

Table des matières

1 Introduction générale, concepts et outils de base : statistique quantique et interaction	1
1.1 Le gaz parfait de bosons : rappels et mise en bouche	3
1.1.1 Dans l'ensemble grand-canonique	4
1.1.1.1 Condensation par saturation des modes excités	5
1.1.1.2 Signatures à un corps : profil de densité, fonction g_1	8
1.1.1.3 Signatures à deux corps : fonction g_2 , fluctuations géantes de n_0 , bruit de partition symétrique	12
1.1.2 Dans l'ensemble canonique puis microcanonique	14
1.1.2.1 Motivation expérimentale	14
1.1.2.2 Élimination du mode du condensat et approximation du condensat jamais vide	15
1.1.2.3 Fluctuations canoniques de \hat{N}_0 : premiers moments et distribution de probabilité	16
1.1.2.4 Fluctuations microcanoniques de \hat{N}_0	20
1.2 Quel modèle pour l'interaction	22
1.2.1 Le problème de la métastabilité, la solution par l'universalité et la discrétisation de l'espace	22
1.2.2 Ce fil conducteur qu'est la matrice T	27
1.2.3 La notion de longueur de diffusion dans l'onde s	29
1.2.3.1 En dimension trois	29
1.2.3.2 En dimensionnalité réduite	31
1.3 Amplitude de diffusion, matrice T et lien avec les atomes froids pour le modèle de Wigner-Bethe-Peierls d'une interaction de portée nulle	32
1.3.1 En dimension trois	32
1.3.2 En dimensionnalité réduite	37
1.3.2.1 Cas $d = 2$	37
1.3.2.2 Cas $d = 1$	41
1.4 L'interaction de contact la plus simple : le modèle sur réseau	43
1.4.1 Dans l'espace réel discrétisé	43
1.4.2 Dans l'espace des impulsions	45

1.4.3	Matrice T , constante de couplage nue et hamiltonien . . .	46
2	Le régime du condensat pur : l'équation de Gross-Pitayevski	49
2.1	Cas stationnaire	52
2.1.1	En dimension trois	52
2.1.1.1	Une formulation variationnelle	52
2.1.1.2	Cas $a > 0$ et longueur de relaxation ξ	53
2.1.1.3	Cas $a < 0$ et instabilité par effondrement	54
2.1.1.4	Cas piégé et limite de Thomas-Fermi	54
2.1.2	En dimension deux	57
2.1.2.1	Une invariance d'échelle critiquable	57
2.1.2.2	Limite de Thomas-Fermi	59
2.1.3	En dimension un : le soliton brillant	59
2.1.3.1	Analyse critique de la constante de couplage . . .	61
2.1.3.2	Applications : équation d'état, limite de Thomas-Fermi, soliton brillant et brisure d'invariance par translation	62
2.1.3.3	Ce que nous apprend l'ansatz de Bethe : forte ou faible densité, condensat ou pas, soliton quantique, chat de Schrödinger, transition liquide-gaz	64
2.1.4	Complément : condition de minimisation locale de l'énergie	69
2.2	Applications : condensats stationnaires avec des défauts de phase	73
2.2.1	Une équation enrichie par un terme de rotation	73
2.2.2	En dimension un : soliton gris et seconde branche de Lieb	76
2.2.2.1	Une formulation salvatrice	76
2.2.2.2	Intégrabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire	78
2.2.2.3	À la limite thermodynamique	79
2.2.2.4	Obtention de la seconde branche de Lieb par l'énergie	80
2.2.2.5	Obtention de la seconde branche de Lieb par le déphasage	81
2.2.2.6	Et dans le cas attractif?	83
2.2.3	En dimension deux : condensats piégés tournants avec des tourbillons quantiques	84
2.2.3.1	Une fonction d'essai de Thomas-Fermi avec tourbillons	85
2.2.3.2	Énergie moyenne de n tourbillons	87
2.2.3.3	Discussion physique à Ω fixé	89
2.2.3.4	Discussion physique à L_z fixé pour $n = 1$	92
2.2.3.5	Ni des condensats au sens strict ni des superfluides	93
2.2.4	En dimension trois : le tourbillon à ligne de cœur courbée .	95

2.2.4.1	Un raisonnement simple par découpage en tranches	95
2.2.4.2	Des prédictions à l'épreuve du numérique	97
2.2.4.3	À moment cinétique L_z fixé	98
2.3	Cas dépendant du temps	99
2.3.1	Forme de l'équation et de ses réductions dimensionnelles .	101
2.3.2	Les équations hydrodynamiques comme un équivalent de l'approximation de Thomas-Fermi dans le cas dépendant du temps, et comment les résoudre	102
2.3.2.1	Obtention par passage en représentation phase-module	102
2.3.2.2	Solution des équations hydrodynamiques	104
2.3.2.3	En point de vue de Lagrange	106
2.3.2.4	Équations hydrodynamiques linéarisées	107
2.3.2.5	Modes propres en l'absence de rotation	109
2.3.3	Quelques solutions exactes de l'équation de Gross-Pitayevski	115
2.3.3.1	Cas 1D : mettre en mouvement le soliton brillant .	115
2.3.3.2	Cas 2D : se ramener à un piège de raideur constante par changement de jauge et d'échelle	117
2.3.3.3	Cas général : modifier le mouvement d'ensemble dans un piège	121
2.3.4	Application : élucidation du mécanisme de formation des réseaux de tourbillons dans l'expérience de l'ENS	122
2.3.4.1	La procédure expérimentale de l'ENS et l'échec des scénarios thermodynamiques	122
2.3.4.2	Un nouveau mécanisme en deux temps, résonance et instabilité dynamique	125
2.3.4.3	Une procédure vérificatoire : mise en rotation lente	129
2.3.4.4	Le scénario thermodynamique à la Landau, suite et fin	134
2.3.4.5	Moralité	136
2.3.4.6	Complément : solutions stationnaires générales des équations hydrodynamiques dans un piège harmonique tournant autour d'un de ses axes propres	137
2.3.5	Étude de la stabilité dynamique	140
2.3.5.1	Un calcul très simple	141
2.3.5.2	Une obtention plus rigoureuse de $\mathcal{L}(t)$	143
2.3.5.3	Cas indépendant du temps : modes propres normaux et anormaux, transformation de Bogolioubov, stabilité dynamique et thermodynamique . .	144
2.3.5.4	Cas dépendant du temps	153

2.4	Limitations à la validité de l'équation de Gross-Pitayevski pour l'évolution temporelle	154
2.4.1	Évolution d'un soliton brillant « au repos »	155
2.4.1.1	Par équations de Heisenberg pour le champ quantique	156
2.4.1.2	Par étude linéaire de stabilité pour le champ classique	157
2.4.2	Un mécanisme de brouillage de phase omis par l'équation de Gross-Pitayevski	159
2.4.2.1	Modèle à deux modes	159
2.4.2.2	Champ classique contre champ quantique	160
2.4.2.3	Amélioration du champ classique par ajout d'un bruit de Wigner dans l'état initial	163
2.4.3	Généralité de ce mécanisme de brouillage : mode pulsant dans un piège harmonique isotrope	164
2.4.3.1	Excitation par changement de raideur du piège	164
2.4.3.2	Stabilité du mode pulsant : effet des fluctuations du facteur d'échelle	166
2.4.3.3	Stabilité des autres modes	169
2.4.4	Absence du mécanisme d'émission spontanée dans l'équation de Gross-Pitayevski	170
2.4.4.1	Une analogie avec le rayonnement quantique	170
2.4.4.2	Déplétion quantique rapide dans un modèle à deux modes	171
2.4.4.3	En champ classique amélioré par bruit de Wigner	175
2.4.5	Un autre exemple, multimode, dominé par l'émission spontanée de paires : les faisceaux jumeaux	176
2.4.5.1	Modèle 1D avec constante de couplage modulée en temps	176
2.4.5.2	Analyse linéaire de stabilité en champ classique	178
2.4.5.3	Propriétés statistiques des faisceaux jumeaux	181
2.4.6	Moralité de la discussion sur la validité de Gross-Pitayevski	182

3 La théorie de Bogolioubov : premières corrections au condensat pur en dimension trois et opérateur phase du condensat **183**

3.1	Idée générale de la méthode de Bogolioubov	184
3.1.1	Le champ non condensé $\hat{\psi}_\perp$ comme perturbation	184
3.1.2	Mise en œuvre : développement de l'hamiltonien, élimination du mode du condensat, opérateur phase $\hat{\theta}$ et champ non condensé redéfini $\hat{\Lambda}$, correction à Gross-Pitayevski	185
3.1.3	Une percée historique	188
3.2	Cas stationnaire spatialement homogène	189

3.2.1	Cas du modèle sur réseau	190
3.2.1.1	Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov et premières interprétations physiques	190
3.2.1.2	Un développement caché	193
3.2.1.3	Forme finale de l'hamiltonien de Bogolioubov; spectre d'excitation, énergie de l'état fondamental . . .	195
3.2.2	Pour un vrai potentiel d'interaction $V(\mathbf{r})$	199
3.2.3	Applications simples : statistique de n_0 , densité non condensée anormale, équation d'état, distribution et corrélations en impulsion, fonctions g_1 et g_2 , cohérence temporelle du champ non condensé	202
3.2.3.1	Statistique de n_0 à l'équilibre	202
3.2.3.2	La densité non condensée anormale ρ_{an}	210
3.2.3.3	L'équation d'état du gaz de bosons en interaction faible à l'approximation de Bogolioubov	211
3.2.3.4	Fonction de cohérence du premier ordre g_1 et distribution en vecteur d'onde $n_{\mathbf{k}}^{cin}$ du gaz; fonction de corrélation dans l'espace des impulsions	221
3.2.3.5	Fonction de distribution de paires g_2	225
3.2.3.6	Fonction de cohérence spatio-temporelle g_1 dans l'approximation de Bogolioubov	229
3.2.4	Le cas à part de la superfluidité	237
3.2.4.1	Superfluidité n'est pas condensation	237
3.2.4.2	La vitesse critique de Landau et au-delà	238
3.2.4.3	Les courants métastables et leur analyse de Bogolioubov	242
3.2.4.4	Définition thermodynamique de la fraction normale	249
3.2.4.5	Variante énergétique et borne de Leggett	252
3.2.5	Complément I : exposé et mise en œuvre sur la densité non condensée normale et anormale d'une méthode générale de développement à haute et à basse température, et mise en difficulté de la théorie de Hartree-Fock	256
3.2.5.1	La densité non condensée	256
3.2.5.2	À l'ordre dominant en température	258
3.2.5.3	Comment aller au-delà de l'ordre dominant	259
3.2.5.4	La densité non condensée anormale	262
3.2.5.5	Quel est l'intérêt du développement à haute température?	264
3.2.5.6	Application : mise de Hartree-Fock en difficulté . .	264
3.2.6	Complément II : adiabaticité quantique et adiabaticité thermodynamique	267

3.3	Cas stationnaire dans un piège	271
3.3.1	Motivation et spécificités	271
3.3.1.1	Quel mode spatial du condensat?	271
3.3.1.2	Quels modes de Bogolioubov? Limite semi-classique	272
3.3.2	Un cas simplifié pour comprendre pourquoi les termes d'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ dans l'hamiltonien peuvent influencer sur des valeurs moyennes à l'ordre 2	274
3.3.2.1	Calcul de Bogolioubov pour un degré de liberté	274
3.3.2.2	Moralité	277
3.3.3	Approximation cubique de l'hamiltonien	277
3.3.3.1	Première étape de la cubisation	277
3.3.3.2	Deuxième étape de la cubisation	278
3.3.3.3	Le résultat final et son interprétation	279
3.3.4	Lien entre $\hat{\Lambda}^{(2)}$, $\langle \hat{\Lambda}^{(1)} \rangle$ et $\phi_{\perp}^{(2)}$	282
3.3.5	Développement explicite de la théorie à l'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	283
3.3.5.1	Vue d'ensemble sur la suite du développement en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	283
3.3.5.2	À l'ordre 0 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	283
3.3.5.3	À l'ordre 1 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	284
3.3.5.4	À l'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: l'hamiltonien de Bogolioubov discret et sa forme réduite	284
3.3.5.5	À l'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: fonction d'onde du condensat au-delà de Gross-Pitayevski	290
3.3.5.6	Calcul de $\langle \hat{\Lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle_{\hat{H}^{(0-2)} + \hat{H}^{(3)}}^{(2)}$ et interprétation physique par déplétion-interaction	292
3.3.6	Développement de g_0 à l'ordre un en a/b et passage à la limite continue (ou d'une interaction de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$	296
3.3.6.1	Contexte et motivation	296
3.3.6.2	Géométrie considérée pour le passage à la limite continue	297
3.3.6.3	Cas de l'énergie de l'état fondamental	298
3.3.6.4	Cas de la fonction d'onde du condensat	301
3.3.7	Synthèse : formulation directe dans l'espace continu de la théorie de Bogolioubov indépendante du temps	303
3.3.7.1	Motivation et obtention	303
3.3.7.2	Cas de $\phi^{(2)}$, première correction à Gross-Pitayevski sur le mode spatial du condensat	305
3.3.7.3	Cas de l'hamiltonien de Bogolioubov et de son niveau d'énergie fondamental	308
3.3.7.4	Cas d'une observable plus générale	310

3.3.7.5	Récapitulatif en espace continu : principales étapes et équations	310
3.4	La théorie de Bogolioubov dans le cas dépendant du temps	312
3.4.1	Motivations physiques et vue d'ensemble	312
3.4.1.1	Une question utile et un problème fondamental	312
3.4.1.2	Un premier progrès sur Gross-Pitayevski	313
3.4.1.3	Un second progrès sur Gross-Pitayevski	314
3.4.1.4	Vue d'ensemble de la méthode	315
3.4.2	Équation du mouvement pour le champ $\hat{\Lambda}$ à l'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	315
3.4.3	Fonction d'onde du condensat à l'ordre 0 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	321
3.4.4	Évolution du champ non condensé et correction à $\phi^{(0)}$ à l'ordre 1 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	323
3.4.5	Contribution d'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ à la fonction d'onde du condensat	325
3.4.6	Développement de g_0 au premier ordre en a/b et limite continue (ou de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$	327
3.4.7	Synthèse : formulation directe de la théorie de Bogolioubov dépendant du temps dans l'espace continu	331
3.4.7.1	Quel petit paramètre?	332
3.4.7.2	Ordre 0 : l'équation de Gross-Pitayevski retrouvée	332
3.4.7.3	Ordre 1 : des modes de quasi-particules sans interaction	332
3.4.7.4	Ordre 2 : première correction à Gross-Pitayevski	335
3.4.7.5	De l'importance de $\phi_{\perp}^{(2)}$ dans les observables	336
3.4.7.6	Et si N fluctue?	338
3.4.8	Lien avec la physique de champ classique et l'approximation de la troncature de Wigner	339
3.4.9	Les différents scénarios de sortie du régime de validité de l'équation de Gross-Pitayevski dépendant du temps	344
3.4.9.1	Mise en échec par divergence de la déplétion	345
3.4.9.2	Mise en échec au niveau de $\phi^{(2)}$	348
3.5	L'opérateur phase du condensat	349
3.5.1	Introduction de l'opérateur phase $\hat{\theta}_{\phi}$	350
3.5.2	Équation d'évolution de $\hat{\theta}_{\phi}$ lorsque $\partial_t \phi \equiv 0$	352
3.5.3	Lissage temporel $\overline{d\hat{\theta}_{\phi}/dt}$ de l'équation d'évolution	354
3.5.3.1	Motivation et mise en œuvre	354
3.5.3.2	Lissage des termes quadratiques dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$	356
3.5.3.3	Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$: il faut connaître les termes quadratiques $\hat{S}^{(2)}$ de $d\hat{\Lambda}_{\phi(0)}/dt$	357
3.5.3.4	Lissage de l'opérateur source $\hat{S}^{(2)}$ et d'un opérateur $\hat{\phi}^{(2)}$	359

3.5.3.5	Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$: suite et fin	360
3.5.4	Reconnaître dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$ un opérateur potentiel chimique	362
3.5.4.1	Reconnaître des dérivées par rapport à N	362
3.5.4.2	Triturer les dérivées en trois étapes	364
3.5.4.3	Regroupement, résultat final et interprétation . . .	366
3.5.5	Au-delà de l'approximation de Bogolioubov : le cas homogène spatialement	367
3.5.5.1	Intérêt, idée et mise en œuvre du calcul	367
3.5.5.2	Le résultat; ses termes diagonaux; ses termes non diagonaux, diffusion de phase et lissage temporel	369
3.5.6	Cas où le nombre de particules fluctue	371
3.5.6.1	Motivation	371
3.5.6.2	Extension du calcul de $d\hat{\theta}_\phi/dt$ des sections précédentes	372
3.5.6.3	Simplification supplémentaire pour un grand système	374
3.5.6.4	Le résultat et son application à un mélange statistique d'ensembles canoniques	375
3.5.7	Dans le cas spatialement homogène, sans lissage temporel (avec les termes oscillants)	376
3.5.7.1	À N fixé	376
3.5.7.2	Lorsque N fluctue	378
3.5.8	Complément : les paradoxes de l'opérateur phase	379
4	Application I : Amortissement et déplacement d'énergie des modes d'excitation d'un condensat spatialement homogène	381
4.1	Obtention par analyse d'une excitation de Bragg de faible amplitude ϵ	383
4.1.1	Une expérience de pensée	383
4.1.2	Solution de l'équation de Gross-Pitayevski au premier ordre en ϵ	385
4.1.3	Évolution des modes de Bogolioubov au premier ordre en ϵ et amplitudes $\mathcal{A}_{k_1, k_2}^{k_3}, \mathcal{A}_{k_1, k_2, k_3}$	387
4.1.4	Correction $\phi^{(2)}$ à la fonction d'onde de Gross-Pitayevski au premier ordre en ϵ	390
4.1.4.1	Structure du résultat et considérations générales .	390
4.1.4.2	Calcul explicite de $\phi^{(2)}$ aux temps longs	393
4.1.5	Résultat : la première correction à Gross-Pitayevski sur les pulsations propres du condensat	399
4.1.5.1	Trois expressions équivalentes	400

4.1.5.2	Survol de la littérature sur ce sujet	402
4.1.5.3	Conditions d'applicabilité du résultat (4.84)	403
4.2	Obtention et interprétation physique en termes d'interaction entre les quasi-particules de Bogolioubov	405
4.2.1	Signal de Bragg et fonctions de corrélation du système non perturbé	405
4.2.2	Calcul par équation pilote et théorème de régression quantique	407
4.2.2.1	Processus d'interaction entre quasi-particules et amplitudes \mathcal{A} retrouvées	408
4.2.2.2	L'équation pilote dans l'approximation de Born-Markov	410
4.2.2.3	Le théorème de régression quantique	412
4.2.3	Retrouver le résultat de la section 4.1.5	414
4.2.3.1	Un désaccord apparent	414
4.2.3.2	Résolution par inclusion de \hat{H}_4	415
4.2.4	Une condition de validité du résultat : celle de la règle d'or	417
4.3	Quelques résultats explicites sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	419
4.3.1	Synthèse : ensemble des résultats analytiques sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ et illustrations numériques	419
4.3.1.1	Classement par variable fuyante (tendant vers 0 ou $+\infty$)	420
4.3.1.2	Illustrations numériques après réduction à une intégrale simple	423
4.3.1.3	Complément : calcul des intégrales sur λ dans les équations (4.160), (4.162) et (4.167)	429
4.3.2	Cas $T = 0$: développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles q à l'ordre 4; le résultat est réel mais nécessite un développement multi-échelle	429
4.3.2.1	Motivation initiale : quelle vitesse du son?	429
4.3.2.2	Un développement trop naïf sous le signe intégral	431
4.3.2.3	La bonne méthode est multi-échelle	432
4.3.2.4	Un raccordement vérificateur	433
4.3.2.5	Le résultat final à l'ordre 4	435
4.3.3	Cas $T = 0$: développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles q à l'ordre 5; le résultat devient complexe et un logarithme de q apparaît	435
4.3.3.1	Une réelle motivation physique	435
4.3.3.2	Une intégrale modèle pour s'exercer, qui montre l'importance de la courbure de la relation de dispersion	436
4.3.3.3	Retour au vrai problème	442
4.3.3.4	Le résultat à l'ordre 5	447

4.3.4	Cas $T \neq 0$: linéarisation de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles q	447
4.3.4.1	Motivations et vue d'ensemble	447
4.3.4.2	Développement dans la zone $k < Aq$	450
4.3.4.3	Développement dans la zone $k > Aq$	452
4.3.4.4	Une forme finale plus agréable	453
4.3.4.5	À basse température	454
4.3.4.6	À haute température	455
4.3.4.7	À température quelconque	457
4.3.5	Que vaut $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands q ?	458
4.3.5.1	Motivation physique	458
4.3.5.2	Ce que l'intuition suggère sur la partie réelle	459
4.3.5.3	Ce que l'intuition suggère sur la partie imaginaire	461
4.3.5.4	Développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands q à $T = 0$	463
4.3.5.5	À $T > 0$: développement aux grands q de la partie thermique de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	468
4.3.6	Étude de la partie thermique $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)\text{th}}$ de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ à basse et à haute température	471
4.3.6.1	Limite de basse T à nombre d'onde q fixé	472
4.3.6.2	Limite de basse T à rapport $\hbar c_{\text{GP}} q / k_{\text{B}} T$ fixé	473
4.3.6.3	Limite de haute T à nombre d'onde q fixé	476
4.3.6.4	Limite de haute T à rapport $\hbar^2 q^2 / m k_{\text{B}} T$ fixé	479
4.3.7	Complément I : sectorisation des processus de Belyaev et de Landau dans l'espace des vecteurs d'onde	482
4.3.8	Complément II : les singularités aux frontières de l'intégrande de $\int dk$ dans $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	485
4.4	Morale de notre calcul de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	490
	Principales notations	493
	Index	499
	Bibliographie	511