

Table des matières

Préface	1
Avant-Propos	5
Remerciements	11
1 Éléments de relativité restreinte	1
I Développements historiques	1
I.1 Principe d'inertie et transformation de Galilée	1
I.2 L'électromagnétisme et le problème de l'éther	2
I.2.1 Phénomène d'aberration stellaire (1728)	2
I.2.2 Expérience d'Arago – Théorie d'entraînement partiel de l'éther de Fresnel (1810)	2
I.2.3 Expérience de Fizeau (1851)	3
I.2.4 Expérience de Michelson-Morley (1887)	5
I.3 Théorie de l'électron de Lorentz – Transformation de Lorentz et travaux de Poincaré	6
II Théorie de la relativité restreinte – Formulation d'Albert Einstein (1905)	8
II.1 Les postulats	8
II.2 Synchronisation des horloges – Relativité de la simultanéité	9
II.2.1 Synchronisation des horloges	9
II.2.2 Relativité de la simultanéité	10
II.3 Transformation spéciale de Lorentz – Loi de composition des vitesses	12
II.3.1 Transformation spéciale de Lorentz ou <i>Boost</i>	12
II.3.2 Contraction des longueurs	14
II.3.3 Relativité de la simultanéité, dilatation des durées	14
II.3.4 Durée de vie des muons	15
II.3.5 Effet Doppler relativiste	17

	II.3.6 Loi de composition relativiste des vitesses – Interprétation des expériences historiques . . .	18
III	Théorie de la relativité restreinte – Formulation de Minkowski (1908)	21
	III.1 Pseudo-produit scalaire, invariance de ds^2	21
	III.2 Transformations de Lorentz et groupe de Lorentz . . .	22
	III.3 Trajectoires d'espace-temps ou lignes d'univers.	24
	III.3.1 Cône de lumière – Domaines de l'espace-temps	24
	III.3.2 Trajectoires d'espace-temps ou lignes d'univers	27
	III.3.3 Temps propre τ	27
	III.4 Diagrammes de Lorentz et de Minkowski – Paradoxe des jumeaux de Langevin	28
	III.4.1 Diagramme de Lorentz	28
	III.4.2 Diagramme de Minkowski	30
	III.4.3 Paradoxe des jumeaux de Langevin	31
	III.4.4 Expérience de Hafele et Keating	35
	III.5 Cinématique et dynamique minkowskienne – Quadri- vecteurs vitesse $\underline{u}$ et impulsion $\underline{p}$	36
	III.5.1 Quadri-vitesse $\underline{u}$	36
	III.5.2 Quadri-impulsion $\underline{p}$	37
	III.5.3 Particules de masse nulle (photons)	39
2	Formalisme moderne de la relativité générale	41
I	Variété, espace vectoriel tangent et base naturelle	41
	I.1 Variété	41
	I.2 Espace vectoriel tangent et base naturelle	42
II	Tenseurs	47
	II.1 Espace dual, formes linéaires ou covecteurs	47
	II.2 Définitions générales, exemples	50
	II.2.1 Définitions générales	50
	II.2.2 Exemples	51
	II.3 Tenseur métrique $\underline{g}$ – Relations entre composantes co- variantes et contravariantes	55
	II.3.1 Tenseur métrique $\underline{g}$	55
	II.3.2 Lien entre composantes covariantes et contra- variantes	56
	II.3.3 Transformation et groupe de Lorentz dans l'espace-temps de Minkowski	57
	II.3.4 Tenseur métrique de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphé- riques	58
	II.3.5 Tenseur métrique en relativités restreinte et générale	61
III	Dérivée covariante ou connexion	61
	III.1 Insuffisance de la dérivée usuelle	61

III.2	Coefficients de connexion et de Christoffel	62
III.2.1	Transport parallèle – Coefficients de connexion	62
III.2.2	Critère de transformation des coefficients de connexion	65
III.2.3	Généralisation à un tenseur quelconque	66
III.2.4	Dérivée covariante de Levi-Civita et théorème fondamental de la métrique	67
III.2.5	Calcul des coefficients de Christoffel dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$	68
III.3	Formulation covariante des lois physiques	70
III.3.1	Formulation covariante de la dynamique newtonienne	70
III.3.2	Équation d'une géodésique	71
III.3.3	Écriture covariante des équations de Maxwell	72
IV	Courbure de l'espace-temps – Tenseur de Riemann	77
IV.1	Transport parallèle et caractérisation intrinsèque de la courbure	77
IV.1.1	Transport parallèle le long d'un cercle parallèle sur une 2-sphère	78
IV.1.2	Transport parallèle le long d'un cercle parallèle dans $\mathbb{R}^3$	80
IV.1.3	Dépendance vis-à-vis du chemin suivi	81
IV.2	Tenseur de courbure de Riemann	83
IV.2.1	Mise en évidence du tenseur de Riemann	83
IV.2.2	Propriétés	86
IV.3	Tenseur de Ricci et scalaire de Ricci	87
V	Principe variationnel et géodésiques	88
V.1	Principe de moindre action et calcul variationnel	89
V.1.1	Principe de Fermat et loi de la réfraction	89
V.1.2	Principe de moindre action de Maupertuis	91
V.1.3	Principe de moindre action de Lagrange : lagrangien et équations d'Euler-Lagrange	91
V.1.4	Principe variationnel en théorie des champs	93
V.1.5	Lien avec l'énergie E	94
V.1.6	Moment conjugué p et Hamiltonien H	94
V.2	Géodésiques	95
V.2.1	Équation des géodésiques	95
V.2.2	Détermination alternative de la dérivée covariante de Levi-Civita	98
V.3	Équation de la déviation géodésique – Analogie newtonienne	99
V.3.1	Équation de la déviation géodésique	99
V.3.2	Analogie newtonienne : terme de marée	101
VI	Équations d'Einstein	108

VI.1	Principes de relativité généralisé, de conservation et de correspondance	108
VI.2	Tenseur impulsion-énergie $\mathbf{T}$	109
VI.2.1	Propriétés générales	109
VI.2.2	Tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique	114
VI.3	Tenseur d'Einstein $\mathbf{G}$	116
VI.4	Équations d'Einstein	118
VI.5	Équations d'Einstein linéarisées - Ondes gravitationnelles	123
VI.6	Approche variationnelle et action de Hilbert	127
VII	Métrique de Schwarzschild	130
VII.1	Symétries et invariances	131
VII.2	Coefficients de Christoffel	131
VII.3	Tenseur et scalaire de Ricci	132
VII.4	Tenseur d'Einstein	132
VII.5	Résolution des équations d'Einstein dans le vide et métrique de Schwarzschild	133
VIII	Symétries et vecteurs de Killing	135
VIII.1	Dérivée de Lie	135
VIII.2	Vecteurs de Killing	137
IX	Premières prédictions de la théorie de la relativité générale	138
IX.1	Avance du périhélie de Mercure	140
IX.1.1	Trajectoire newtonienne et potentiel effectif newtonien	140
IX.1.2	Potentiel effectif relativiste	144
IX.1.3	Correction relativiste de la trajectoire	150
IX.1.4	Avance du périhélie	152
IX.2	Déviation de la lumière et effet Shapiro	154
IX.2.1	Potentiel effectif et équation différentielle de la trajectoire d'un photon	154
IX.2.2	Déviation de la lumière au voisinage d'un astre massif	156
IX.2.3	Effet Shapiro	160
IX.3	Décalage spectral ou <i>redshift</i> gravitationnel	163
IX.3.1	Effet Einstein	163
IX.3.2	Vérifications expérimentales	165
IX.3.3	Conséquences de l'effet Einstein	167
3	Genèse de la relativité générale – Première période (1907-1912)	169
I	Principe d'équivalence	170
II	Einstein 1907j : « Du principe de relativité et des conséquences tirées de celui-ci »	174
III	Observateurs accélérés : approche de Minkowski	184

III.1	Observateur uniformément accéléré	185
III.2	Ligne d'univers d'un observateur accéléré et mouve- ment perçu par un observateur inertiel	186
III.3	Coordonnées de Rindler	190
III.4	Relation entre les temps propres de deux observateurs comobiles uniformément accélérés	191
IV	Einstein 1911h : « De l'influence de la gravitation sur la pro- pagation de la lumière »	192
V	Théories dynamiques scalaires d'Abraham, Einstein et Nordström	202
V.1	Théorie d'Abraham	203
V.2	La controverse Einstein-Abraham	208
V.3	Einstein 1912c : « Vitesse de la lumière et théorie sta- tique du champ de gravitation »	211
V.4	Einstein 1912d : « Théorie du champ gravitationnel statique »	219
V.5	Théorie de Nordström	227
	V.5.1 Nordström 1912 : « Le principe de relativité et la gravitation »	227
	V.5.2 Nordström 1913a : « Masses inertielle et gra- vitationnelle en mécanique relativiste »	233
	V.5.3 Nordström 1913b « de la théorie de la gravita- tion du point de vue du principe de relativité »	235
VI	Systèmes en rotation	241
VI.1	Principe de Mach et origine des forces inertielles	241
VI.2	Le disque en rotation et l'abandon de la géométrie eu- clidienne	246
VII	Émergence des géométries non euclidiennes	252
VII.1	Théorie des surfaces de Gauss	252
	VII.1.1 Coordonnées de Gauss – Première forme fon- damentale	252
	VII.1.2 Courbure totale et courbure de Gauss	256
	VII.1.3 <i>Theorema egregium</i> et courbure intrinsèque .	258
	VII.1.4 Géodésiques	260
VII.2	Géométrie riemannienne – Théorie des variétés	262
VIII	État des lieux à la fin de la première période	265
4	Genèse de la relativité générale – Seconde période (1912- 1915)	269
I	Août 1912 : un changement radical de stratégie mathématique	269
II	Einstein et Grossman 1913 : « Ébauche d'une théorie géné- ralisée de la relativité et d'une théorie de la gravitation » ou <i>Entwurf</i>	272
II.1	Partie mathématique par Marcel Grossmann	272

	II.2	Partie physique par Albert Einstein	273
III		Théorie scalaire d'Einstein-Nordström	291
	III.1	État actuel des connaissances sur le problème de la gravitation (Einstein 1913c)	291
	III.2	La théorie de la gravitation de Nordström du point de vue du calcul différentiel absolu (Einstein et Fokker 1914)	299
	III.3	Théorie scalaire de la gravitation : une théorie cohérente mais invalidée par l'expérience	305
IV		Juin 1913 – septembre 1915 : une période salutaire de doute, <i>No success like Failure</i>	306
	IV.1	Période de doute – double stratégie physique et mathématique	306
	IV.2	Covariance limitée des équations de champ et argument du trou	310
		IV.2.1 Premiers énoncés de l'argument du trou	310
		IV.2.2 Analyse de l'argument du trou	312
		IV.2.3 Argument des points de coïncidences	314
		IV.2.4 Transformations de jauge et difféomorphismes – Transformations passive et active	317
		IV.2.5 Substantialisme et relationnisme	320
		IV.2.6 Complétude d'une théorie et paradoxe EPR	321
	IV.3	Covariance et relativité	322
		IV.3.1 La covariance : une propriété purement formelle?	322
		IV.3.2 Covariance et principe de relativité	324
		IV.3.3 Groupes de symétrie et vecteurs de Killing	326
	IV.4	Développement de méthodes variationnelles	329
		IV.4.1 Einstein 1914b	330
		IV.4.2 Einstein 1914c	333
		IV.4.3 Nature des composantes du champ gravitationnel : le préjugé funeste	342
	IV.5	Carnet de Zurich et manuscrit Einstein-Besso	345
		IV.5.1 Carnet de Zurich	346
		IV.5.2 Le manuscrit Einstein-Besso et l'avance du périhélie de Mercure	348
	IV.6	Le problème des métriques en rotation	350
	IV.7	Les problèmes de la limite newtonienne	360
		IV.7.1 Champ gravitationnel statique et métrique spatialement plate	360
		IV.7.2 Équations de champ dans la limite des champs faibles	362
		IV.7.3 Utilisation anormale des conditions de jauge : restriction des coordonnées	364
V		Les quatre articles de novembre 1915	369

V.1	Einstein 1915a : À propos de la théorie de la relativité générale (tenseur de novembre R_{im} et transformations unimodulaires)	371
V.2	Einstein 1915b : addendum à Einstein 1915a	383
V.3	Einstein 1915c : Explication du mouvement du périhélie de mercure par la théorie de la relativité générale . .	386
V.4	Einstein 1915d : Les équations de champ de la gravitation	408
VI	La rivalité avec David Hilbert	414
5	Derniers développements (1916-1918)	419
I	Article de synthèse « Le fondement de la théorie de la relativité générale » (Einstein 1916a)	419
II	Ondes gravitationnelles (Einstein 1916g, Einstein 1918a) . . .	435
III	Einstein 1916c – Théorème de Noether	445
IV	Premiers modèles cosmologiques - Introduction de la constante cosmologique	446
IV.1	Einstein 1917b – Univers sphérique statique	446
IV.2	De Sitter 1917a, b et c – Univers hyperbolique	456
IV.3	Instabilité du modèle statique d'Einstein	461
V	Résumé de la genèse et conclusion	464
	Index	479
	Bibliographie	483