

Table des matières

5 Application II : La compression de spin et ses limites, et les états chats de Schrödinger	537
5.1 Introduction	537
5.1.1 Principe d'une horloge atomique	537
5.1.2 Le bruit quantique standard	538
5.1.3 Les états comprimés	540
5.1.4 Quelques points à approfondir	540
5.1.5 Objectifs du présent chapitre	541
5.1.5.1 Un spin géant grâce aux condensats...	541

5.1.5.2	... mais un problème multimode	542
5.2	Compression dans le modèle de Kitagawa-Ueda	543
5.2.1	Position du problème	543
5.2.2	Solution des équations du mouvement opératorielle	544
5.2.3	Représentation bosonique et états de phase	545
5.2.4	Spin moyen, brouillage et résurgence, chat de Schrödinger	547
5.2.5	Variances et covariances de spin	548
5.2.6	Optimisation de $\Delta S_{\perp, \min}$ sur le temps	550
5.2.6.1	Une première échelle de temps	551
5.2.6.2	Une seconde échelle de temps	552
5.2.7	Optimisation de $\xi^2(t)$ sur le temps	553
5.3	Effet d'un environnement aléatoire stationnaire déphasant	556
5.3.1	Motivation et présentation du modèle	556
5.3.2	Fluctuations de Larmor et facteur de compression du spin	557
5.3.3	Quelle loi d'échelle pour les fluctuations de Larmor aux grands N ?	559
5.3.4	Optimisation de la compression sur le temps	559
5.3.4.1	Ce à quoi on peut s'attendre	559
5.3.4.2	Analyse à la première échelle de temps	560
5.3.4.3	Analyse à la seconde échelle de temps	561
5.3.4.4	D'un régime à l'autre : compétition entre bruit et limite thermodynamique	563
5.4	Mise en œuvre dans des condensats atomiques gazeux dans l'ap- proximation à deux modes	564
5.4.1	Dynamique non linéaire dans le cas homogène	566
5.4.2	Dynamique non linéaire dans le cas piégé	568
5.4.2.1	Modes ϕ_{σ} stationnaires	568
5.4.2.2	Modes ϕ_{σ} instationnaires, difficultés et échappa- toire	571
5.4.3	Conséquences physiques des hamiltoniens modèles (5.114) et (5.127) et des fluctuations de N	572
5.5	Étude réaliste et multimode des limites de la compression de spin dans des condensats atomiques gazeux	575
5.5.1	Considérations simples et effet des pertes	575
5.5.1.1	Motivations et un calcul heuristique de la limite de compression avec les opérateurs phases $\hat{\theta}_{\sigma}$	575
5.5.1.2	Effet des pertes de particules dans le cas $g_{aa} = g_{bb}$ et $g_{ab} = 0$	578
5.5.2	L'étude multimode par Bogolioubov proprement dite	584
5.5.2.1	Description de la configuration et de la procédure expérimentale	584

5.5.2.2	Comment mener le calcul : contextualisation de la méthode de Bogolioubov, équation d'évolution des variables $\hat{b}_{\sigma k}$, $\hat{b}_{\sigma k}^\dagger$ et $\hat{\theta}_{\sigma\bar{\phi}}$ et leurs valeurs à $t = 0^+$	587
5.5.2.3	Les observables à $t > 0$ participant de la compression de spin	593
5.5.2.4	Le résultat final sur le facteur de compression de spin	603
5.5.2.5	Que se passe-t-il aux temps longs $t > 1/\gamma_{\text{coll}}$? Limite ergodique	605
5.5.3	Complément : effet du branchement de l'interaction sur un gaz condensé	611
5.5.4	Application de la théorie multimode au cas spatialement homogène	613
5.5.4.1	L'optimum de compression	613
5.5.4.2	La dépendance temporelle du facteur de compression	616
5.5.5	Application de la théorie multimode au cas piégé : la limite de la compression de spin dans un piège harmonique isotrope par BKW	622
5.5.5.1	Motivation, formulation du problème, limite macroscopique	622
5.5.5.2	Approximation BKW pour les modes de Bogolioubov	625
5.5.5.3	Interprétation classique	627
5.5.5.4	La condition de quantification BKW des niveaux d'énergie	631
5.5.5.5	Justification du coefficient de réflexion (-i) des ondes BKW aux points de rebroussement	633
5.5.5.6	Mise en œuvre de BKW dans le calcul de ξ_{opt}^2	637
5.5.6	Complément : calcul des intégrales semi-classiques I, J, K	641
5.5.6.1	Cas $1 < 2j - 1 < \tilde{\epsilon} < j^2$: trajectoires externes	642
5.5.6.2	Cas $0 < j^2 < \tilde{\epsilon}$: trajectoires hybrides	643
5.5.7	Complément : calcul de χ_{Bog} , valeurs de \hat{D} et de sa variance, expression de $\hat{C}_{\text{osc}}(t)$ dans le cas homogène	644
5.5.7.1	Calcul de χ_{Bog}	645
5.5.7.2	Une retombée : valeur de l'opérateur \hat{D} et de sa variance	647
5.5.7.3	Une autre retombée : expression de l'opérateur $\hat{C}_{\text{osc}}(t)$ dans le cas spatialement homogène	648
5.6	États chats de Schrödinger et résurgence de phase	650
5.6.1	À la mi-temps entre brouillage et résurgence	650
5.6.2	Les prédictions du modèle à deux modes de Kitagawa-Ueda	652

5.6.3	Comment tirer parti de l'état chat de Schrödinger dans une expérience d'horloge?	654
5.6.4	Effet des pertes de particules	656
5.6.4.1	Fidélité au chat de Schrödinger	657
5.6.4.2	Résurgence du spin moyen	659
5.6.5	Effet d'une température initiale non nulle : analyse multimode dans l'approximation de Bogolioubov	662
5.6.5.1	Motivation	662
5.6.5.2	Protocole multimode proposé	662
5.6.5.3	Évolution sur une réalisation de l'expérience	663
5.6.5.4	Fidélité au chat de Schrödinger spinoriel	667
5.6.5.5	Contrainte sur la température dans une expérience	671
5.6.5.6	Une belle estimation-minoration	672
5.6.5.7	Fidélité au chat de Schrödinger orbito-spinoriel	675
5.6.5.8	Résurgences du spin moyen à $T \neq 0$	675
6	Cohérence temporelle d'un condensat dans un gaz isolé : brouillage de phase dû aux fluctuations des quantités conservées et diffusion de phase due aux interactions entre les quasi-particules	681
6.1	Introduction, motivations, vue d'ensemble et mesurabilité	681
6.1.1	Un parallèle entre cohérence spatiale et cohérence temporelle : condensation dans l'espace-temps	681
6.1.2	Objectif et vue d'ensemble; brouillage contre diffusion	683
6.1.3	Un problème peu étudié	686
6.1.4	Une fonction de cohérence $g_1(t)$ mesurable	687
6.2	Définition du problème, sa réduction à la dynamique de phase et les résultats centraux sur $g_1(t)$	688
6.2.1	L'état du système	688
6.2.2	Quelques simplifications : omission des fluctuations de \hat{n}_ϕ , approximation gaussienne	689
6.2.3	Réduction à l'ensemble microcanonique : fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$, variance du déphasage, coefficient de diffusion D et temps de retard t_0	691
6.2.4	Fonction $g_1(t)$ dans l'ensemble statistique généralisé; étalement balistique de coefficient A	694
6.2.5	Résultats explicites sur A , D , t_0 et la variance du déphasage	696
6.2.5.1	Résultats sur A	696
6.2.5.2	Résultats sur D et t_0	698
6.2.6	Conséquences sur l'étalement du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$	701
6.3	Calcul de la fonction de corrélation $C(t)$ de $d\hat{\theta}/dt$	702
6.3.1	Vue d'ensemble	702
6.3.1.1	Tout repose sur $C(t)$	702

6.3.1.2	Tout se ramène au microcanonique	704
6.3.1.3	Une décorrélation évidente... mais fausse!	705
6.3.2	Dans l'ensemble microcanonique par équations cinétiques	706
6.3.2.1	Position du problème	706
6.3.2.2	Les équations cinétiques	708
6.3.2.3	Leur linéarisation, leur solution stationnaire	709
6.3.2.4	L'expression formelle de $C_{mc}(\tau)$	711
6.3.2.5	Dans le sous-espace des fluctuations de moment cinétique nul	717
6.3.2.6	Dépendance en temps de C_{mc}	718
6.3.2.7	Complément : comportement de $C_{mc}(\tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$	720
6.3.3	Dans un ensemble statistique généralisé à N fixé	723
6.3.3.1	Ce qui ressemble au cas microcanonique	723
6.3.3.2	Ce qui diffère du cas microcanonique	724
6.3.4	La valeur de $C(+\infty)$: ergodicité quantique contre équation pilote markovienne	727
6.3.4.1	Par ergodicité quantique c'est-à-dire microcano- nicité des états propres	727
6.3.4.2	Échec de l'approximation de Bogolioubov sur les états propres	729
6.3.4.3	Échec de l'équation pilote markovienne	731
6.4	Études complémentaires et vérificatoires de la fonction $g_1(t)$ dans l'ensemble microcanonique	733
6.4.1	Simulations numériques de champ classique	734
6.4.2	Méthode de la résolvante	736
6.4.2.1	Position du problème	736
6.4.2.2	Lien de $g_{\theta,\lambda}(t)$ avec une amplitude de probabilité de présence dans $ \psi_\lambda\rangle$	737
6.4.2.3	Un raisonnement simple par règle d'or de Fermi	738
6.4.2.4	Au-delà de la règle d'or de Fermi : la méthode de la résolvante	741
6.4.2.5	La diffusion de phase résulte de l'existence d'un pôle	745
6.4.3	Complément : égalité des coefficients de diffusion issus de la règle d'or et de la résolvante aux temps extensivement longs	745

7 Une formulation grand-canonique de la méthode de Bogolioubov et calcul de l'énergie de l'état fondamental à l'ordre de Wu 747

7.1	Introduction, motivation et avantages grand-canoniques	747
7.2	Hamiltonien modèle et méthode de développement	750

7.2.1	L'hamiltonien grand-canonique du modèle sur réseau . . .	750
7.2.2	Élimination du mode du condensat	751
7.2.2.1	Une procédure bien rôdée...	751
7.2.2.2	... mais que vaut N ?	752
7.3	À l'ordre deux en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: l'ordre de Bogolioubov	754
7.3.1	L'hamiltonien quadratique et sa forme réduite	754
7.3.2	L'équation d'état grand-canonique et la fraction non condensée	756
7.4	À l'ordre quatre en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: l'ordre de Wu pour le niveau d'énergie fondamental	760
7.4.1	Motivation	760
7.4.2	Correction de portée effective de l'interaction à l'ordre de Bogolioubov	761
7.4.3	L'hamiltonien grand-canonique à l'ordre $(f_{\text{nc}}^{1/2})^4$	763
7.4.4	Correction au grand potentiel de Bogolioubov à $T = 0$. . .	764
7.4.4.1	Une application de la théorie des perturbations . .	764
7.4.4.2	Passage à la limite continue $b/\xi \rightarrow 0$	768
7.4.4.3	Introduction de l'hypervolume de diffusion à trois corps	769
7.4.4.4	Résultat final à l'ordre f_{nc}^2	772
7.4.4.5	Discussion critique du résultat	773
7.4.5	Complément I : Correction $\Omega^{(4)}(\mu)$ au grand potentiel de Bogolioubov à la limite continue $b/\xi \rightarrow 0$ du modèle sur réseau	775
7.4.5.1	Partie convergente C_{conv}^{Ω} , partie divergente $J_{\mathcal{V}}(\epsilon)$.	775
7.4.5.2	Étude de $J_{\mathcal{V}}^{(1)}(\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$	777
7.4.5.3	Étude de $J_{\mathcal{V}}^{(2)}(\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$	779
7.4.5.4	Conclusion sur $\Omega^{(4)}(\mu)$	782
7.4.6	Complément II : Hypervolume de diffusion à trois corps D du modèle sur réseau dans le régime de Born	782
7.4.6.1	L'hamiltonien modèle	783
7.4.6.2	Forme de l'état de diffusion : seule fonction inconnue $f(\mathbf{r})$	783
7.4.6.3	Une équation fermée sur $\hat{f}(\mathbf{k})$	785
7.4.6.4	Développement de Born de la partie régulière $\phi(\mathbf{k})$ de $\hat{f}(\mathbf{k})$	786
7.4.6.5	Le résultat cherché	789
7.4.7	Appendice au complément II de la section 7.4.6	789
7.4.7.1	Développement de $A(\mathbf{k}_1)$	789
7.4.7.2	Développement de $B(\mathbf{k}_1)$	790
7.4.7.3	Développement de $J(\mathbf{k}_1)$	790
7.4.7.4	Développement de $K(\mathbf{k}_1)$	792

8	Cas de la dimensionalité réduite : étude des quasi-condensats par la méthode de Bogolioubov en représentation phase-module	795
8.1	Brève présentation et vue d'ensemble	795
8.1.1	Plus qu'un pâle reflet des condensats, les quasi-condensats	795
8.1.2	Quel angle d'attaque théorique?	796
8.1.3	En prise directe sur les expériences	797
8.2	Position du problème et régime considéré	799
8.2.1	À l'équilibre thermique grand-canonique	799
8.2.2	Les quasi-condensats en six conditions	800
8.3	Défrichage de la dimensionalité réduite avec la méthode de Bogolioubov ordinaire	802
8.3.1	La densité non condensée	803
8.3.1.1	Discussion selon la dimensionalité	804
8.3.1.2	À propos du tableau 8.1	805
8.3.1.3	Moralité sur la longueur de cohérence	806
8.3.2	La fonction de distribution de paires	806
8.3.2.1	Contribution quantique, contribution thermique .	807
8.3.2.2	Moralité sur les fluctuations de densité	808
8.3.3	En conclusion du défrichage	809
8.4	Construction de l'hamiltonien modèle	809
8.4.1	Longueur de diffusion et matrice T à basse énergie en dimension quelconque	809
8.4.1.1	Motivation et définition opérationnelle	809
8.4.1.2	Modèle de portée nulle à basse énergie	811
8.4.1.3	Quelques particularités de la dimension un	814
8.4.2	Modèle sur réseau : pas, constante de couplage et hamiltonien	816
8.4.2.1	Le modèle	816
8.4.2.2	La constante de couplage nue g_0 via la matrice T .	817
8.4.2.3	Constante g_0 , longueur de diffusion et portée effective à 3D	819
8.4.2.4	Constante g_0 , longueur de diffusion et portée effective à 2D	820
8.4.2.5	Constante g_0 , longueur de diffusion et portée effective à 1D	822
8.4.2.6	L'hamiltonien en seconde quantification	823
8.4.2.7	Comment choisir le pas du réseau	825
8.5	Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov phase-module . . .	826
8.5.1	Passage en représentation phase-module et idée de la méthode	826
8.5.2	Développement de l'hamiltonien \hat{H}_{GC} ordre par ordre en $\delta\hat{\rho}/\rho \approx b \mathbf{grad}\hat{\theta} \approx \epsilon$	829

8.5.2.1	Ordre 0 en ϵ	830
8.5.2.2	Ordre 1 en ϵ	831
8.5.2.3	Ordre 2 en ϵ	831
8.5.2.4	Ordre 3 en ϵ	832
8.5.3	Résolution itérative jusqu'à l'ordre ϵ^2 et diagonalisation de \hat{H}_2	833
8.5.3.1	Ordre ϵ^0 : fonction d'onde macroscopique et équation de Schrödinger non linéaire	833
8.5.3.2	Ordre ϵ^1 : rien	834
8.5.3.3	Ordre ϵ^2 : champs $\hat{B}(\mathbf{r})$ et $\hat{\Lambda}_{\text{QC}}(\mathbf{r})$, variables collectives \hat{P} et \hat{Q}	835
8.5.3.4	Ordre ϵ^2 : transformation de Bogolioubov, développement modal, spectre d'excitation, interprétation de \hat{P} et \hat{Q}	837
8.5.3.5	En conclusion	841
8.6	Applications de la théorie des quasi-condensats	841
8.6.1	Le grand potentiel Ω	841
8.6.2	Densité moyenne et équation d'état du gaz	844
8.6.2.1	De la nécessité d'inclure une correction cubique	844
8.6.2.2	Calcul direct de $\langle \delta \hat{\rho} \rangle_3$	845
8.6.2.3	Une autre méthode, plus belle	847
8.6.2.4	Une troisième voie, plus directe	848
8.6.2.5	Équation d'état : les résultats, leur comportement à haute et à basse température	848
8.6.2.6	Approximation de Thomas-Fermi à 2D	851
8.6.3	Fonction de distribution de paires g_2 : expression formelle à l'ordre ϵ^2	851
8.6.3.1	En termes du champ $\hat{\rho}(\mathbf{r})$	852
8.6.3.2	Transformations habiles et résultat	852
8.6.3.3	Quelle variance de N ?	853
8.6.3.4	Lien avec la théorie de Bogolioubov ordinaire	854
8.6.4	Fonction de cohérence du premier ordre g_1 : expression formelle à l'ordre ϵ^2	854
8.6.4.1	En termes des champs $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ et $\hat{\theta}(\mathbf{r})$	855
8.6.4.2	Dans l'état thermique de \hat{H}_2	855
8.6.4.3	Correction due à \hat{H}_3	856
8.6.4.4	Synthèse et forme provisoire	859
8.6.4.5	Un facteur $1/\rho_0$ embarrassant; forme finale	861
8.6.4.6	Vue d'ensemble des résultats; comportement à grande distance	862
8.6.4.7	Formulaire de Wick	865

8.6.5	À quelle condition les fluctuations de densité et le gradient de phase sont-ils faibles?	866
8.6.5.1	Les fluctuations de densité	867
8.6.5.2	Le gradient de phase	867
8.7	Analyse détaillée des fonctions de corrélation g_1 et g_2	868
8.7.1	À la limite thermodynamique pour un espace continu . . .	868
8.7.2	Étude à grande distance à $T = 0$	870
8.7.2.1	Obtention des développements asymptotiques . .	871
8.7.2.2	Une application physique simple : fluctuations du nombre de particules dans une boule	875
8.7.3	Étude à grande distance à $T > 0$	877
8.7.3.1	Cas de $g_1^{\text{Bog}}(\mathbf{r})$	877
8.7.3.2	Cas de $g_2^{\text{QC}}(\mathbf{r})$	882
8.7.4	Étude à courte distance	887
8.7.4.1	Cas de $g_2^{\text{QC}}(\mathbf{r})$; coefficient de contact \mathcal{C} et théorème de Hellmann-Feynman	887
8.7.4.2	Cas de $g_1^{\text{Bog}}(\mathbf{r})$; distribution en impulsion; lien avec \mathcal{C} et avec l'énergie moyenne	893
8.8	Densité normale, transition BKT, superfluidité locale ou globale .	898
8.8.1	La densité normale	898
8.8.1.1	Définition	898
8.8.1.2	Expression à l'ordre de Bogolioubov	899
8.8.1.3	Comportement aux limites en température	900
8.8.1.4	Une densité normale locale	901
8.8.2	La transition BKT	902
8.8.2.1	Présentation sommaire : discontinuité universelle de $\rho_s(T)$, tourbillons quantiques et énergie d'activation	902
8.8.2.2	Température de transition à l'ordre de Bogolioubov : une estimation grossière?	904
8.8.3	Quasi-condensats en mouvement et superfluidité globale .	906
8.8.3.1	Du cas immobile au cas en mouvement	906
8.8.3.2	Probabilité d'un mouvement d'ensemble spontané et ρ_n	909
8.8.3.3	De nouvelles densités normales : globale ρ_n^{glob} , effective $\rho_n^{\text{eff}}(\nu)$ et différentielle $\rho_n^{\text{diff}}(\nu)$	910
8.8.3.4	Expression utile de ρ_n^{glob} et discussion physique .	912
8.8.3.5	Voir les mouvements d'ensemble	915
8.9	Énergie de l'état fondamental à 2D au-delà de Bogolioubov-Popov	916
8.9.1	Une simple application du chapitre 7	916
8.9.2	Forme finale du résultat et comparaison au numérique . .	918

8.9.3	Application à la limite de Thomas-Fermi	920
8.9.4	Effet de la portée de l'interaction	920
8.10	Complément : apparition de la densité superfluide ρ_s dans le comportement asymptotique de $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à $T > 0$	921
8.10.1	Position du problème et motivation	921
8.10.2	Comment procéder	923
8.10.2.1	Logarithme, fonction génératrice et cumulants	923
8.10.2.2	Des remarques simplificatrices	924
8.10.2.3	Coefficient B dans $\phi(\mathbf{q})$ et forme du résultat	926
8.10.3	Un calcul négligeant les fluctuations de densité dans la fonction g_1	927
8.10.3.1	Une motivation physique claire, une fonction $\phi_\theta(\mathbf{q})$ simple	927
8.10.3.2	Calcul au second ordre en \hat{H}_3	929
8.10.3.3	Calcul au premier ordre en \hat{H}_4	932
8.10.3.4	Synthèse et coefficient B_θ	938
8.10.4	Calcul asymptotique sur la forme complète de g_1	938
8.10.4.1	Expression formelle de $\ln(g_1/\rho)$ à l'ordre ϵ^4	938
8.10.4.2	Calcul des moyennes dans $\ln(g_1/\rho)$	940
8.10.4.3	Conclusion	945
	Principales notations	947
	Index	953
	Bibliographie	965