

Table des matières

1	Introduction générale, concepts et outils de base : statistique quantique et interaction	1
1.1	Le gaz parfait de bosons : rappels et mise en bouche	3
1.1.1	Dans l'ensemble grand-canonique	4
1.1.1.1	Condensation par saturation des modes excités	5
1.1.1.2	Signatures à un corps : profil de densité, fonction g_1	8
1.1.1.3	Signatures à deux corps : fonction g_2 , fluctuations géantes de n_0 , bruit de partition symétrique	12
1.1.2	Dans l'ensemble canonique puis microcanonique	14
1.1.2.1	Motivation expérimentale	14
1.1.2.2	Élimination du mode du condensat et approximation du condensat jamais vide	15
1.1.2.3	Fluctuations canoniques de $\hat{N}_0$: premiers moments et distribution de probabilité	16
1.1.2.4	Fluctuations microcanoniques de $\hat{N}_0$	20
1.2	Quel modèle pour l'interaction	22
1.2.1	Le problème de la métastabilité, la solution par l'universalité et la discrétisation de l'espace	22
1.2.2	Ce fil conducteur qu'est la matrice T	27
1.2.3	La notion de longueur de diffusion dans l'onde s	29
1.2.3.1	En dimension trois	29
1.2.3.2	En dimensionnalité réduite	31
1.3	Amplitude de diffusion, matrice T et lien avec les atomes froids pour le modèle de Wigner-Bethe-Peierls d'une interaction de portée nulle	32
1.3.1	En dimension trois	32
1.3.2	En dimensionnalité réduite	37
1.3.2.1	Cas $d = 2$	37
1.3.2.2	Cas $d = 1$	41
1.4	L'interaction de contact la plus simple : le modèle sur réseau	43
1.4.1	Dans l'espace réel discrétisé	43
1.4.2	Dans l'espace des impulsions	45

1.4.3	Matrice T , constante de couplage nue et hamiltonien . . .	46
2	Le régime du condensat pur : l'équation de Gross-Pitayevski	49
2.1	Cas stationnaire	52
2.1.1	En dimension trois	52
2.1.1.1	Une formulation variationnelle	52
2.1.1.2	Cas $a > 0$ et longueur de relaxation ξ	53
2.1.1.3	Cas $a < 0$ et instabilité par effondrement	54
2.1.1.4	Cas piégé et limite de Thomas-Fermi	54
2.1.2	En dimension deux	57
2.1.2.1	Une invariance d'échelle critiquable	57
2.1.2.2	Limite de Thomas-Fermi	59
2.1.3	En dimension un : le soliton brillant	59
2.1.3.1	Analyse critique de la constante de couplage . . .	61
2.1.3.2	Applications : équation d'état, limite de Thomas-Fermi, soliton brillant et brisure d'invariance par translation	62
2.1.3.3	Ce que nous apprend l'ansatz de Bethe : forte ou faible densité, condensat ou pas, soliton quantique, chat de Schrödinger, transition liquide-gaz	64
2.1.4	Complément : condition de minimisation locale de l'énergie	69
2.2	Applications : condensats stationnaires avec des défauts de phase	73
2.2.1	Une équation enrichie par un terme de rotation	73
2.2.2	En dimension un : soliton gris et seconde branche de Lieb	76
2.2.2.1	Une formulation salvatrice	76
2.2.2.2	Intégrabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire	78
2.2.2.3	À la limite thermodynamique	79
2.2.2.4	Obtention de la seconde branche de Lieb par l'énergie	80
2.2.2.5	Obtention de la seconde branche de Lieb par le déphasage	81
2.2.2.6	Et dans le cas attractif?	83
2.2.3	En dimension deux : condensats piégés tournants avec des tourbillons quantiques	84
2.2.3.1	Une fonction d'essai de Thomas-Fermi avec tourbillons	85
2.2.3.2	Énergie moyenne de n tourbillons	87
2.2.3.3	Discussion physique à Ω fixé	89
2.2.3.4	Discussion physique à L_z fixé pour $n = 1$	92
2.2.3.5	Ni des condensats au sens strict ni des superfluides	93
2.2.4	En dimension trois : le tourbillon à ligne de cœur courbée .	95

2.2.4.1	Un raisonnement simple par découpage en tranches	95
2.2.4.2	Des prédictions à l'épreuve du numérique	97
2.2.4.3	À moment cinétique L_z fixé	98
2.3	Cas dépendant du temps	99
2.3.1	Forme de l'équation et de ses réductions dimensionnelles .	101
2.3.2	Les équations hydrodynamiques comme un équivalent de l'approximation de Thomas-Fermi dans le cas dépendant du temps, et comment les résoudre	102
2.3.2.1	Obtention par passage en représentation phase-module	102
2.3.2.2	Solution des équations hydrodynamiques	104
2.3.2.3	En point de vue de Lagrange	106
2.3.2.4	Équations hydrodynamiques linéarisées	107
2.3.2.5	Modes propres en l'absence de rotation	109
2.3.3	Quelques solutions exactes de l'équation de Gross-Pitayevski	115
2.3.3.1	Cas 1D : mettre en mouvement le soliton brillant .	115
2.3.3.2	Cas 2D : se ramener à un piège de raideur constante par changement de jauge et d'échelle	117
2.3.3.3	Cas général : modifier le mouvement d'ensemble dans un piège	121
2.3.4	Application : élucidation du mécanisme de formation des réseaux de tourbillons dans l'expérience de l'ENS	122
2.3.4.1	La procédure expérimentale de l'ENS et l'échec des scénarios thermodynamiques	122
2.3.4.2	Un nouveau mécanisme en deux temps, résonance et instabilité dynamique	125
2.3.4.3	Une procédure vérificatoire : mise en rotation lente	129
2.3.4.4	Le scénario thermodynamique à la Landau, suite et fin	134
2.3.4.5	Moralité	136
2.3.4.6	Complément : solutions stationnaires générales des équations hydrodynamiques dans un piège harmonique tournant autour d'un de ses axes propres	137
2.3.5	Étude de la stabilité dynamique	140
2.3.5.1	Un calcul très simple	141
2.3.5.2	Une obtention plus rigoureuse de $\mathcal{L}(t)$	143
2.3.5.3	Cas indépendant du temps : modes propres normaux et anormaux, transformation de Bogolioubov, stabilité dynamique et thermodynamique . .	144
2.3.5.4	Cas dépendant du temps	153

2.4	Limitations à la validité de l'équation de Gross-Pitayevski pour l'évolution temporelle	154
2.4.1	Évolution d'un soliton brillant « au repos »	155
2.4.1.1	Par équations de Heisenberg pour le champ quantique	156
2.4.1.2	Par étude linéaire de stabilité pour le champ classique	157
2.4.2	Un mécanisme de brouillage de phase omis par l'équation de Gross-Pitayevski	159
2.4.2.1	Modèle à deux modes	159
2.4.2.2	Champ classique contre champ quantique	160
2.4.2.3	Amélioration du champ classique par ajout d'un bruit de Wigner dans l'état initial	163
2.4.3	Généralité de ce mécanisme de brouillage : mode pulsant dans un piège harmonique isotrope	164
2.4.3.1	Excitation par changement de raideur du piège	164
2.4.3.2	Stabilité du mode pulsant : effet des fluctuations du facteur d'échelle	166
2.4.3.3	Stabilité des autres modes	169
2.4.4	Absence du mécanisme d'émission spontanée dans l'équation de Gross-Pitayevski	170
2.4.4.1	Une analogie avec le rayonnement quantique	170
2.4.4.2	Déplétion quantique rapide dans un modèle à deux modes	171
2.4.4.3	En champ classique amélioré par bruit de Wigner	175
2.4.5	Un autre exemple, multimode, dominé par l'émission spontanée de paires : les faisceaux jumeaux	176
2.4.5.1	Modèle 1D avec constante de couplage modulée en temps	176
2.4.5.2	Analyse linéaire de stabilité en champ classique	178
2.4.5.3	Propriétés statistiques des faisceaux jumeaux	181
2.4.6	Moralité de la discussion sur la validité de Gross-Pitayevski	182

3	La théorie de Bogolioubov : premières corrections au condensat pur en dimension trois et opérateur phase du condensat	183
3.1	Idée générale de la méthode de Bogolioubov	184
3.1.1	Le champ non condensé $\hat{\psi}_\perp$ comme perturbation	184
3.1.2	Mise en œuvre : développement de l'hamiltonien, élimination du mode du condensat, opérateur phase $\hat{\theta}$ et champ non condensé redéfini $\hat{\Lambda}$, correction à Gross-Pitayevski	185
3.1.3	Une percée historique	188
3.2	Cas stationnaire spatialement homogène	189

3.2.1	Cas du modèle sur réseau	190
3.2.1.1	Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov et premières interprétations physiques	190
3.2.1.2	Un développement caché	193
3.2.1.3	Forme finale de l'hamiltonien de Bogolioubov; spectre d'excitation, énergie de l'état fondamental . . .	195
3.2.2	Pour un vrai potentiel d'interaction $V(\mathbf{r})$	199
3.2.3	Applications simples : statistique de n_0 , densité non condensée anormale, équation d'état, distribution et corrélations en impulsion, fonctions g_1 et g_2 , cohérence temporelle du champ non condensé	202
3.2.3.1	Statistique de n_0 à l'équilibre	202
3.2.3.2	La densité non condensée anormale ρ_{an}	210
3.2.3.3	L'équation d'état du gaz de bosons en interaction faible à l'approximation de Bogolioubov	211
3.2.3.4	Fonction de cohérence du premier ordre g_1 et distribution en vecteur d'onde $n_{\mathbf{k}}^{cin}$ du gaz; fonction de corrélation dans l'espace des impulsions	221
3.2.3.5	Fonction de distribution de paires g_2	225
3.2.3.6	Fonction de cohérence spatio-temporelle g_1 dans l'approximation de Bogolioubov	229
3.2.4	Le cas à part de la superfluidité	237
3.2.4.1	Superfluidité n'est pas condensation	237
3.2.4.2	La vitesse critique de Landau et au-delà	238
3.2.4.3	Les courants métastables et leur analyse de Bogolioubov	242
3.2.4.4	Définition thermodynamique de la fraction normale	249
3.2.4.5	Variante énergétique et borne de Leggett	252
3.2.5	Complément I : exposé et mise en œuvre sur la densité non condensée normale et anormale d'une méthode générale de développement à haute et à basse température, et mise en difficulté de la théorie de Hartree-Fock	256
3.2.5.1	La densité non condensée	256
3.2.5.2	À l'ordre dominant en température	258
3.2.5.3	Comment aller au-delà de l'ordre dominant	259
3.2.5.4	La densité non condensée anormale	262
3.2.5.5	Quel est l'intérêt du développement à haute température?	264
3.2.5.6	Application : mise de Hartree-Fock en difficulté . .	264
3.2.6	Complément II : adiabaticité quantique et adiabaticité thermodynamique	267

3.3	Cas stationnaire dans un piège	271
3.3.1	Motivation et spécificités	271
3.3.1.1	Quel mode spatial du condensat?	271
3.3.1.2	Quels modes de Bogolioubov? Limite semi-classique	272
3.3.2	Un cas simplifié pour comprendre pourquoi les termes d'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$ dans l'hamiltonien peuvent influencer sur des valeurs moyennes à l'ordre 2	274
3.3.2.1	Calcul de Bogolioubov pour un degré de liberté	274
3.3.2.2	Moralité	277
3.3.3	Approximation cubique de l'hamiltonien	277
3.3.3.1	Première étape de la cubisation	277
3.3.3.2	Deuxième étape de la cubisation	278
3.3.3.3	Le résultat final et son interprétation	279
3.3.4	Lien entre $\hat{\Lambda}^{(2)}$, $\langle \hat{\Lambda}^{(1)} \rangle$ et $\phi_{\perp}^{(2)}$	282
3.3.5	Développement explicite de la théorie à l'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	283
3.3.5.1	Vue d'ensemble sur la suite du développement en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	283
3.3.5.2	À l'ordre 0 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	283
3.3.5.3	À l'ordre 1 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$	284
3.3.5.4	À l'ordre 2 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: l'hamiltonien de Bogolioubov discret et sa forme réduite	284
3.3.5.5	À l'ordre 3 en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: fonction d'onde du condensat au-delà de Gross-Pitayevski	290
3.3.5.6	Calcul de $\langle \hat{\Lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle^{(2)}_{\hat{H}^{(0-2)} + \hat{H}^{(3)}}$ et interprétation physique par déplétion-interaction	292
3.3.6	Développement de g_0 à l'ordre un en a/b et passage à la limite continue (ou d'une interaction de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$	296
3.3.6.1	Contexte et motivation	296
3.3.6.2	Géométrie considérée pour le passage à la limite continue	297
3.3.6.3	Cas de l'énergie de l'état fondamental	298
3.3.6.4	Cas de la fonction d'onde du condensat	301
3.3.7	Synthèse : formulation directe dans l'espace continu de la théorie de Bogolioubov indépendante du temps	303
3.3.7.1	Motivation et obtention	303
3.3.7.2	Cas de $\phi^{(2)}$, première correction à Gross-Pitayevski sur le mode spatial du condensat	305
3.3.7.3	Cas de l'hamiltonien de Bogolioubov et de son niveau d'énergie fondamental	308
3.3.7.4	Cas d'une observable plus générale	310

3.3.7.5	Récapitulatif en espace continu : principales étapes et équations	310
3.4	La théorie de Bogolioubov dans le cas dépendant du temps	312
3.4.1	Motivations physiques et vue d'ensemble	312
3.4.1.1	Une question utile et un problème fondamental	312
3.4.1.2	Un premier progrès sur Gross-Pitayevski	313
3.4.1.3	Un second progrès sur Gross-Pitayevski	314
3.4.1.4	Vue d'ensemble de la méthode	315
3.4.2	Équation du mouvement pour le champ $\hat{\Lambda}$ à l'ordre 2 en $f_{nc}^{1/2}$	315
3.4.3	Fonction d'onde du condensat à l'ordre 0 en $f_{nc}^{1/2}$	321
3.4.4	Évolution du champ non condensé et correction à $\phi^{(0)}$ à l'ordre 1 en $f_{nc}^{1/2}$	323
3.4.5	Contribution d'ordre 2 en $f_{nc}^{1/2}$ à la fonction d'onde du condensat	325
3.4.6	Développement de g_0 au premier ordre en a/b et limite continue (ou de portée négligeable) $b/\xi \rightarrow 0$	327
3.4.7	Synthèse : formulation directe de la théorie de Bogolioubov dépendant du temps dans l'espace continu	331
3.4.7.1	Quel petit paramètre?	332
3.4.7.2	Ordre 0 : l'équation de Gross-Pitayevski retrouvée	332
3.4.7.3	Ordre 1 : des modes de quasi-particules sans interaction	332
3.4.7.4	Ordre 2 : première correction à Gross-Pitayevski	335
3.4.7.5	De l'importance de $\phi_{\perp}^{(2)}$ dans les observables	336
3.4.7.6	Et si N fluctue?	338
3.4.8	Lien avec la physique de champ classique et l'approximation de la troncature de Wigner	339
3.4.9	Les différents scénarios de sortie du régime de validité de l'équation de Gross-Pitayevski dépendant du temps	344
3.4.9.1	Mise en échec par divergence de la déplétion	345
3.4.9.2	Mise en échec au niveau de $\phi^{(2)}$	348
3.5	L'opérateur phase du condensat	349
3.5.1	Introduction de l'opérateur phase $\hat{\theta}_{\phi}$	350
3.5.2	Équation d'évolution de $\hat{\theta}_{\phi}$ lorsque $\partial_t \phi \equiv 0$	352
3.5.3	Lissage temporel $\overline{d\hat{\theta}_{\phi}/dt}^t$ de l'équation d'évolution	354
3.5.3.1	Motivation et mise en œuvre	354
3.5.3.2	Lissage des termes quadratiques dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$	356
3.5.3.3	Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_{\phi}/dt$: il faut connaître les termes quadratiques $\hat{S}^{(2)}$ de $d\hat{\Lambda}_{\phi(0)}/dt$	357
3.5.3.4	Lissage de l'opérateur source $\hat{S}^{(2)}$ et d'un opérateur $\hat{\phi}^{(2)}$	359

3.5.3.5	Lissage des termes linéaires dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$: suite et fin	360
3.5.4	Reconnaître dans $d\hat{\theta}_\phi/dt$ un opérateur potentiel chimique	362
3.5.4.1	Reconnaître des dérivées par rapport à N	362
3.5.4.2	Triturer les dérivées en trois étapes	364
3.5.4.3	Regroupement, résultat final et interprétation . . .	366
3.5.5	Au-delà de l'approximation de Bogolioubov : le cas homogène spatialement	367
3.5.5.1	Intérêt, idée et mise en œuvre du calcul	367
3.5.5.2	Le résultat ; ses termes diagonaux ; ses termes non diagonaux, diffusion de phase et lissage temporel	369
3.5.6	Cas où le nombre de particules fluctue	371
3.5.6.1	Motivation	371
3.5.6.2	Extension du calcul de $d\hat{\theta}_\phi/dt$ des sections précédentes	372
3.5.6.3	Simplification supplémentaire pour un grand système	374
3.5.6.4	Le résultat et son application à un mélange statistique d'ensembles canoniques	375
3.5.7	Dans le cas spatialement homogène, sans lissage temporel (avec les termes oscillants)	376
3.5.7.1	À N fixé	376
3.5.7.2	Lorsque N fluctue	378
3.5.8	Complément : les paradoxes de l'opérateur phase	379

4 Application I : Amortissement et déplacement d'énergie des modes d'excitation d'un condensat spatialement homogène **381**

4.1	Obtention par analyse d'une excitation de Bragg de faible amplitude ϵ	383
4.1.1	Une expérience de pensée	383
4.1.2	Solution de l'équation de Gross-Pitayevski au premier ordre en ϵ	385
4.1.3	Évolution des modes de Bogolioubov au premier ordre en ϵ et amplitudes $\mathcal{A}_{k_1, k_2}^{k_3}, \mathcal{A}_{k_1, k_2, k_3}$	387
4.1.4	Correction $\phi^{(2)}$ à la fonction d'onde de Gross-Pitayevski au premier ordre en ϵ	390
4.1.4.1	Structure du résultat et considérations générales .	390
4.1.4.2	Calcul explicite de $\phi^{(2)}$ aux temps longs	393
4.1.5	Résultat : la première correction à Gross-Pitayevski sur les pulsations propres du condensat	399
4.1.5.1	Trois expressions équivalentes	400

4.1.5.2	Survol de la littérature sur ce sujet	402
4.1.5.3	Conditions d'applicabilité du résultat (4.84)	403
4.2	Obtention et interprétation physique en termes d'interaction entre les quasi-particules de Bogolioubov	405
4.2.1	Signal de Bragg et fonctions de corrélation du système non perturbé	405
4.2.2	Calcul par équation pilote et théorème de régression quantique	407
4.2.2.1	Processus d'interaction entre quasi-particules et amplitudes $\mathcal{A}$ retrouvées	408
4.2.2.2	L'équation pilote dans l'approximation de Born-Markov	410
4.2.2.3	Le théorème de régression quantique	412
4.2.3	Retrouver le résultat de la section 4.1.5	414
4.2.3.1	Un désaccord apparent	414
4.2.3.2	Résolution par inclusion de $\hat{H}_4$	415
4.2.4	Une condition de validité du résultat : celle de la règle d'or	417
4.3	Quelques résultats explicites sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	419
4.3.1	Synthèse : ensemble des résultats analytiques sur $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ et illustrations numériques	419
4.3.1.1	Classement par variable fuyante (tendant vers 0 ou $+\infty$)	420
4.3.1.2	Illustrations numériques après réduction à une intégrale simple	423
4.3.1.3	Complément : calcul des intégrales sur λ dans les équations (4.160), (4.162) et (4.167)	429
4.3.2	Cas $T = 0$: développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles q à l'ordre 4 ; le résultat est réel mais nécessite un développement multiéchelle	429
4.3.2.1	Motivation initiale : quelle vitesse du son ?	429
4.3.2.2	Un développement trop naïf sous le signe intégral	431
4.3.2.3	La bonne méthode est multiéchelle	432
4.3.2.4	Un raccordement vérificateur	433
4.3.2.5	Le résultat final à l'ordre 4	435
4.3.3	Cas $T = 0$: développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles q à l'ordre 5 ; le résultat devient complexe et un logarithme de q apparaît	435
4.3.3.1	Une réelle motivation physique	435
4.3.3.2	Une intégrale modèle pour s'exercer, qui montre l'importance de la courbure de la relation de dispersion	436
4.3.3.3	Retour au vrai problème	442
4.3.3.4	Le résultat à l'ordre 5	447

4.3.4	Cas $T \neq 0$: linéarisation de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux faibles q	447
4.3.4.1	Motivations et vue d'ensemble	447
4.3.4.2	Développement dans la zone $k < Aq$	450
4.3.4.3	Développement dans la zone $k > Aq$	452
4.3.4.4	Une forme finale plus agréable	453
4.3.4.5	À basse température	454
4.3.4.6	À haute température	455
4.3.4.7	À température quelconque	457
4.3.5	Que vaut $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands q ?	458
4.3.5.1	Motivation physique	458
4.3.5.2	Ce que l'intuition suggère sur la partie réelle	459
4.3.5.3	Ce que l'intuition suggère sur la partie imaginaire	461
4.3.5.4	Développement de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ aux grands q à $T = 0$	463
4.3.5.5	À $T > 0$: développement aux grands q de la partie thermique de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	468
4.3.6	Étude de la partie thermique $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)\text{th}}$ de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$ à basse et à haute température	471
4.3.6.1	Limite de basse T à nombre d'onde q fixé	472
4.3.6.2	Limite de basse T à rapport $\hbar c_{\text{GP}} q / k_{\text{B}} T$ fixé	473
4.3.6.3	Limite de haute T à nombre d'onde q fixé	476
4.3.6.4	Limite de haute T à rapport $\hbar^2 q^2 / m k_{\text{B}} T$ fixé	479
4.3.7	Complément I : sectorisation des processus de Belyaev et de Landau dans l'espace des vecteurs d'onde	482
4.3.8	Complément II : les singularités aux frontières de l'inté- grande de $\int dk$ dans $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	485
4.4	Morale de notre calcul de $\omega_{\mathbf{q}}^{(2)}$	490

5 Application II : La compression de spin et ses limites, et les états chats de Schrödinger 537

5.1	Introduction	537
5.1.1	Principe d'une horloge atomique	537
5.1.2	Le bruit quantique standard	538
5.1.3	Les états comprimés	540
5.1.4	Quelques points à approfondir	540
5.1.5	Objectifs du présent chapitre	541
5.1.5.1	Un spin géant grâce aux condensats...	541
5.1.5.2	... mais un problème multimode	542
5.2	Compression dans le modèle de Kitagawa-Ueda	543
5.2.1	Position du problème	543
5.2.2	Solution des équations du mouvement opératoriels	544
5.2.3	Représentation bosonique et états de phase	545
5.2.4	Spin moyen, brouillage et résurgence, chat de Schrödinger	547

5.2.5	Variances et covariances de spin	548
5.2.6	Optimisation de $\Delta S_{\perp, \min}$ sur le temps	550
5.2.6.1	Une première échelle de temps	551
5.2.6.2	Une seconde échelle de temps	552
5.2.7	Optimisation de $\xi^2(t)$ sur le temps	553
5.3	Effet d'un environnement aléatoire stationnaire déphasant	556
5.3.1	Motivation et présentation du modèle	556
5.3.2	Fluctuations de Larmor et facteur de compression du spin	557
5.3.3	Quelle loi d'échelle pour les fluctuations de Larmor aux grands N ?	559
5.3.4	Optimisation de la compression sur le temps	559
5.3.4.1	Ce à quoi on peut s'attendre	559
5.3.4.2	Analyse à la première échelle de temps	560
5.3.4.3	Analyse à la seconde échelle de temps	561
5.3.4.4	D'un régime à l'autre : compétition entre bruit et limite thermodynamique	563
5.4	Mise en œuvre dans des condensats atomiques gazeux dans l'ap- proximation à deux modes	564
5.4.1	Dynamique non linéaire dans le cas homogène	566
5.4.2	Dynamique non linéaire dans le cas piégé	568
5.4.2.1	Modes ϕ_σ stationnaires	568
5.4.2.2	Modes ϕ_σ instationnaires, difficultés et échappa- toire	571
5.4.3	Conséquences physiques des hamiltoniens modèles (5.114) et (5.127) et des fluctuations de N	572
5.5	Étude réaliste et multimode des limites de la compression de spin dans des condensats atomiques gazeux	575
5.5.1	Considérations simples et effet des pertes	575
5.5.1.1	Motivations et un calcul heuristique de la limite de compression avec les opérateurs phases $\hat{\theta}_\sigma$	575
5.5.1.2	Effet des pertes de particules dans le cas $g_{aa} = g_{bb}$ et $g_{ab} = 0$	578
5.5.2	L'étude multimode par Bogolioubov proprement dite	584
5.5.2.1	Description de la configuration et de la procédure expérimentale	584
5.5.2.2	Comment mener le calcul : contextualisation de la méthode de Bogolioubov, équation d'évolution des variables $\hat{b}_{\sigma k}$, $\hat{b}_{\sigma k}^\dagger$ et $\hat{\theta}_{\sigma \bar{\phi}}$ et leurs valeurs à $t = 0^+$	587
5.5.2.3	Les observables à $t > 0$ participant de la compres- sion de spin	593
5.5.2.4	Le résultat final sur le facteur de compression de spin	603

5.5.2.5	Que se passe-t-il aux temps longs $t > 1/\gamma_{\text{coll}}$? Limite ergodique	605
5.5.3	Complément : effet du branchement de l'interaction sur un gaz condensé	611
5.5.4	Application de la théorie multimode au cas spatialement homogène	613
5.5.4.1	L'optimum de compression	613
5.5.4.2	La dépendance temporelle du facteur de compression	616
5.5.5	Application de la théorie multimode au cas piégé : la limite de la compression de spin dans un piège harmonique isotrope par BKW	622
5.5.5.1	Motivation, formulation du problème, limite macroscopique	622
5.5.5.2	Approximation BKW pour les modes de Bogolioubov	625
5.5.5.3	Interprétation classique	627
5.5.5.4	La condition de quantification BKW des niveaux d'énergie	631
5.5.5.5	Justification du coefficient de réflexion $(-i)$ des ondes BKW aux points de rebroussement	633
5.5.5.6	Mise en œuvre de BKW dans le calcul de ξ_{opt}^2	637
5.5.6	Complément : calcul des intégrales semi-classiques I, J, K	641
5.5.6.1	Cas $1 < 2j - 1 < \check{\epsilon} < j^2$: trajectoires externes	642
5.5.6.2	Cas $0 < j^2 < \check{\epsilon}$: trajectoires hybrides	643
5.5.7	Complément : calcul de χ_{Bog} , valeurs de $\hat{D}$ et de sa variance, expression de $\hat{C}_{\text{osc}}(t)$ dans le cas homogène	644
5.5.7.1	Calcul de χ_{Bog}	645
5.5.7.2	Une retombée : valeur de l'opérateur $\hat{D}$ et de sa variance	647
5.5.7.3	Une autre retombée : expression de l'opérateur $\hat{C}_{\text{osc}}(t)$ dans le cas spatialement homogène	648
5.6	États chats de Schrödinger et résurgence de phase	650
5.6.1	À la mi-temps entre brouillage et résurgence	650
5.6.2	Les prédictions du modèle à deux modes de Kitagawa-Ueda	652
5.6.3	Comment tirer parti de l'état chat de Schrödinger dans une expérience d'horloge?	654
5.6.4	Effet des pertes de particules	656
5.6.4.1	Fidélité au chat de Schrödinger	657
5.6.4.2	Résurgence du spin moyen	659
5.6.5	Effet d'une température initiale non nulle : analyse multimode dans l'approximation de Bogolioubov	662

5.6.5.1	Motivation	662
5.6.5.2	Protocole multimode proposé	662
5.6.5.3	Évolution sur une réalisation de l'expérience . . .	663
5.6.5.4	Fidélité au chat de Schrödinger spinoriel	667
5.6.5.5	Contrainte sur la température dans une expérience	671
5.6.5.6	Une belle estimation-minoration	672
5.6.5.7	Fidélité au chat de Schrödinger orbito-spinoriel .	675
5.6.5.8	Résurgences du spin moyen à $T \neq 0$	675

6	Cohérence temporelle d'un condensat dans un gaz isolé : brouillage de phase dû aux fluctuations des quantités conservées et diffusion de phase due aux interactions entre les quasi-particules	681
6.1	Introduction, motivations, vue d'ensemble et mesurabilité	681
6.1.1	Un parallèle entre cohérence spatiale et cohérence temporelle : condensation dans l'espace-temps	681
6.1.2	Objectif et vue d'ensemble; brouillage contre diffusion . .	683
6.1.3	Un problème peu étudié	686
6.1.4	Une fonction de cohérence $g_1(t)$ mesurable	687
6.2	Définition du problème, sa réduction à la dynamique de phase et les résultats centraux sur $g_1(t)$	688
6.2.1	L'état du système	688
6.2.2	Quelques simplifications : omission des fluctuations de $\hat{n}_\phi$, approximation gaussienne	689
6.2.3	Réduction à l'ensemble microcanonique : fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$, variance du déphasage, coefficient de diffusion D et temps de retard t_0	691
6.2.4	Fonction $g_1(t)$ dans l'ensemble statistique généralisé; étalement balistique de coefficient A	694
6.2.5	Résultats explicites sur A , D , t_0 et la variance du déphasage	696
6.2.5.1	Résultats sur A	696
6.2.5.2	Résultats sur D et t_0	698
6.2.6	Conséquences sur l'étalement du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$. .	701
6.3	Calcul de la fonction de corrélation $C(t)$ de $d\hat{\theta}/dt$	702
6.3.1	Vue d'ensemble	702
6.3.1.1	Tout repose sur $C(t)$	702
6.3.1.2	Tout se ramène au microcanonique	704
6.3.1.3	Une décorrélation évidente... mais fausse!	705
6.3.2	Dans l'ensemble microcanonique par équations cinétiques	706
6.3.2.1	Position du problème	706
6.3.2.2	Les équations cinétiques	708
6.3.2.3	Leur linéarisation, leur solution stationnaire . . .	709
6.3.2.4	L'expression formelle de $C_{mc}(\tau)$	711

6.3.2.5	Dans le sous-espace des fluctuations de moment cinétique nul	717
6.3.2.6	Dépendance en temps de C_{mc}	718
6.3.2.7	Complément : comportement de $C_{mc}(\tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$	720
6.3.3	Dans un ensemble statistique généralisé à N fixé	723
6.3.3.1	Ce qui ressemble au cas microcanonique	723
6.3.3.2	Ce qui diffère du cas microcanonique	724
6.3.4	La valeur de $C(+\infty)$: ergodicité quantique contre équation pilote markovienne	727
6.3.4.1	Par ergodicité quantique c'est-à-dire microcanonicité des états propres	727
6.3.4.2	Échec de l'approximation de Bogolioubov sur les états propres	729
6.3.4.3	Échec de l'équation pilote markovienne	731
6.4	Études complémentaires et vérificatoires de la fonction $g_1(t)$ dans l'ensemble microcanonique	733
6.4.1	Simulations numériques de champ classique	734
6.4.2	Méthode de la résolvante	736
6.4.2.1	Position du problème	736
6.4.2.2	Lien de $g_{\theta,\lambda}(t)$ avec une amplitude de probabilité de présence dans $ \psi_\lambda\rangle$	737
6.4.2.3	Un raisonnement simple par règle d'or de Fermi	738
6.4.2.4	Au-delà de la règle d'or de Fermi : la méthode de la résolvante	741
6.4.2.5	La diffusion de phase résulte de l'existence d'un pôle	745
6.4.3	Complément : égalité des coefficients de diffusion issus de la règle d'or et de la résolvante aux temps extensivement longs	745

7 Une formulation grand-canonique de la méthode de Bogolioubov et calcul de l'énergie de l'état fondamental à l'ordre de Wu 747

7.1	Introduction, motivation et avantages grand-canoniques	747
7.2	Hamiltonien modèle et méthode de développement	750
7.2.1	L'hamiltonien grand-canonique du modèle sur réseau	750
7.2.2	Élimination du mode du condensat	751
7.2.2.1	Une procédure bien rôdée...	751
7.2.2.2	... mais que vaut N ?	752
7.3	À l'ordre deux en $f_{nc}^{1/2}$: l'ordre de Bogolioubov	754
7.3.1	L'hamiltonien quadratique et sa forme réduite	754

7.3.2	L'équation d'état grand-canonique et la fraction non condensée	756
7.4	À l'ordre quatre en $f_{\text{nc}}^{1/2}$: l'ordre de Wu pour le niveau d'énergie fondamental	760
7.4.1	Motivation	760
7.4.2	Correction de portée effective de l'interaction à l'ordre de Bogolioubov	761
7.4.3	L'hamiltonien grand-canonique à l'ordre $(f_{\text{nc}}^{1/2})^4$	763
7.4.4	Correction au grand potentiel de Bogolioubov à $T = 0$. . .	764
7.4.4.1	Une application de la théorie des perturbations . .	764
7.4.4.2	Passage à la limite continue $b/\xi \rightarrow 0$	768
7.4.4.3	Introduction de l'hypervolume de diffusion à trois corps	769
7.4.4.4	Résultat final à l'ordre f_{nc}^2	772
7.4.4.5	Discussion critique du résultat	773
7.4.5	Complément I : Correction $\Omega^{(4)}(\mu)$ au grand potentiel de Bogolioubov à la limite continue $b/\xi \rightarrow 0$ du modèle sur réseau	775
7.4.5.1	Partie convergente C_{conv}^{Ω} , partie divergente $J_{\mathcal{V}}(\epsilon)$.	775
7.4.5.2	Étude de $J_{\mathcal{V}}^{(1)}(\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$	777
7.4.5.3	Étude de $J_{\mathcal{V}}^{(2)}(\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$	779
7.4.5.4	Conclusion sur $\Omega^{(4)}(\mu)$	782
7.4.6	Complément II : Hypervolume de diffusion à trois corps D du modèle sur réseau dans le régime de Born	782
7.4.6.1	L'hamiltonien modèle	783
7.4.6.2	Forme de l'état de diffusion : seule fonction inconnue $f(\mathbf{r})$	783
7.4.6.3	Une équation fermée sur $\hat{f}(\mathbf{k})$	785
7.4.6.4	Développement de Born de la partie régulière $\phi(\mathbf{k})$ de $\hat{f}(\mathbf{k})$	786
7.4.6.5	Le résultat cherché	789
7.4.7	Appendice au complément II de la section 7.4.6	789
7.4.7.1	Développement de $A(\mathbf{k}_1)$	789
7.4.7.2	Développement de $B(\mathbf{k}_1)$	790
7.4.7.3	Développement de $J(\mathbf{k}_1)$	790
7.4.7.4	Développement de $K(\mathbf{k}_1)$	792

8 Cas de la dimensionalité réduite : étude des quasi-condensats par la méthode de Bogolioubov en représentation phase-module 795

8.1	Brève présentation et vue d'ensemble	795
8.1.1	Plus qu'un pôle reflet des condensats, les quasi-condensats	795
8.1.2	Quel angle d'attaque théorique?	796

8.1.3	En prise directe sur les expériences	797
8.2	Position du problème et régime considéré	799
8.2.1	À l'équilibre thermique grand-canonique	799
8.2.2	Les quasi-condensats en six conditions	800
8.3	Défrichage de la dimensionalité réduite avec la méthode de Bogolioubov ordinaire	802
8.3.1	La densité non condensée	803
8.3.1.1	Discussion selon la dimensionalité	804
8.3.1.2	À propos du tableau 8.1	805
8.3.1.3	Moralité sur la longueur de cohérence	806
8.3.2	La fonction de distribution de paires	806
8.3.2.1	Contribution quantique, contribution thermique	807
8.3.2.2	Moralité sur les fluctuations de densité	808
8.3.3	En conclusion du défrichage	809
8.4	Construction de l'hamiltonien modèle	809
8.4.1	Longueur de diffusion et matrice T à basse énergie en dimension quelconque	809
8.4.1.1	Motivation et définition opérationnelle	809
8.4.1.2	Modèle de portée nulle à basse énergie	811
8.4.1.3	Quelques particularités de la dimension un	814
8.4.2	Modèle sur réseau : pas, constante de couplage et hamiltonien	816
8.4.2.1	Le modèle	816
8.4.2.2	La constante de couplage nue g_0 via la matrice T	817
8.4.2.3	Constante g_0 , longueur de diffusion et portée effective à 3D	819
8.4.2.4	Constante g_0 , longueur de diffusion et portée effective à 2D	820
8.4.2.5	Constante g_0 , longueur de diffusion et portée effective à 1D	822
8.4.2.6	L'hamiltonien en seconde quantification	823
8.4.2.7	Comment choisir le pas du réseau	825
8.5	Mise en œuvre de la méthode de Bogolioubov phase-module	826
8.5.1	Passage en représentation phase-module et idée de la méthode	826
8.5.2	Développement de l'hamiltonien $\hat{H}_{GC}$ ordre par ordre en $\delta\hat{\rho}/\rho \approx b \mathbf{grad}\hat{\theta} \approx \epsilon$	829
8.5.2.1	Ordre 0 en ϵ	830
8.5.2.2	Ordre 1 en ϵ	831
8.5.2.3	Ordre 2 en ϵ	831
8.5.2.4	Ordre 3 en ϵ	832

8.5.3	Résolution itérative jusqu'à l'ordre ϵ^2 et diagonalisation de $\hat{H}_2$	833
8.5.3.1	Ordre ϵ^0 : fonction d'onde macroscopique et équation de Schrödinger non linéaire	833
8.5.3.2	Ordre ϵ^1 : rien	834
8.5.3.3	Ordre ϵ^2 : champs $\hat{B}(\mathbf{r})$ et $\hat{\Lambda}_{QC}(\mathbf{r})$, variables collectives $\hat{P}$ et $\hat{Q}$	835
8.5.3.4	Ordre ϵ^2 : transformation de Bogolioubov, développement modal, spectre d'excitation, interprétation de $\hat{P}$ et $\hat{Q}$	837
8.5.3.5	En conclusion	841
8.6	Applications de la théorie des quasi-condensats	841
8.6.1	Le grand potentiel Ω	841
8.6.2	Densité moyenne et équation d'état du gaz	844
8.6.2.1	De la nécessité d'inclure une correction cubique	844
8.6.2.2	Calcul direct de $\langle \delta \hat{\rho} \rangle_3$	845
8.6.2.3	Une autre méthode, plus belle	847
8.6.2.4	Une troisième voie, plus directe	848
8.6.2.5	Équation d'état : les résultats, leur comportement à haute et à basse température	848
8.6.2.6	Approximation de Thomas-Fermi à 2D	851
8.6.3	Fonction de distribution de paires g_2 : expression formelle à l'ordre ϵ^2	851
8.6.3.1	En termes du champ $\hat{\rho}(\mathbf{r})$	852
8.6.3.2	Transformations habiles et résultat	852
8.6.3.3	Quelle variance de N ?	853
8.6.3.4	Lien avec la théorie de Bogolioubov ordinaire	854
8.6.4	Fonction de cohérence du premier ordre g_1 : expression formelle à l'ordre ϵ^2	854
8.6.4.1	En termes des champs $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ et $\hat{\theta}(\mathbf{r})$	855
8.6.4.2	Dans l'état thermique de $\hat{H}_2$	855
8.6.4.3	Correction due à $\hat{H}_3$	856
8.6.4.4	Synthèse et forme provisoire	859
8.6.4.5	Un facteur $1/\rho_0$ embarrassant; forme finale	861
8.6.4.6	Vue d'ensemble des résultats; comportement à grande distance	862
8.6.4.7	Formulaire de Wick	865
8.6.5	À quelle condition les fluctuations de densité et le gradient de phase sont-ils faibles?	866
8.6.5.1	Les fluctuations de densité	867
8.6.5.2	Le gradient de phase	867
8.7	Analyse détaillée des fonctions de corrélation g_1 et g_2	868

8.7.1	À la limite thermodynamique pour un espace continu . . .	868
8.7.2	Étude à grande distance à $T = 0$	870
8.7.2.1	Obtention des développements asymptotiques . .	871
8.7.2.2	Une application physique simple : fluctuations du nombre de particules dans une boule	875
8.7.3	Étude à grande distance à $T > 0$	877
8.7.3.1	Cas de $g_1^{\text{Bog}}(\mathbf{r})$	877
8.7.3.2	Cas de $g_2^{\text{QC}}(\mathbf{r})$	882
8.7.4	Étude à courte distance	887
8.7.4.1	Cas de $g_2^{\text{QC}}(\mathbf{r})$; coefficient de contact $\mathcal{C}$ et théo- rème de Hellmann-Feynman	887
8.7.4.2	Cas de $g_1^{\text{Bog}}(\mathbf{r})$; distribution en impulsion; lien avec $\mathcal{C}$ et avec l'énergie moyenne	893
8.8	Densité normale, transition BKT, superfluidité locale ou globale .	898
8.8.1	La densité normale	898
8.8.1.1	Définition	898
8.8.1.2	Expression à l'ordre de Bogolioubov	899
8.8.1.3	Comportement aux limites en température	900
8.8.1.4	Une densité normale locale	901
8.8.2	La transition BKT	902
8.8.2.1	Présentation sommaire : discontinuité universelle de $\rho_s(T)$, tourbillons quantiques et énergie d'acti- vation	902
8.8.2.2	Température de transition à l'ordre de Bogoliou- bov : une estimation grossière?	904
8.8.3	Quasi-condensats en mouvement et superfluidité globale .	906
8.8.3.1	Du cas immobile au cas en mouvement	906
8.8.3.2	Probabilité d'un mouvement d'ensemble spontané et ρ_n	909
8.8.3.3	De nouvelles densités normales : globale ρ_n^{glob} , ef- fective $\rho_n^{\text{eff}}(\nu)$ et différentielle $\rho_n^{\text{diff}}(\nu)$	910
8.8.3.4	Expression utile de ρ_n^{glob} et discussion physique .	912
8.8.3.5	Voir les mouvements d'ensemble	915
8.9	Énergie de l'état fondamental à 2D au-delà de Bogolioubov-Popov	916
8.9.1	Une simple application du chapitre 7	916
8.9.2	Forme finale du résultat et comparaison au numérique . .	918
8.9.3	Application à la limite de Thomas-Fermi	920
8.9.4	Effet de la portée de l'interaction	920
8.10	Complément : apparition de la densité superfluide ρ_s dans le com- portement asymptotique de $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à $T > 0$	921
8.10.1	Position du problème et motivation	921

8.10.2	Comment procéder	923
8.10.2.1	Logarithme, fonction génératrice et cumulants . .	923
8.10.2.2	Des remarques simplificatrices	924
8.10.2.3	Coefficient B dans $\phi(\mathbf{q})$ et forme du résultat	926
8.10.3	Un calcul négligeant les fluctuations de densité dans la fonction g_1	927
8.10.3.1	Une motivation physique claire, une fonction $\phi_\theta(\mathbf{q})$ simple	927
8.10.3.2	Calcul au second ordre en $\hat{H}_3$	929
8.10.3.3	Calcul au premier ordre en $\hat{H}_4$	932
8.10.3.4	Synthèse et coefficient B_θ	938
8.10.4	Calcul asymptotique sur la forme complète de g_1	938
8.10.4.1	Expression formelle de $\ln(g_1/\rho)$ à l'ordre ϵ^4	938
8.10.4.2	Calcul des moyennes dans $\ln(g_1/\rho)$	940
8.10.4.3	Conclusion	945
Principales notations		947
Index		953
Bibliographie		965