petits corps libres à proximité sont négligeables. De même, les systèmes d'étoiles binaires, c'est-à-dire deux étoiles proches tournant l'une autour de l'autre, sont très fréquents dans l'univers. Les calculs de la géométrie de l'espace-temps autour de ces systèmes ont également été réalisés, et sont très difficiles. Là encore, lorsque l'on cherche la trajectoire de petits corps libres autour de ces systèmes binaires, petites planètes, gaz de matière, ou hypothétique voyageur intersidéral, on en néglige l'influence en ne considérant que la géométrie due à la seule présence du système binaire. Et là encore on suppose que ces petits corps libres suivent les géodésiques de l'espace-temps dont la géométrie est celle due au seul système « central » et dont on étudie l'influence.

Ce type d'illustration, bien que très séduisant et intuitif, présente néanmoins d'importantes limitations. Tout d'abord, elles suggèrent que c'est l'espace, au sens classique du terme, qui est déformé. Mais en fait c'est l'espace-temps, donc en particulier aussi le temps, qui est déformé par la présence de masse-énergie. Au début d'ailleurs, Einstein lui-même, au cours de ses recherches, pensait que seul l'espace était courbé. Mais c'est bien l'espace-temps tout entier qui est déformé, d'où la limite des dessins, *qui ne présente pas la dimension temporelle, déformée, de l'espace-temps…*

Par ailleurs, ces dessins laissent penser que l'espace-temps est déformé, courbé, à l'intérieur d'un espace plus grand. Or, c'est là la force fondamentale de la notion de variété, on peut parler de courbure d'une variété de manière purement intrinsèque, c'est-à-dire sans faire référence à un quelconque espace ambiant. L'espace-temps est courbé « en lui-même », il n'y a pas, a priori, d'espace « autour de l'univers ».

Enfin, il est absurde de représenter la boule touchant le drap, car on fait alors croire que c'est le « poids » classique de la boule qui déforme le drap, et on n'a rien gagné. Pour la relativité générale, c'est la « présence » de la boule qui déforme le drap. On la représente donc souvent « au-dessus » du drap, ***mais cette représentation demeure incorrecte, car il faut***

comprendre que la boule, la planète ou l'étoile qu'elle représente, fait* partie *de l'espace-temps.

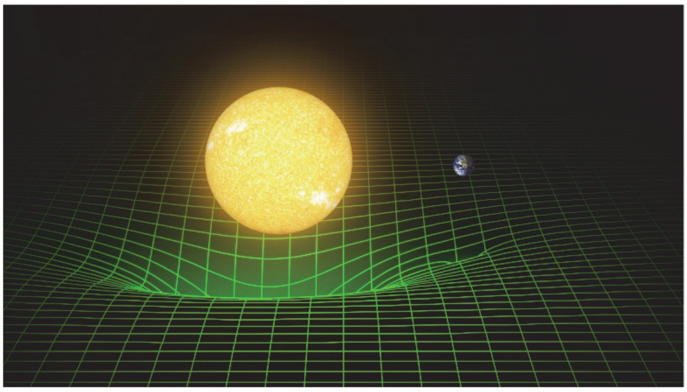


Figure 4.19.

Malgré ces limites, ces dessins donnent pourtant une bonne image de l'idée fondamentale de la théorie. Mais, bien qu'ils soient jolis et évocateurs, gardons à l'esprit les limitations de ces figures et en particulier le fait qu'il y manque la déformation du temps, absolument fondamentale pour obtenir une modélisation correcte de la gravitation. Nous verrons à la section suivante un autre type de diagramme, plus pertinent, basé sur les cônes de lumière. Mais il existe aussi un autre type de schéma qui peut rendre rigoureux, dans des cas particuliers, les schémas basés sur un tissu élastique.

Les diagrammes de plongement

Ce type de schéma a été popularisé par Kip Thorne, dans son livre « Trous noirs et distorsion du temps », et repris de manière particulièrement claire par Jean-Pierre Luminet dans son très beau livre « Le destin de l'univers ». Nous reproduisons ici leurs explications. On considère une masse parfaitement sphérique, modélisant une étoile ou une planète,

et qui ne varie pas au cours du temps. L'espace-temps est alors dit « statique », ce qui signifie que sa géométrie spatiale reste identique à elle-même à chaque instant. On aimerait comprendre la géométrie d'espace-temps, à un instant fixé, d'une « tranche » équatoriale, bidimensionnelle, passant par le centre de la sphère. La géométrie de notre espace-temps étant à symétrie sphérique et statique on ne perd alors aucune information. L'idée est alors de visualiser cette tranche spatiale de dimension 2 en la ***plongeant*** dans un espace euclidien à trois dimensions fictif, sans aucune réalité physique, servant uniquement à « encadrer » l'espace-temps sectionné.

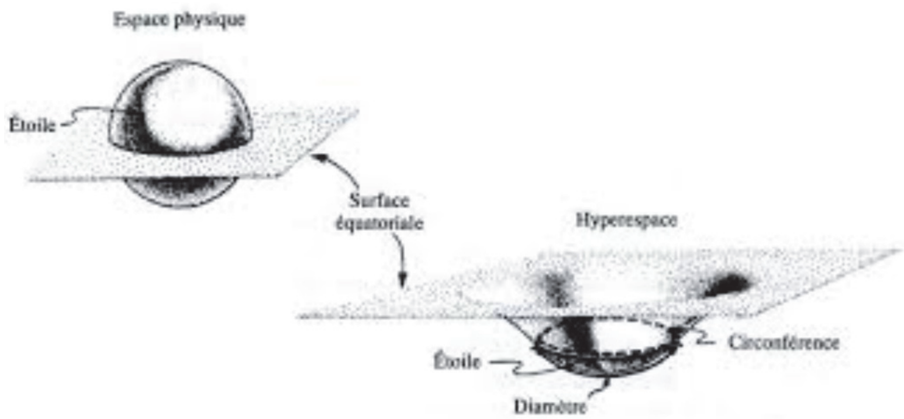


Figure 4.20. Illustration extraite du livre de Kip Thorne.

On retrouve une forme qui évoque celle d'un tissu élastique déformé. Mais insistons sur le fait qu'il s'agit de la représentation de la géométrie d'un « instantané » de la tranche d'espace-temps passant par le centre de la sphère, visualisé dans un espace à trois dimensions sans aucune réalité physique. Elle fait apparaître une région extérieure s'étendant à l'infini, et une région intérieure à l'étoile.

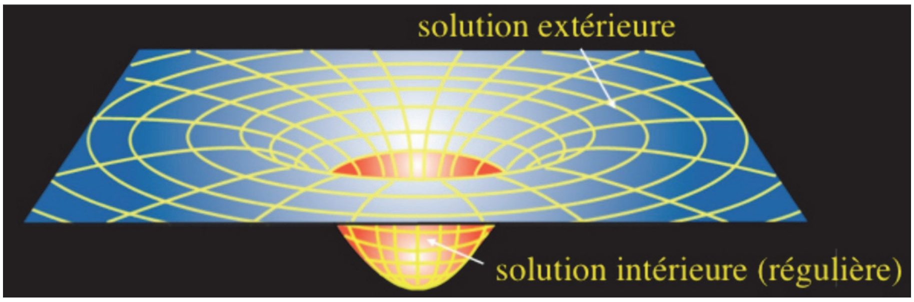


Figure 4.21. Illustration extraite du livre de Jean-Pierre Luminet.

On peut alors faire figurer sur cette surface l'allure qu'aurait la *projection* des trajectoires géodésiques de divers objets confinés à ce plan équatorial, notant encore une fois que la tranche est un instantané, alors que les trajectoires marquent évidemment des positions successives au cours du temps.

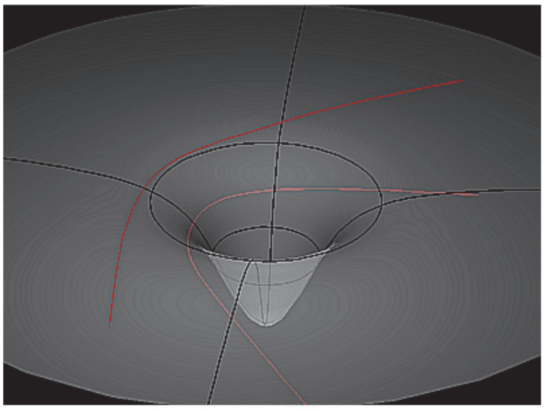


Figure 4.22. La tranche équatoriale de l'espace-temps créé par uns sphère, sur laquelle on projette quelques trajectoires géodésiques : En rouge, les trajectoires géodésiques de petits corps libres passant à proximité d'une grosse masse. En noir, des orbites stables, et des objets qui s'écrasent…

L'effet Einstein

Il faut donc comprendre que la lune, ou les satellites artificiels, suivent les géodésiques de l'espace-temps déformé par la terre, et que leurs orbites ne sont des ellipses que dans l'espace *perçu* par un observateur terrestre, c'est-à-dire lorsque l'on projette leurs lignes d'univers sur une « tranche spatiale » de l'espace-temps. Plus exactement, on peut définir comme en relativité restreinte, l'espace de simultanéité d'un observateur, qui correspond intuitivement à l'espace de cet observateur à un moment donné. Si à chaque instant, un observateur terrestre note sur son espace de simultanéité instantané les positions successives d'un satellite ou de la lune, il verra se dessiner sur celui-ci une ellipse. On peut donner un sens rigoureux à cela, et l'on retrouve bien des orbites elliptiques, mais la façon correcte de voir est de regarder dans l'espace-temps de dimension 4.

Retenons qu'il est fondamental de noter qu'une masse, comme une planète, une étoile, ou un trou noir, modifie « l'écoulement » du temps autour d'elle *car elle modifie la courbure de l'espace-temps, et donc l'allure des géodésiques de genre temps.*

Considérons ainsi deux observateurs munis de chronomètres identiques, l'un proche de la surface d'un trou noir (ou de toute autre masse) et l'autre très éloigné. Supposons que les deux observateurs sont immobiles l'un par rapport à l'autre. Si l'observateur près du trou noir émet des flashs lumineux toutes les secondes, *mesurées sur son chronomètre*, l'observateur lointain les verra lui parvenir séparés par un intervalle de temps, *mesuré sur son propre chronomètre*, beaucoup plus grand : plusieurs minutes, heures, jours, pourront séparer pour l'observateur lointain l'arrivée des flashs, l'intervalle étant d'autant plus grand que le champ gravitationnel, donc la courbure, est intense à l'endroit de l'émission des flashs. L'intervalle de temps deviendrait « infini » si les flashs étaient émis depuis la surface d'un trou noir. Pour l'observateur lointain, le temps de l'émetteur semble ralenti ; il s'agit d'un effet de dilatation des durées dû à la gravité. On l'appelle ***l'effet Einstein***.

Ceci est parfaitement vérifié et utilisé par exemple dans le système GPS, qui serait complètement inexploitable si on ne tenait pas compte de cet effet relativiste de dilatation des durées entre le satellite en orbite et le récepteur au sol dans votre voiture.

C'est aussi l'explication des différences de vieillissements des personnages du film « Interstellar » : les voyageurs partant explorer une planète près d'un trou noir se retrouvent dans un champ de gravité beaucoup plus fort, et vieillissent donc *moins vite* que leur camarade resté en orbite, au loin. De plus, ce camarade suit une géodésique, l'orbite de chute libre de sa station autour du trou noir, ce qui tend également à le faire vieillir plus vite que les explorateurs parcourant dans leur fusée une courbe qui accélère ; c'est le « paradoxe » des jumeaux, exprimant que la géodésique rend maximum le temps propre écoulé entre deux événements (départ et retour des explorateurs).

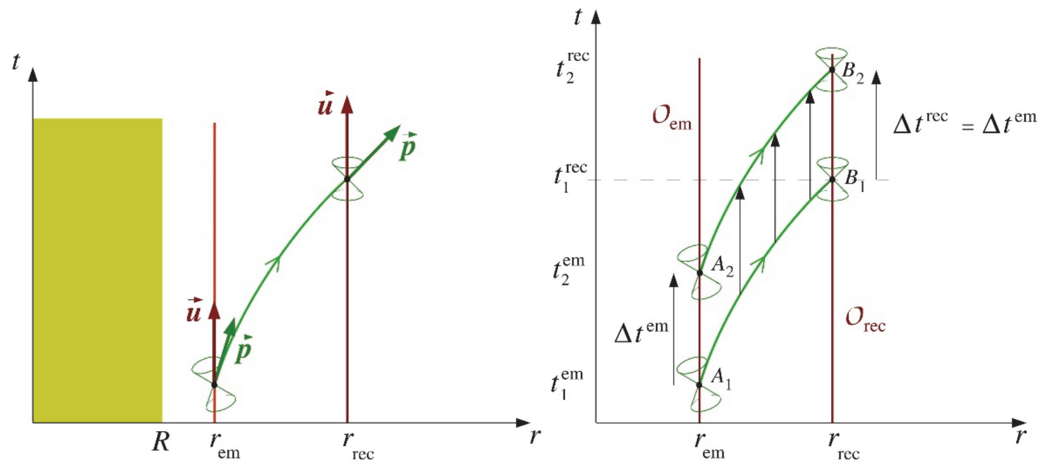


Figure 4.23. *Schémas de la démonstration de l'effet Einstein*. À gauche, tube d'univers de l'étoile en jaune, et lignes d'univers de deux observateurs à des distances r_{em} (rayon émission) et r_{rec} (rayon réception). Le cône de lumière le plus près de l'étoile est incliné vers l'étoile du fait de la courbure qu'elle engendre. Le rayon lumineux (la géodésique lumière) émis est déformé par cette courbure. À droite, le résultat de la mesure du temps propre écoulé pour *chaque observateur* entre émissions et réceptions de signaux consécutifs : pour des raisons de symétries, les *coordonnées* utilisées dans ces schémas d'espace-temps sont telles que $\Delta t^{rec} = \Delta t^{em}$. Mais si l'on calcule *avec la métrique* le temps propre $\Delta\tau_{em}$ écoulé entre A_1 et A_2 d'une part, et le temps propre $\Delta\tau_{rec}$ entre B_1 et B_2 d'autre part, on trouve que $\Delta\tau_{rec} > \Delta\tau_{em}$. Il s'agit d'un phénomène de dilatation (ou contraction) des temps au sens suivant : si $\Delta\tau_{em}$ est le temps entre deux tics successifs de l'horloge de $\mathcal{O}_{em}$ et qu'il informe l'observateur $\mathcal{O}_{rec}$ en émettant un signal radio à chaque tic, l'observateur $\mathcal{O}_{rec}$ perçoit un intervalle de temps propre $\Delta\tau_{rec}$ entre chaque réception de ces signaux strictement supérieur à $\Delta\tau_{em}$.

Chapitre 5 : Singularités

5.2. Trous Noirs

Page 142 (légende de la figure 5.9)

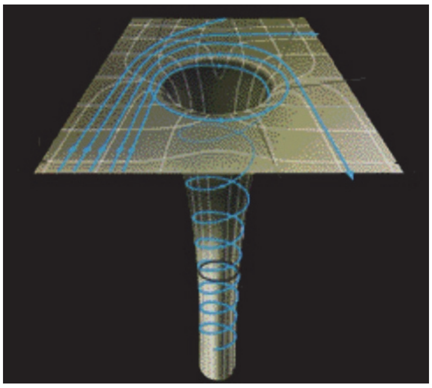


Figure 5.9. En bleu, les trajectoires de quelques photons, sur un diagramme de plongement d'un trou noir. C'est le fait que certains d'entre eux fassent des quarts de tours, ou parfois plusieurs tours, avant de partir en direction de l'observateur qui explique la déformation des images des objets situés en « arrière-plan » du trou noir. Malgré les limitations de ce type de schéma évoquées au chapitre précédent, celui-ci suggère néanmoins efficacement le fait que le rayon du trou noir, distance du bord à un hypothétique centre, peut être vu comme infini.

Annexe, Géodésiques

A.1.5. Les géodésiques, la pseudo-longueur d'une courbe

[...] On appelle cette dérivée, ***la connexion de Levi-Civita*** de la métrique. Pour une métrique $\mathfrak{g}$ sur une variété $\mathcal{M}$, cette dérivée se note souvent $\boldsymbol{\nabla}$. *L'accélération* d'une courbe, c'est la dérivée de sa vitesse, c'est-à-dire plus précisément la dérivée de la fonction qui a chaque point de la courbe associé le vecteur vitesse en ce point. Si on note γ une courbe sur la variété, on note $\gamma^{\cdot}$ son vecteur vitesse, et $\boldsymbol{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma$ son accélération. En géométrie différentielle, les notations deviennent vite compliquées…

Dans un livre de mathématiques, cela ressemble à :

Une courbe $\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$ est une ***géodésique*** de $(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$ si son accélération est nulle pour tout $t \in (a, b)$:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma(t) \equiv 0.$$

Soit $\mathcal{U}$ le domaine d'une carte de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$. Une courbe γ dans $\mathcal{U}$ est une géodésique de $\mathcal{M}$ si et seulement si ses fonctions coordonnées $x^k \circ \gamma$ vérifient

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum\nolimits_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma)\frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt}\frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

pour $1 \leq k \leq n$, où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion $\boldsymbol{\nabla}$ dans $\mathcal{U}$.

Mesurer la (pseudo-)longueur d'une courbe est une procédure très classique en mathématiques. La courbe étant paramétrée par un nombre t, on intègre la mesure de son vecteur vitesse entre les deux valeurs extrêmes de son paramètre.

Si $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ est une courbe, la pseudo-longueur de γ est $\boldsymbol{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| dt$.

Bibliographie

Ajout de 2 références

Luminet J.-P. *Le destin de l'univers : Trous noirs et énergie sombre*, Fayard, 2006.
Thorne K. *The science of Interstellar*. W. W. Norton & Co., 2014.