

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Fondamentaux géométriques</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>De l'espace affine aux espaces courbes : les variétés différentielles</b>	<b>13</b>
2.1	Motivation historique . . . . .	13
2.2	Motivation mathématique . . . . .	14
2.3	Variétés topologiques . . . . .	16
2.4	Cartes et expressions en coordonnées . . . . .	18
2.4.1	Fonctions coordonnées . . . . .	18
2.4.2	Expression en coordonnées d'une fonction . . . . .	18
2.5	Une variété topologique ne suffit pas pour faire du calcul différentiel... . . . . .	19
2.6	Variétés différentielles . . . . .	19
2.7	Applications différentiables entre variétés . . . . .	21
2.7.1	Les isomorphismes de variétés, les difféomorphismes . . . . .	22
2.8	Un exemple pour voir à quoi ça ressemble : la sphère . . . . .	22
2.9	Du local au global : fonctions bosses et partitions de l'unité . . . . .	23
2.9.1	Fonctions bosses . . . . .	23
2.9.2	Partition de l'unité . . . . .	25
2.10	Courbes sur une variété . . . . .	26
2.11	Sous-variétés . . . . .	26
2.12	Variétés produit . . . . .	27
2.13	Variétés à bord . . . . .	27
2.14	Expressions en coordonnées versus notions intrinsèques . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Les vecteurs tangents</b>	<b>31</b>
3.1	Transposer le calcul différentiel de $\mathbb{R}^n$ aux variétés . . . . .	31
3.1.1	Vecteurs et structure affine de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	32
3.1.2	Vecteurs tangents à une sous-variété, le point de vue du géomètre . . . . .	32
3.1.3	Vecteurs et différentielle directionnelle, le point de vue de l'analyste . . . . .	33
3.2	Les vecteurs tangents à une variété . . . . .	33
3.2.1	Les définitions du géomètre . . . . .	34

3.2.2	La définition de l'analyste . . . . .	36
3.2.3	Équivalence des deux définitions . . . . .	37
3.2.4	Synthèse . . . . .	38
3.3	Base de l'espace tangent, expression en coordonnées . .	39
3.4	Les espaces tangents sont indépendants les uns des autres!	40
3.5	L'application tangente, la différentielle d'une fonction entre variétés . . . . .	41
3.5.1	Expression de la différentielle en coordonnées, jacobien . . . . .	42
3.5.2	Différentielle d'une fonction composée, et autres propriétés . . . . .	43
3.6	Changement de coordonnées . . . . .	44
3.7	Vitesse d'une courbe . . . . .	44
3.8	Les champs de vecteurs . . . . .	45
3.8.1	Champ de vecteurs le long d'une application . .	46
3.8.2	Champ de base . . . . .	46
3.9	Crochet de deux champs de vecteurs . . . . .	46
3.10	Le flot d'un champ de vecteurs . . . . .	47
3.11	1-forme différentielle, co-vecteur . . . . .	49
3.11.1	Formes linéaires en un point d'une variété diffé- rentielle . . . . .	49
3.11.2	Expression en coordonnées . . . . .	50
3.11.3	Changement de coordonnées . . . . .	50
3.11.4	1-formes sur une variété . . . . .	51
3.11.5	Transport par une application entre variétés . .	51
3.12	Peut-on transporter un champ de vecteurs par une appli- cation? . . . . .	52
3.13	Plongements, sous-variétés et espace tangent . . . . .	52
3.14	Variétés produit et espace tangent . . . . .	53
3.15	Notion d'orientation d'une variété . . . . .	53
3.16	Variétés fibrées . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Les tenseurs</b>	<b>55</b>
4.1	Tenseurs sur un espace vectoriel . . . . .	55
4.2	Tenseurs en un point $p$ d'une variété $\mathcal{M}$ . . . . .	56
4.2.1	Expression en coordonnées . . . . .	56
4.2.2	Changement de coordonnées . . . . .	57
4.3	Champs de tenseurs sur une variété . . . . .	58
4.4	Interprétation . . . . .	60
4.5	Abus et précisions de langage... . . . . .	61
4.6	Définitions variées des tenseurs, récapitulatif . . . . .	62
4.7	Opérations sur les tenseurs . . . . .	63
4.7.1	Produit tensoriel . . . . .	63
4.7.2	Contraction . . . . .	63
4.8	Transport des tenseurs par les applications entre variétés	64
4.9	Expressions en coordonnées, champs lisses; récapitulatif	65
4.10	Produit tensoriel abstrait d'espaces vectoriels . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Les formes différentielles et la formule de Stokes, bref aperçu</b>	<b>69</b>
5.1	Définition . . . . .	70
5.2	Structure algébrique . . . . .	70
5.3	Une dérivation naturelle . . . . .	71
5.4	Les seuls objets que l'on peut intégrer sur une variété . .	71
5.5	La formule la plus importante des mathématiques : la formule de Stokes . . . . .	72
5.6	Les groupes de De Rham, invariants topologiques fondamentaux . . . . .	73
<b>6</b>	<b>La métrique d'une variété</b>	<b>75</b>
6.1	La métrique d'une variété . . . . .	76
6.2	Expression en coordonnées . . . . .	76
6.3	Signature et bases orthonormales . . . . .	77
6.4	Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires, quelques rappels . . . . .	78
6.4.1	Formes bilinéaires symétriques . . . . .	78
6.4.2	Produits scalaires et orthogonalité . . . . .	79
6.5	Dualité métrique : un peu de musique... . . . . .	81
6.5.1	Trace riemannienne . . . . .	83
6.6	Les isomorphismes de variétés semi-riemannienne : les isométries . . . . .	83
6.7	Pseudo-longueur d'une courbe . . . . .	84
6.8	Existence des métriques . . . . .	84
6.9	Un exemple : la métrique de Schwarzschild . . . . .	85
6.9.1	Un peu d'histoire . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Dériver les champs de vecteurs; la connexion</b>	<b>91</b>
7.1	Énoncé du problème . . . . .	91
7.2	Dérivée de Lie des champs de vecteurs le long des lignes de flot . . . . .	93
7.2.1	Rappel sur le flot d'un champ de vecteurs . . . . .	93
7.2.2	Dérivée de Lie . . . . .	94
7.2.3	Dérivée de Lie et crochet de Lie . . . . .	95
7.2.4	Champs de vecteurs commutatifs et crochet de Lie	95
7.3	Différentiation externe des formes différentielles . . . . .	95
7.4	Différentiation sur une variété semi-riemannienne . . . . .	95
7.4.1	Inconvénient de la dérivée de Lie . . . . .	95
7.4.2	Connexion d'espaces tangents, transport parallèle	96
7.5	Définition moderne d'une connexion . . . . .	98
7.6	Dérivation induite des champs de vecteurs le long d'une courbe . . . . .	100
7.7	Transport parallèle, relier les espaces tangents . . . . .	102
7.8	Expression en coordonnées, symboles de Christoffel . . . . .	104
7.9	Dérivation des tenseurs . . . . .	105
7.9.1	Définition et existence . . . . .	105
7.9.2	Dérivation des tenseurs associés à une connexion	106

7.9.3	Dérivée covariante totale d'un champ de tenseurs, généralisation de la différentielle . . . . .	106
7.9.4	L'identité de Leibniz, moyen de calculer et de définir la dérivée d'un tenseur . . . . .	107
7.9.5	Expression en coordonnées . . . . .	108
7.10	Quelques opérateurs différentiels . . . . .	108
7.10.1	Le gradient . . . . .	109
7.10.2	La divergence . . . . .	109
7.10.3	Le laplacien . . . . .	111
7.11	Dérivation des tenseurs, compléments . . . . .	111
7.11.1	Dérivation des tenseurs associée à la dérivée de Lie . . . . .	111
7.11.2	Dérivées secondes covariantes . . . . .	112
7.11.3	Le hessien covariant . . . . .	113
7.11.4	Comparaison des différentes différentiations . . . . .	113
7.12	Exemples fondamentaux de connexions . . . . .	113
7.13	Connexions dans les variétés fibrées . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Les géodésiques</b>	<b>115</b>
8.1	Généralités sur les courbes . . . . .	115
8.1.1	Caractère causal des courbes . . . . .	115
8.1.2	Longueur des courbes . . . . .	116
8.2	Géodésiques . . . . .	117
8.2.1	L'équation des géodésiques . . . . .	118
8.2.2	Premières propriétés . . . . .	118
8.3	L'application exponentielle . . . . .	120
8.4	Voisinage normal, coordonnées normales . . . . .	121
<b>9</b>	<b>Résumé, exemples et illustrations avec <math>\mathbb{R}^n</math> et <math>S^n</math></b>	<b>125</b>
9.1	Variété, cartes . . . . .	125
9.2	Fonctions différentiables . . . . .	126
9.3	Courbes . . . . .	127
9.4	Vecteurs tangents, dérivations, dérivation associée à une courbe . . . . .	127
9.5	Vecteurs vitesse des courbes . . . . .	128
9.6	Champs de vecteurs . . . . .	128
9.7	Tenseurs . . . . .	128
9.8	Métrique sur une variété . . . . .	129
9.9	Connexion sur une variété . . . . .	130
9.10	Dérivation induite des champs de vecteurs le long d'une courbe . . . . .	131
9.11	Transport parallèle . . . . .	132
9.12	Géodésiques . . . . .	133
9.13	Dérivation des tenseurs . . . . .	134
9.14	Extension de la définition de tenseurs . . . . .	135
<b>II</b>	<b>Premiers pas</b>	<b>137</b>
<b>10</b>	<b>Éléments de géométrie lorentzienne, espace-temps</b>	<b>139</b>

10.1	Genre causal en géométrie lorentzienne . . . . .	139
10.2	Cônes temporels . . . . .	142
10.3	Caractère causal des courbes . . . . .	143
10.4	Caractère causal des sous-variétés . . . . .	144
10.5	Orientation en temps . . . . .	144
10.6	Espace-temps . . . . .	146
<b>11</b>	<b>Relativité générale, premiers pas</b>	<b>147</b>
11.1	Tout commença avec la relativité restreinte . . . . .	147
11.2	Puis vint la relativité générale : principe d'équivalence et covariance . . . . .	148
11.3	Les postulats géométriques de la relativité générale . . .	149
11.4	Point de vue du mathématicien . . . . .	149
11.4.1	Espace-temps . . . . .	149
11.4.2	Particules . . . . .	151
11.4.3	Définition géométrique du temps : le temps propre	152
11.5	Point de vue du physicien . . . . .	153
11.5.1	Lignes d'univers, principe d'équivalence . . . . .	153
11.5.2	Particules massives . . . . .	155
11.5.3	Particules sans masse (photons) . . . . .	155
11.5.4	Grandeurs mesurées par un observateur . . . . .	156
11.6	Et la suite? . . . . .	158
<b>12</b>	<b>Interlude : dictionnaire de traduction mathématique- physique</b>	<b>159</b>
12.1	Calcul intrinsèque ou en coordonnées? . . . . .	159
12.2	Dictionnaire mathématiques-physique . . . . .	161
<b>III</b>	<b>Courbure et géodésiques</b>	<b>167</b>
<b>13</b>	<b>Familles de courbes, champ de vecteurs variation</b>	<b>169</b>
13.1	Familles de courbes à 2 paramètres . . . . .	169
13.2	Champs de vecteurs le long d'une famille de courbes à 2 paramètres . . . . .	170
13.3	Champ de vecteurs variation . . . . .	171
13.4	Lemme de symétrie des dérivées . . . . .	171
13.5	Variations de courbes et application exponentielle . . . .	172
13.6	Remarque : courbes et variations lisses par morceaux . .	173
<b>14</b>	<b>Distance et pseudo-distance</b>	<b>175</b>
14.1	La fonctionnelle longueur, formule de première variation	175
14.1.1	Première variation de la longueur . . . . .	176
14.2	Le cas riemannien . . . . .	178
14.2.1	Distance riemannienne . . . . .	178
14.2.2	Théorème de Hopf-Rinow . . . . .	179
14.3	Le cas lorentzien . . . . .	181
14.4	Interprétation : temps et « paradoxe » des jumeaux en relativité générale . . . . .	181

14.5	La connexion de Levi-Civita revisitée . . . . .	182
14.6	Aperçu de deux outils techniques indispensables . . . . .	182
14.6.1	Lemme de Gauß . . . . .	183
14.6.2	La fonction rayon . . . . .	183
<b>15</b>	<b>La courbure</b>	<b>185</b>
15.1	Motivations . . . . .	185
15.2	Tenseur de courbure de Riemann . . . . .	187
15.3	Symétries du tenseur de courbure . . . . .	189
15.4	Familles de courbes et courbure . . . . .	189
15.5	Transport parallèle le long de boucles fermées et courbure	190
15.6	Courbure sectionnelle . . . . .	192
15.7	Courbure de Ricci, courbure scalaire . . . . .	195
15.8	Courbure d'Einstein, identité de Bianchi . . . . .	197
15.9	Identités de Ricci . . . . .	197
15.10	Variétés à courbure sectionnelle constante . . . . .	198
15.11	Courbure de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{S}^n$ . . . . .	198
15.12	Invariants géométriques . . . . .	199
15.13	La courbure, pratique mathématique, pratique physique	200
<b>16</b>	<b>Familles de géodésiques, champs de Jacobi</b>	<b>203</b>
16.1	Familles de Géodésiques, champs de Jacobi . . . . .	203
16.2	Existence des champs de Jacobi et lien avec l'application exponentielle . . . . .	206
16.3	Points conjugués . . . . .	206
16.4	Interprétation physique des champs de Jacobi en relativité générale . . . . .	207
16.4.1	Forces de marée . . . . .	208
16.5	Le point de vue du physicien . . . . .	209
16.5.1	Déviations géodésiques, démonstration de Wald .	209
16.5.2	Congruences de courbes, équation de Raychaudhuri	211
16.5.3	Points conjugués et équation de Raychaudhuri .	215
<b>17</b>	<b>Géodésiques et courbure</b>	<b>217</b>
17.1	Courbure et points conjugués . . . . .	217
17.2	Définition de la courbure à partir de la déviation géodésique	218
17.2.1	Courbure sectionnelle à partir de la déviation géodésique . . . . .	218
17.2.2	Développement de Taylor du module des champs de Jacobi . . . . .	219
17.3	Interprétation métrique de la courbure dans le cas rie- mannien . . . . .	220
<b>18</b>	<b>Propriétés extrémales des géodésiques</b>	<b>223</b>
18.1	Qu'est-ce que le calcul des variations? . . . . .	223
18.2	Fonctionnelle longueur . . . . .	224
18.3	Fonctionnelle énergie . . . . .	224
18.4	Présentation des résultats . . . . .	225
18.4.1	Points conjugués le long des géodésiques . . . . .	226

18.4.2	Résultats de O'Neill . . . . .	226
18.5	Les formules utilisées pour obtenir ces résultats . . . . .	227
18.5.1	Première variation de longueur . . . . .	228
18.5.2	Formule de Synge pour la variation seconde . . . . .	229
18.5.3	Première et seconde variations de l'énergie . . . . .	230
18.6	Quelques conséquences globales . . . . .	230
18.7	Causalité, sous-variétés et points focaux . . . . .	232
18.7.1	Causalité . . . . .	232
18.7.2	Sous-variétés et points focaux . . . . .	232

## IV Relativité générale

235

### 19 Relativité générale, présentation axiomatique 237

19.1	Présentation axiomatique . . . . .	237
19.2	Les postulats géométriques . . . . .	238
19.2.1	L'espace-temps . . . . .	238
19.2.2	Particules . . . . .	238
19.2.3	Définition géométrique du temps : le temps propre	239
19.3	L'équation d'Einstein, le postulat physique . . . . .	240
19.3.1	Tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	240
19.3.2	Équation d'Einstein . . . . .	242
19.3.3	L'équation d'Einstein ne peut caractériser complètement l'espace-temps . . . . .	243
19.3.4	Familles de particules, fluides de matière . . . . .	243
19.4	Gravitation, courbure, et géodésiques . . . . .	246
19.5	« Paradoxe » des jumeaux dans l'espace-temps . . . . .	247
19.6	La constante cosmologique : mathématique ou physique? . . . . .	248
19.7	Le problème de Cauchy en relativité générale . . . . .	249
19.8	Forces, limites et alternatives . . . . .	250
19.9	Approche entièrement géométrique . . . . .	253

### 20 Les singularités de l'espace-temps 255

20.1	Complétude géodésique et extensibilité . . . . .	256
20.1.1	Introduction heuristique . . . . .	256
20.1.2	Prolongement de courbes, point terminaux . . . . .	256
20.1.3	Complétude géodésique; extension de l'espace-temps . . . . .	257
20.2	Singularités de l'espace-temps . . . . .	259
20.3	Un peu de causalité . . . . .	259
20.3.1	Relations de causalité . . . . .	259
20.3.2	Géodésiques extrémales et hyperbolicité globale . . . . .	261
20.4	Surfaces piégées de Penrose . . . . .	263
20.5	Énergie et géométrie . . . . .	265
20.6	Les théorèmes de singularités de Penrose et Hawking . . . . .	266
20.7	Principe de démonstration . . . . .	268
20.8	La conjecture de censure cosmique . . . . .	269

<b>V</b>	<b>Pour aller un peu plus loin</b>	<b>271</b>
<b>21</b>	<b>Les variétés fibrées</b>	<b>273</b>
21.1	Fibration et variétés fibrées . . . . .	273
21.2	Un exemple fondamental : le fibré tangent . . . . .	275
21.3	Sections d'un fibré . . . . .	276
21.4	Atlas de fibré, et fonctions de transition . . . . .	277
21.5	Submersion riemannienne . . . . .	279
21.6	Connexions dans les variétés fibrées . . . . .	280
21.7	Revêtements . . . . .	282
<b>22</b>	<b>Géodésiques et symétries : les champs de Killing</b>	<b>285</b>
22.1	Définitions . . . . .	285
22.2	Propriétés élémentaires . . . . .	286
22.3	Champs de Killing et géodésiques . . . . .	287
<b>23</b>	<b>Intégration sur une variété semi-riemannienne</b>	<b>289</b>
23.1	Forme volume riemannienne . . . . .	289
23.2	Intégrale d'une fonction sur une variété semi-riemannienne orientée . . . . .	289
<b>24</b>	<b>La théorie de Kaluza-Klein</b>	<b>291</b>
24.1	Préambule : retour sur les isomorphismes musicaux . . . . .	292
24.2	L'électromagnétisme sur la variété espace-temps . . . . .	292
24.2.1	Le champ électromagnétique comme 2-forme différentielle . . . . .	292
24.2.2	Particules chargées . . . . .	292
24.2.3	Équations de Maxwell . . . . .	293
24.2.4	Loi de Lorentz . . . . .	293
24.2.5	Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique . . . . .	294
24.3	Électromagnétisme et équation d'Einstein . . . . .	295
24.4	Axiomatique classique pour la gravitation et l'électromagnétisme . . . . .	295
24.5	Une géométrie commune pour la gravité et l'électromagnétisme . . . . .	296
24.6	Espace-temps de dimension 5, « petite » dimension . . . . .	296
24.7	Chute libre dans un champ électro-gravitationnel . . . . .	298
24.8	Fluide de poussière dans un espace-temps de dimension 5 . . . . .	299
24.9	Fluides dans un champ électro-gravitationnel . . . . .	300
24.10	Limites et perspectives . . . . .	301
<b>25</b>	<b>Éléments de théorie des sous-variétés</b>	<b>305</b>
25.1	Sous-variétés semi-riemanniennes . . . . .	305
25.2	Caractère causal des sous-variétés . . . . .	306
25.3	Seconde forme fondamentale . . . . .	307
25.4	Courbes et géodésiques dans les sous-variétés . . . . .	308
25.5	Géométrie extrinsèque et équation de Gauß-Codazzi . . . . .	308
25.6	Sous-variétés totalement géodésiques . . . . .	309

25.7	Champ de vecteurs de courbure moyenne . . . . .	310
25.8	Hypersurfaces semi-riemanniennes . . . . .	310
25.9	Opérateur de forme sur une hypersurface . . . . .	311
25.10	Champ de vecteurs de courbure moyenne et opérateur de forme . . . . .	312
25.11	Hypersurfaces de genre lumière . . . . .	312
25.12	Surfaces piégées de Penrose, complément . . . . .	314
25.13	Les théorèmes de plongement de Whitney et de Nash . .	316

## **VI Appendice 319**

### **A Congruences de courbes, équation de Raychaudhuri 321**

A.1	Congruence de courbes . . . . .	321
A.2	L'équation d'évolution fondamentale . . . . .	322
A.3	Tenseur d'évolution, vorticité et cisaillement . . . . .	323
A.4	Flots irrotationnels . . . . .	324
A.5	Remarque technique . . . . .	325
A.6	Tenseur de projection et tenseurs de genre espace . . . .	326
A.7	Congruence de genre temps . . . . .	326
A.8	Congruence de genre lumière . . . . .	330
A.9	Singularités d'une congruence . . . . .	334
A.10	Points conjugués et équation de Raychaudhuri . . . . .	336

### **Bibliographie 339**

### **Index 343**