

# Table des matières

<b>1 Introduction générale, concepts et outils de base : statistique quantique et interaction</b>	<b>1</b>
1.1 Le gaz parfait de bosons : rappels et mise en bouche . . . . .	3
1.1.1 Dans l'ensemble grand-canonique . . . . .	4
1.1.1.1 Condensation par saturation des modes excités . . . . .	5
1.1.1.2 Signatures à un corps : profil de densité, fonction $g_1$ . . . . .	8
1.1.1.3 Signatures à deux corps : fonction $g_2$ , fluctuations géantes de $n_0$ , bruit de partition symétrique . . . . .	12
1.1.2 Dans l'ensemble canonique puis microcanonique . . . . .	14
1.1.2.1 Motivation expérimentale . . . . .	14
1.1.2.2 Élimination du mode du condensat et approximation du condensat jamais vide . . . . .	15
1.1.2.3 Fluctuations canoniques de $\hat{N}_0$ : premiers moments et distribution de probabilité . . . . .	16
1.1.2.4 Fluctuations microcanoniques de $\hat{N}_0$ . . . . .	20
1.2 Quel modèle pour l'interaction . . . . .	22
1.2.1 Le problème de la métastabilité, la solution par l'universalité et la discrétisation de l'espace . . . . .	22
1.2.2 Ce fil conducteur qu'est la matrice $T$ . . . . .	27
1.2.3 La notion de longueur de diffusion dans l'onde $s$ . . . . .	29
1.2.3.1 En dimension trois . . . . .	29
1.2.3.2 En dimensionnalité réduite . . . . .	31
1.3 Amplitude de diffusion, matrice $T$ et lien avec les atomes froids pour le modèle de Wigner-Bethe-Peierls d'une interaction de portée nulle . . . . .	32
1.3.1 En dimension trois . . . . .	32
1.3.2 En dimensionnalité réduite . . . . .	37
1.3.2.1 Cas $d = 2$ . . . . .	37
1.3.2.2 Cas $d = 1$ . . . . .	41
1.4 L'interaction de contact la plus simple : le modèle sur réseau . . . . .	43
1.4.1 Dans l'espace réel discrétisé . . . . .	43
1.4.2 Dans l'espace des impulsions . . . . .	45

1.4.3	Matrice $T$ , constante de couplage nue et hamiltonien . . .	46
<b>2</b>	<b>Le régime du condensat pur : l'équation de Gross-Pitayevski</b>	<b>49</b>
2.1	Cas stationnaire . . . . .	52
2.1.1	En dimension trois . . . . .	52
2.1.1.1	Une formulation variationnelle . . . . .	52
2.1.1.2	Cas $a > 0$ et longueur de relaxation $\xi$ . . . . .	53
2.1.1.3	Cas $a < 0$ et instabilité par effondrement . . . . .	54
2.1.1.4	Cas piégé et limite de Thomas-Fermi . . . . .	54
2.1.2	En dimension deux . . . . .	57
2.1.2.1	Une invariance d'échelle critiquable . . . . .	57
2.1.2.2	Limite de Thomas-Fermi . . . . .	59
2.1.3	En dimension un : le soliton brillant . . . . .	59
2.1.3.1	Analyse critique de la constante de couplage . . .	61
2.1.3.2	Applications : équation d'état, limite de Thomas-Fermi, soliton brillant et brisure d'invariance par translation . . . . .	62
2.1.3.3	Ce que nous apprend l'ansatz de Bethe : forte ou faible densité, condensat ou pas, soliton quantique, chat de Schrödinger, transition liquide-gaz . . . .	64
2.1.4	Complément : condition de minimisation locale de l'énergie	69
2.2	Applications : condensats stationnaires avec des défauts de phase	73
2.2.1	Une équation enrichie par un terme de rotation . . . . .	73
2.2.2	En dimension un : soliton gris et seconde branche de Lieb	76
2.2.2.1	Une formulation salvatrice . . . . .	76
2.2.2.2	Intégrabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire . . . . .	78
2.2.2.3	À la limite thermodynamique . . . . .	79
2.2.2.4	Obtention de la seconde branche de Lieb par l'énergie . . . . .	80
2.2.2.5	Obtention de la seconde branche de Lieb par le déphasage . . . . .	81
2.2.2.6	Et dans le cas attractif? . . . . .	83
2.2.3	En dimension deux : condensats piégés tournants avec des tourbillons quantiques . . . . .	84
2.2.3.1	Une fonction d'essai de Thomas-Fermi avec tourbillons . . . . .	85
2.2.3.2	Énergie moyenne de $n$ tourbillons . . . . .	87
2.2.3.3	Discussion physique à $\Omega$ fixé . . . . .	89
2.2.3.4	Discussion physique à $L_z$ fixé pour $n = 1$ . . . . .	92
2.2.3.5	Ni des condensats au sens strict ni des superfluides	93
2.2.4	En dimension trois : le tourbillon à ligne de cœur courbée .	95

2.2.4.1	Un raisonnement simple par découpage en tranches . . . . .	95
2.2.4.2	Des prédictions à l'épreuve du numérique . . . . .	97
2.2.4.3	À moment cinétique $L_z$ fixé . . . . .	98
2.3	Cas dépendant du temps . . . . .	99
2.3.1	Forme de l'équation et de ses réductions dimensionnelles .	101
2.3.2	Les équations hydrodynamiques comme un équivalent de l'approximation de Thomas-Fermi dans le cas dépendant du temps, et comment les résoudre . . . . .	102
2.3.2.1	Obtention par passage en représentation phase-module . . . . .	102
2.3.2.2	Solution des équations hydrodynamiques . . . . .	104
2.3.2.3	En point de vue de Lagrange . . . . .	106
2.3.2.4	Équations hydrodynamiques linéarisées . . . . .	107
2.3.2.5	Modes propres en l'absence de rotation . . . . .	109
2.3.3	Quelques solutions exactes de l'équation de Gross-Pitayevski . . . . .	115
2.3.3.1	Cas 1D : mettre en mouvement le soliton brillant .	115
2.3.3.2	Cas 2D : se ramener à un piège de raideur constante par changement de jauge et d'échelle . . . . .	117
2.3.3.3	Cas général : modifier le mouvement d'ensemble dans un piège . . . . .	121
2.3.4	Application : élucidation du mécanisme de formation des réseaux de tourbillons dans l'expérience de l'ENS . . . . .	122
2.3.4.1	La procédure expérimentale de l'ENS et l'échec des scénarios thermodynamiques . . . . .	122
2.3.4.2	Un nouveau mécanisme en deux temps, résonance et instabilité dynamique . . . . .	125
2.3.4.3	Une procédure vérificatoire : mise en rotation lente	129
2.3.4.4	Le scénario thermodynamique à la Landau, suite et fin . . . . .	134
2.3.4.5	Moralité . . . . .	136
2.3.4.6	Complément : solutions stationnaires générales des équations hydrodynamiques dans un piège harmonique tournant autour d'un de ses axes propres	137
2.3.5	Étude de la stabilité dynamique . . . . .	140
2.3.5.1	Un calcul très simple . . . . .	141
2.3.5.2	Une obtention plus rigoureuse de $\mathcal{L}(t)$ . . . . .	143
2.3.5.3	Cas indépendant du temps : modes propres normaux et anormaux, transformation de Bogolioubov, stabilité dynamique et thermodynamique . .	144
2.3.5.4	Cas dépendant du temps . . . . .	153

2.4	Limitations à la validité de l'équation de Gross-Pitayevski pour l'évolution temporelle . . . . .	154
2.4.1	Évolution d'un soliton brillant « au repos » . . . . .	155
2.4.1.1	Par équations de Heisenberg pour le champ quantique . . . . .	156
2.4.1.2	Par étude linéaire de stabilité pour le champ classique . . . . .	157
2.4.2	Un mécanisme de brouillage de phase omis par l'équation de Gross-Pitayevski . . . . .	159
2.4.2.1	Modèle à deux modes . . . . .	159
2.4.2.2	Champ classique contre champ quantique . . . . .	160
2.4.2.3	Amélioration du champ classique par ajout d'un bruit de Wigner dans l'état initial . . . . .	163
2.4.3	Généralité de ce mécanisme de brouillage : mode pulsant dans un piège harmonique isotrope . . . . .	164
2.4.3.1	Excitation par changement de raideur du piège . . . . .	164
2.4.3.2	Stabilité du mode pulsant : effet des fluctuations du facteur d'échelle . . . . .	166
2.4.3.3	Stabilité des autres modes . . . . .	169
2.4.4	Absence du mécanisme d'émission spontanée dans l'équation de Gross-Pitayevski . . . . .	170
2.4.4.1	Une analogie avec le rayonnement quantique . . . . .	170
2.4.4.2	Déplétion quantique rapide dans un modèle à deux modes . . . . .	171
2.4.4.3	En champ classique amélioré par bruit de Wigner . . . . .	175
2.4.5	Un autre exemple, multimode, dominé par l'émission spontanée de paires : les faisceaux jumeaux . . . . .	176
2.4.5.1	Modèle 1D avec constante de couplage modulée en temps . . . . .	176
2.4.5.2	Analyse linéaire de stabilité en champ classique . . . . .	178
2.4.5.3	Propriétés statistiques des faisceaux jumeaux . . . . .	181
2.4.6	Moralité de la discussion sur la validité de Gross-Pitayevski . . . . .	182

### **3 La théorie de Bogolioubov : premières corrections au condensat pur en dimension trois et opérateur phase du condensat 183**

3.1	Idée générale de la méthode de Bogolioubov . . . . .	184
3.1.1	Le champ non condensé $\hat{\psi}_\perp$ comme perturbation . . . . .	184
3.1.2	Mise en œuvre : développement de l'hamiltonien, élimination du mode du condensat, opérateur phase $\hat{\theta}$ et champ non condensé redéfini $\hat{\Lambda}$ , correction à Gross-Pitayevski . . . . .	185
3.1.3	Une percée historique . . . . .	188
3.2	Cas stationnaire spatialement homogène . . . . .	189

3.2.1	Cas du modèle sur réseau . . . . .	190
3.2.1.1	Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov et premières interprétations physiques . . . . .	190
3.2.1.2	Un développement caché . . . . .	193
3.2.1.3	Forme finale de l'hamiltonien de Bogolioubov; spectre d'excitation, énergie de l'état fondamental . . .	195
3.2.2	Pour un vrai potentiel d'interaction $V(\mathbf{r})$ . . . . .	199
3.2.3	Applications simples : statistique de $n_0$ , densité non condensée anormale, équation d'état, distribution et corrélations en impulsion, fonctions $g_1$ et $g_2$ , cohérence temporelle du champ non condensé . . . . .	202
3.2.3.1	Statistique de $n_0$ à l'équilibre . . . . .	202
3.2.3.2	La densité non condensée anormale $\rho_{an}$ . . . . .	210
3.2.3.3	L'équation d'état du gaz de bosons en interaction faible à l'approximation de Bogolioubov . . . . .	211
3.2.3.4	Fonction de cohérence du premier ordre $g_1$ et distribution en vecteur d'onde $n_{\mathbf{k}}^{cin}$ du gaz; fonction de corrélation dans l'espace des impulsions . . . .	221
3.2.3.5	Fonction de distribution de paires $g_2$ . . . . .	225
3.2.3.6	Fonction de cohérence spatio-temporelle $g_1$ dans l'approximation de Bogolioubov . . . . .	229
3.2.4	Le cas à part de la superfluidité . . . . .	237
3.2.4.1	Superfluidité n'est pas condensation . . . . .	237
3.2.4.2	La vitesse critique de Landau et au-delà . . . . .	238
3.2.4.3	Les courants métastables et leur analyse de Bogolioubov . . . . .	242
3.2.4.4	Définition thermodynamique de la fraction normale . . . . .	249
3.2.4.5	Variante énergétique et borne de Leggett . . . . .	252
3.2.5	Complément I : exposé et mise en œuvre sur la densité non condensée normale et anormale d'une méthode générale de développement à haute et à basse température, et mise en difficulté de la théorie de Hartree-Fock . . . . .	256
3.2.5.1	La densité non condensée . . . . .	256
3.2.5.2	À l'ordre dominant en température . . . . .	258
3.2.5.3	Comment aller au-delà de l'ordre dominant . . . .	259
3.2.5.4	La densité non condensée anormale . . . . .	262
3.2.5.5	Quel est l'intérêt du développement à haute température? . . . . .	264
3.2.5.6	Application : mise de Hartree-Fock en difficulté . .	264
3.2.6	Complément II : adiabaticité quantique et adiabaticité thermodynamique . . . . .	267

3.3	Cas stationnaire dans un piège . . . . .	271
3.3.1	Motivation et spécificités . . . . .	271
3.3.1.1	Quel mode spatial du condensat? . . . . .	271
3.3.1.2	Quels modes de Bogolioubov? Limite semi-classique . . . . .	272
3.3.2	Un cas simplifié pour comprendre pourquoi les termes d'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ dans l'hamiltonien peuvent influencer sur des valeurs moyennes à l'ordre 2 . . . . .	274
3.3.2.1	Calcul de Bogolioubov pour un degré de liberté . . . . .	274
3.3.2.2	Moralité . . . . .	277
3.3.3	Approximation cubique de l'hamiltonien . . . . .	277
3.3.3.1	Première étape de la cubisation . . . . .	277
3.3.3.2	Deuxième étape de la cubisation . . . . .	278
3.3.3.3	Le résultat final et son interprétation . . . . .	279
3.3.4	Lien entre $\hat{\Lambda}^{(2)}$ , $\langle \hat{\Lambda}^{(1)} \rangle$ et $\phi_{\perp}^{(2)}$ . . . . .	282
3.3.5	Développement explicite de la théorie à l'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ . . . . .	283
3.3.5.1	Vue d'ensemble sur la suite du développement en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ . . . . .	283
3.3.5.2	À l'ordre 0 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ . . . . .	283
3.3.5.3	À l'ordre 1 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ . . . . .	284
3.3.5.4	À l'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ : l'hamiltonien de Bogolioubov discret et sa forme réduite . . . . .	284
3.3.5.5	À l'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ : fonction d'onde du condensat au-delà de Gross-Pitayevski . . . . .	290
3.3.5.6	Calcul de $\langle \hat{\Lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{H}^{(0-2)} + \hat{H}^{(3)}}^{(2)}$ et interprétation physique par déplétion-interaction . . . . .	292
3.3.6	Développement de $g_0$ à l'ordre un en $a/b$ et passage à la limite continue (ou d'une interaction de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$ . . . . .	296
3.3.6.1	Contexte et motivation . . . . .	296
3.3.6.2	Géométrie considérée pour le passage à la limite continue . . . . .	297
3.3.6.3	Cas de l'énergie de l'état fondamental . . . . .	298
3.3.6.4	Cas de la fonction d'onde du condensat . . . . .	301
3.3.7	Synthèse : formulation directe dans l'espace continu de la théorie de Bogolioubov indépendante du temps . . . . .	303
3.3.7.1	Motivation et obtention . . . . .	303
3.3.7.2	Cas de $\phi^{(2)}$ , première correction à Gross-Pitayevski sur le mode spatial du condensat . . . . .	305
3.3.7.3	Cas de l'hamiltonien de Bogolioubov et de son niveau d'énergie fondamental . . . . .	308
3.3.7.4	Cas d'une observable plus générale . . . . .	310

3.3.7.5	Récapitulatif en espace continu : principales étapes et équations . . . . .	310
3.4	La théorie de Bogolioubov dans le cas dépendant du temps . . . .	312
3.4.1	Motivations physiques et vue d'ensemble . . . . .	312
3.4.1.1	Une question utile et un problème fondamental . . . . .	312
3.4.1.2	Un premier progrès sur Gross-Pitayevski . . . . .	313
3.4.1.3	Un second progrès sur Gross-Pitayevski . . . . .	314
3.4.1.4	Vue d'ensemble de la méthode . . . . .	315
3.4.2	Équation du mouvement pour le champ $\hat{\Lambda}$ à l'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	315
3.4.3	Fonction d'onde du condensat à l'ordre 0 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ . . . . .	321
3.4.4	Évolution du champ non condensé et correction à $\phi^{(0)}$ à l'ordre 1 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ . . . . .	323
3.4.5	Contribution d'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ à la fonction d'onde du condensat . . . . .	325
3.4.6	Développement de $g_0$ au premier ordre en $a/b$ et limite continue (ou de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$ . . . . .	327
3.4.7	Synthèse : formulation directe de la théorie de Bogolioubov dépendant du temps dans l'espace continu . . . . .	331
3.4.7.1	Quel petit paramètre? . . . . .	332
3.4.7.2	Ordre 0 : l'équation de Gross-Pitayevski retrouvée . . . . .	332
3.4.7.3	Ordre 1 : des modes de quasi-particules sans interaction . . . . .	332
3.4.7.4	Ordre 2 : première correction à Gross-Pitayevski . . . . .	335
3.4.7.5	De l'importance de $\phi_{\perp}^{(2)}$ dans les observables . . . . .	336
3.4.7.6	Et si $N$ fluctue? . . . . .	338
3.4.8	Lien avec la physique de champ classique et l'approximation de la troncature de Wigner . . . . .	339
3.4.9	Les différents scénarios de sortie du régime de validité de l'équation de Gross-Pitayevski dépendant du temps . . . .	344
3.4.9.1	Mise en échec par divergence de la déplétion . . . . .	345
3.4.9.2	Mise en échec au niveau de $\phi^{(2)}$ . . . . .	348
3.5	L'opérateur phase du condensat . . . . .	349
3.5.1	Introduction de l'opérateur phase $\hat{\theta}_{\phi}$ . . . . .	350
3.5.2	Équation d'évolution de $\hat{\theta}_{\phi}$ lorsque $\partial_t \phi \equiv 0$ . . . . .	352
3.5.3	Lissage temporel $\overline{d\hat{\theta}_{\phi}/dt}$ de l'équation d'évolution . . . .	354
3.5.3.1	Motivation et mise en œuvre . . . . .	354
3.5.3.2	Lissage des termes quadratiques dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$ . . . . .	356
3.5.3.3	Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$ : il faut connaître les termes quadratiques $\hat{S}^{(2)}$ de $d\hat{\Lambda}_{\phi^{(0)}}/dt$	357
3.5.3.4	Lissage de l'opérateur source $\hat{S}^{(2)}$ et d'un opérateur $\hat{\phi}^{(2)}$ . . . . .	359

3.5.3.5	Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$ : suite et fin . . . . .	360
3.5.4	Reconnaître dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$ un opérateur potentiel chimique	362
3.5.4.1	Reconnaître des dérivées par rapport à $N$ . . . . .	362
3.5.4.2	Triturer les dérivées en trois étapes . . . . .	364
3.5.4.3	Regroupement, résultat final et interprétation . . . . .	366
3.5.5	Au-delà de l'approximation de Bogolioubov : le cas homogène spatialement . . . . .	367
3.5.5.1	Intérêt, idée et mise en œuvre du calcul . . . . .	367
3.5.5.2	Le résultat; ses termes diagonaux; ses termes non diagonaux, diffusion de phase et lissage temporel	369
3.5.6	Cas où le nombre de particules fluctue . . . . .	371
3.5.6.1	Motivation . . . . .	371
3.5.6.2	Extension du calcul de $d\hat{\theta}_\phi/dt$ des sections précédentes . . . . .	372
3.5.6.3	Simplification supplémentaire pour un grand système . . . . .	374
3.5.6.4	Le résultat et son application à un mélange statistique d'ensembles canoniques . . . . .	375
3.5.7	Dans le cas spatialement homogène, sans lissage temporel (avec les termes oscillants) . . . . .	376
3.5.7.1	À $N$ fixé . . . . .	376
3.5.7.2	Lorsque $N$ fluctue . . . . .	378
3.5.8	Complément : les paradoxes de l'opérateur phase . . . . .	379
<b>4</b>	<b>Application I : Amortissement et déplacement d'énergie des modes d'excitation d'un condensat spatialement homogène</b>	<b>381</b>
4.1	Obtention par analyse d'une excitation de Bragg de faible amplitude $\epsilon$ . . . . .	383
4.1.1	Une expérience de pensée . . . . .	383
4.1.2	Solution de l'équation de Gross-Pitayevski au premier ordre en $\epsilon$ . . . . .	385
4.1.3	Évolution des modes de Bogolioubov au premier ordre en $\epsilon$ et amplitudes $\mathcal{A}_{k_1, k_2}^{k_3}, \mathcal{A}_{k_1, k_2, k_3}$ . . . . .	387
4.1.4	Correction $\phi^{(2)}$ à la fonction d'onde de Gross-Pitayevski au premier ordre en $\epsilon$ . . . . .	390
4.1.4.1	Structure du résultat et considérations générales . . . . .	390
4.1.4.2	Calcul explicite de $\phi^{(2)}$ aux temps longs . . . . .	393
4.1.5	Résultat : la première correction à Gross-Pitayevski sur les pulsations propres du condensat . . . . .	399
4.1.5.1	Trois expressions équivalentes . . . . .	400



4.1.5.2	Survol de la littérature sur ce sujet . . . . .	402
4.1.5.3	Conditions d'applicabilité du résultat (4.84) . . . . .	403
4.2	Obtention et interprétation physique en termes d'interaction entre les quasi-particules de Bogolioubov . . . . .	405
4.2.1	Signal de Bragg et fonctions de corrélation du système non perturbé . . . . .	405
4.2.2	Calcul par équation pilote et théorème de régression quantique . . . . .	407
4.2.2.1	Processus d'interaction entre quasi-particules et amplitudes $\mathcal{A}$ retrouvées . . . . .	408
4.2.2.2	L'équation pilote dans l'approximation de Born-Markov . . . . .	410
4.2.2.3	Le théorème de régression quantique . . . . .	412
4.2.3	Retrouver le résultat de la section 4.1.5 . . . . .	414
4.2.3.1	Un désaccord apparent . . . . .	414
4.2.3.2	Résolution par inclusion de $\hat{H}_4$ . . . . .	415
4.2.4	Une condition de validité du résultat : celle de la règle d'or . . . . .	417
4.3	Quelques résultats explicites sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .	419
4.3.1	Synthèse : ensemble des résultats analytiques sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ et illustrations numériques . . . . .	419
4.3.1.1	Classement par variable fuyante (tendant vers 0 ou $+\infty$ ) . . . . .	420
4.3.1.2	Illustrations numériques après réduction à une intégrale simple . . . . .	423
4.3.1.3	Complément : calcul des intégrales sur $\lambda$ dans les équations (4.160), (4.162) et (4.167) . . . . .	429
4.3.2	Cas $T = 0$ : développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles $q$ à l'ordre 4; le résultat est réel mais nécessite un développement multi-échelle . . . . .	429
4.3.2.1	Motivation initiale : quelle vitesse du son? . . . . .	429
4.3.2.2	Un développement trop naïf sous le signe intégral . . . . .	431
4.3.2.3	La bonne méthode est multi-échelle . . . . .	432
4.3.2.4	Un raccordement vérificateur . . . . .	433
4.3.2.5	Le résultat final à l'ordre 4 . . . . .	435
4.3.3	Cas $T = 0$ : développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles $q$ à l'ordre 5; le résultat devient complexe et un logarithme de $q$ apparaît . . . . .	435
4.3.3.1	Une réelle motivation physique . . . . .	435
4.3.3.2	Une intégrale modèle pour s'exercer, qui montre l'importance de la courbure de la relation de dispersion . . . . .	436
4.3.3.3	Retour au vrai problème . . . . .	442
4.3.3.4	Le résultat à l'ordre 5 . . . . .	447

4.3.4	Cas $T \neq 0$ : linéarisation de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles $q$ . . . . .	447
4.3.4.1	Motivations et vue d'ensemble . . . . .	447
4.3.4.2	Développement dans la zone $k < Aq$ . . . . .	450
4.3.4.3	Développement dans la zone $k > Aq$ . . . . .	452
4.3.4.4	Une forme finale plus agréable . . . . .	453
4.3.4.5	À basse température . . . . .	454
4.3.4.6	À haute température . . . . .	455
4.3.4.7	À température quelconque . . . . .	457
4.3.5	Que vaut $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands $q$ ? . . . . .	458
4.3.5.1	Motivation physique . . . . .	458
4.3.5.2	Ce que l'intuition suggère sur la partie réelle . . . . .	459
4.3.5.3	Ce que l'intuition suggère sur la partie imaginaire . . . . .	461
4.3.5.4	Développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands $q$ à $T = 0$ . . . . .	463
4.3.5.5	À $T > 0$ : développement aux grands $q$ de la partie thermique de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .	468
4.3.6	Étude de la partie thermique $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)\text{th}}$ de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ à basse et à haute température . . . . .	471
4.3.6.1	Limite de basse $T$ à nombre d'onde $q$ fixé . . . . .	472
4.3.6.2	Limite de basse $T$ à rapport $\hbar c_{\text{GP}} q / k_{\text{B}} T$ fixé . . . . .	473
4.3.6.3	Limite de haute $T$ à nombre d'onde $q$ fixé . . . . .	476
4.3.6.4	Limite de haute $T$ à rapport $\hbar^2 q^2 / m k_{\text{B}} T$ fixé . . . . .	479
4.3.7	Complément I : sectorisation des processus de Belyaev et de Landau dans l'espace des vecteurs d'onde . . . . .	482
4.3.8	Complément II : les singularités aux frontières de l'intégrande de $\int dk$ dans $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .	485
4.4	Morale de notre calcul de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ . . . . .	490
	<b>Principales notations</b> . . . . .	<b>493</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>499</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>511</b>