

Note de lecture

Livre de D. Bouche et W. Weens

Le livre de D. Bouche et W. Weens étudie les schémas numériques pour les équations aux dérivées partielles avec un point de vue peu souvent présent dans la littérature classique, laquelle est pourtant gigantesque.

Leur observation de départ est le double constat que (i) l'analyse numérique classique des schémas établit la convergence (quand les paramètres de discrétisation tendent vers zéro) des schémas vers la solution exacte des équations, en estimant de manière qualitative la distance entre solution numérique et solution exacte, et que (ii) cette estimation est souvent menée dans des conditions de régularité (notamment de la donnée initiale de l'équation) très exigeantes et parfois loin des applications réelles de ces schémas. S'il est en effet capital de certifier un schéma sur des cas simples et réguliers, et c'est par cette certification que se distingue une approche professionnelle de la simulation numérique d'une approche plus "artistique", il est aussi fréquent, même pour les meilleurs experts, de "croiser les doigts" pour que la validité de l'analyse dépasse le cadre restreint où elle a été menée et s'applique à la diversité des situations rencontrées en pratique.

Pour compléter cette analyse, les auteurs s'attellent à ne plus seulement "estimer" mais plutôt "regarder dans le blanc des yeux" la solution exacte du schéma numérique elle-même et, sinon la calculer exactement quand c'est possible, au moins en construire des approximations dans certains régimes, et ce précisément pour des conditions où les hypothèses de régularité habituelles de l'analyse classique sont violées. Le comportement des schémas pour des données initiales en forme de masse de Dirac (autant dire le scénario le plus défavorable possible quant à la régularité des données) ou de marche d'escalier (un scénario à peine plus indulgent) est ainsi disséqué. Les auteurs baptisent cette approche "analyse quantitative" pour la différencier de l'analyse numérique classique, elle, plus qualitative.

Quand déterminer la solution exacte du schéma numérique (ou une de ses approximations) est possible, les auteurs peuvent comparer le comportement réel de cette solution avec celui prévu par d'autres méthodes d'analyse (équation équivalente, analyse de Fourier). Ils peuvent ainsi à la fois expliquer par la combinaison des analyses le comportement du schéma et aussi évaluer la confiance à avoir dans les conclusions des méthodes d'analyse, lorsque, dans d'autres situations, la solution exacte du schéma numérique sera hors de portée et seule la mise en oeuvre du schéma sur ordinateur sera disponible. Ce programme de pensée est ainsi parfaitement mis en exemple sur le cas de l'équation d'advection linéaire monodimensionnelle.

Pour démontrer les potentialités multiples de ce point de vue, les auteurs étudient aussi (plus rapidement) d'autres équations, et dans éventuellement d'autres dimensions d'espace.

Le style de l'ouvrage est résolument pédagogique. Certains passages de développement des arguments (ou l'interprétation de certaines figures d'illustration) peuvent demander une concentration certaine du lecteur mais tous les éléments (notamment dans deux annexes sur les fonctions spéciales utilisées pour la résolution exacte des schémas et les développements asymptotiques de ces fonctions) sont fournis pour l'aider dans son apprentissage.

L'ensemble de l'analyse menée forme un traité de mathématiques appliquées allant au-delà des sentiers battus de la littérature, qui intéressera un large public, allant des étudiants des cycles M et D en mathématiques appliquées ou sciences de l'ingénieur (en tout cas ceux d'entre eux ayant déjà assimilé les techniques de l'analyse numérique classique) aux experts les plus pointus. Il n'est pas étonnant que le binôme d'auteurs de ce traité particulièrement original soit constitué d'un expert reconnu des schémas aux différences épaulé par un jeune informaticien talentueux, tous les deux spécialistes de la mise en oeuvre pratique des méthodes dans des situations réelles, singulièrement non académiques et redoutablement exigeantes.

Claude Le Bris
Ecole des Ponts & Inria Paris
3 avril 2024